[3] *Дмитриев С. Г., Коган Ш. М.* Влияние дискретности дипольного слоя на поверхности кристалла на форму поверхностного барьера. — ФТТ, 1979, т. 21, в. 1, с. 29—34.
[4] *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. I. М., 1973. 296 с.
[5] *Burt M. G., Inkson J. C.* J. Phys. D, 1976, v. 9, № 1, p. L5-7, p. 43—53; 1977, v. 10, № 5, p. 721—727.
[6] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М., 1963. 704 с.
[7] *Мусатов А. Л., Коротких В. Л.* Механизм выхода фотоэлектронов из фотокатодов с отрицательным электронным сродством. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1982, т. 46, в. 7, с. 1357—1360.
[8] *Капица М. Л., Немченок Р. Л., Кудинов Ю. А.* Энергетическое распределение фотоэлектронов с эпитаксиальных слоев $Ga_{0.82}In_{0.18}As$. — ЖТФ, 1983, т. 53, в. 2, с. 415—416.

Институт радиотехники и электроники
АН СССР
Москва

Поступило в Редакцию
22 апреля 1983 г.

УДК 538.566 *Журнал технической физики, т. 54, в. 9, 1984*

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СОЛИТОНЫ В ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Д. В. Красовицкий

Известно [1], что в ряде практически важных случаев процесс распространения электромагнитных волн в нелинейных средах с дисперсией удается проанализировать с помощью нелинейного параболического уравнения

$$i\frac{\partial E}{\partial t}+iv_g\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{v_g'}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\alpha|E|^2E=0, \tag{1}$$

где E — комплексная амплитуда электрического поля; α — коэффициент, характеризующий нелинейные свойства среды, групповые скорости v_g и $v_g'=dv_g/dk$ связаны с линейным показателем преломления $ck/\omega=n_0(\omega)$ соотношениями [2]

$$v_g=c\left[\frac{d}{d\omega}(\omega n_0)\right]^{-1},\quad 1-\frac{kv_g'}{v_g}=\frac{v_g^2}{c^2}\frac{d^2}{d\omega^2}(\omega^2 n_0^2). \tag{2}$$

Примером использования уравнения (1) является расчет ленгмюровских солитонов в плазме [1].

Однако задача существенно усложняется при наличии резонансных частиц, когда показатель преломления $n_0(\omega)$ имеет особенность и, следовательно, коэффициенты v_g и v_g' не определены на резонансной частоте. Такая ситуация возникает, например, в плазме с пучком заряженных частиц, когда показатель преломления имеет полюса, соответствующие черенковскому и циклотронному резонансам [2, 3]. Аналитические решения для такой двухкомпонентной системы удается получить для пучков малой плотности, когда вкладом резонансных частиц в дисперсию можно пренебречь и она определяется линейной плазмой. Если же мощный импульс поля распространяется в однокомпонентной среде, то число резонансных частиц не мало и дисперсионные свойства среды существенно зависят от амплитуды волны. В этом случае параболическое уравнение (1) теряет смысл, а интегрирование самосогласованной системы уравнений должно определить как форму волны, так и нелинейный закон дисперсии.

Метод решения такого рода задачи ниже проанализирован для электромагнитных волн в двухуровневых системах [4, 5], когда нелинейность является достаточно простой и решение приводится к элементарным функциям. При этом по сравнению с [5] удается не только определить форму уединенного импульса, но и найти зависимость диэлектрической проницаемости от амплитуды поля. Последнее соотношение позволяет определить групповую и фазовую скорости вблизи резонанса и устранить особенность в формулах линейной теории.

Отметим, что проведенное в работе исследование является анализом эффекта самоиндуцированной прозрачности [5] с точки зрения общей теории солитонов [6].

Следуя работе [4], используем в качестве исходной следующую систему нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}+\Omega^2 P=-\frac{2Nd^2\Omega}{\hbar}WE, \tag{3}$$

где P и E — проекции вектора поляризации и электрического поля волны на плоскость (xy); Ω, N и d — резонансная частота, плотность и дипольный момент среды; разность заселенностей уровней равна

$$W=-\left[\left(1-\left(\frac{P}{Nd}\right)^2-\left(\frac{1}{N\Omega d}\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

В линейном приближении для гармоники $\exp(i\omega t-ikz)$ из (3) следует дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2=n_0^2(\omega)=1+\frac{q^2}{\delta},\quad q^2=\frac{8\pi Nd^2}{\hbar\Omega},\quad \delta=\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1, \tag{5}$$

имеющее особенность при $\delta=0$, т. е. когда частота волны совпадает с собственной частотой среды Ω. Поэтому коэффициенты в уравнении (1)

$$v_g=cn_0\left(1+\frac{q^2}{\delta^2}\right)^{-1},\quad v_g'=-\frac{c^2}{\omega^2}\left(\frac{v_g}{cn_0}\right)^3\frac{q^2}{\delta^3}(1+3n_0^2) \tag{6}$$

не определены при $\delta=0$.

В нелинейном приближении будем искать решение (3) в виде волн огибающей

$$\begin{gathered}E=Nd\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(\xi)\exp(i\omega t-ikz),\\ P=Nd\,\mathrm{Re}\,a(\xi)\exp(i\omega t-ikz),\\ \xi=\Omega/c\cdot(z-\beta ct)\end{gathered} \tag{7}$$

с медленно изменяющимися амплитудами, что справедливо при выполнении неравенств [4]

$$q^2\ll 1,\quad |\delta|\ll 1,\quad |n^2-1|\ll 1, \tag{8}$$

где $n=ck/\omega$; ω и k — волновое число и частота волны; $u=\beta c$ — скорость переноса амплитуды.

При подстановке (7) в (3) и (4) неравенства (8) позволяют опустить вторые производные от амплитуд и понизить порядок системы нелинейных уравнений в полных производных (по переменной ξ)

$$\begin{gathered}2i(n-\beta)\dot\varepsilon+(n^2-1)\varepsilon=4\pi a,\\ -2i\beta\dot a+\delta a=q^2/4\pi\cdot(1-|a|^2)^{1/2}\varepsilon.\end{gathered} \tag{9}$$

Исключая a из второго уравнения (9), получаем следующее нелинейное уравнение для безразмерной комплексной амплитуды поля:

$$\begin{gathered}4\beta(n-\beta)\ddot\varepsilon+2i[\delta(n-\beta)-\beta(n^2-1)]\dot\varepsilon+\delta(n^2-1)\varepsilon=\\ =\left(\frac{q}{4\pi}\right)^2[16\pi^2-4(n-\beta)^2|\dot\varepsilon|^2-(n^2-1)^2|\varepsilon|^2-2i(n-\beta)(\varepsilon^*\dot\varepsilon-\varepsilon\dot\varepsilon^*)]^{1/2}\varepsilon.\end{gathered} \tag{10}$$

Существенное упрощение этого уравнения достигается, если коэффициент при ε обращается в нуль и функция ε является вещественной, что соответствует волне, резонансной по групповой скорости, когда изменение амплитуды не сопровождается уходом фазы. Легко видеть, что такое решение существует при $n=1$ и $\delta=0$, но при этом скорость u остается свободным параметром [5]. Поэтому мы будем считать, что обращается в нуль выражение в квадратной скобке в (10)

$$\beta=n(1+(n^2-1)/\delta)^{-1}=\beta_g \tag{11}$$

Сравнивая выражения (11) и (6), видим, что равенство (11) эквивалентно $u=v_g$. Однако при этом групповая скорость $v_g=c\beta_g$ может не совпадать с линейной (6), так как зависит от амплитуды поля.

Учитывая, что равенство (11) определяет коэффициент при старшей производной в (10), введем новые переменные

$$y=\frac{\varepsilon}{4\pi}|n^2-1|,\quad \tau=\frac{|\delta|}{2\beta_g}\xi,\quad Q=\frac{q^2}{\delta(n^2-1)} \tag{12}$$

и представим (10) в виде

$$y''+y=Q(1-y^2-y'^2)^{1/2}y, \tag{13}$$

где штрихом обозначена производная по τ.

Будем искать решение (13) в виде уединенного импульса, т. е. удовлетворяющее условиям $y=y'=0$ [1]. После интегрирования находим

$$y' = y\,(Q - 1 - Q^2y^2/4)^{1/2}. \tag{14}$$

Нужное решение существует при $Q > 1$, когда в правой части (14) есть «точка поворота» и имеет вид

$$y = 2/Q \cdot (Q-1)^{1/2}\,\mathrm{sech}\,[(Q-1)^{1/2}\,\tau]. \tag{15}$$

Удобно выразить промежуточный параметр Q через максимальную амплитуду поля ε_m. Учитывая (12), получаем

$$\varepsilon\,(\xi) = \varepsilon_m\,\mathrm{sech}\,(q^2\varepsilon_m\xi/16\pi\beta_g),$$

$$(Q-1)^{1/2} = q^2\varepsilon_m/8\pi\delta. \tag{16}$$

Последнее соотношение отражает нелинейный закон дисперсии для уединенных волн в двухуровневой системе. Действительно, подставляя значение Q из (12), получаем следующее соотношение:

$$n^2 = 1 + \frac{q^2}{\delta}\left[1 + \left(\frac{q^2\varepsilon_m}{8\pi\delta}\right)^2\right]^{-1}, \tag{17}$$

обобщающее линейное дисперсионное уравнение (5). Для определения групповой и фазовой скорости волны в условиях резонанса подставим (17) в (11) и перейдем к пределу $\delta \to 0$

$$v_g = c\left(1 + \frac{8\pi N\hbar\Omega}{E_m^2}\right)^{-1}, \quad v_{ph} = \frac{c}{n} = 1, \tag{18}$$

где $E_m = Nd\varepsilon_m$. Это выражение для групповой скорости совпадает с найденным в [7] из качественных соображений.

В размерных переменных выражение (16) для уединенного импульса принимает вид

$$E = E_m\,\mathrm{sech}\left[\frac{dE_m}{2\hbar}\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right]. \tag{19}$$

Следует отметить, что поле волны зависит от расстройки по частоте δ только через групповую скорость v_g. В то же время амплитуда поляризации среды и разность заселенностей энергетических уровней (4) существенно зависят от δ. В максимуме поля $\zeta=0$ имеют место соотношения

$$P_m = 2Nd\,\frac{\mu}{1+\mu^2}, \quad W_m = -\frac{1-\mu}{1+\mu}, \tag{20}$$

где $=\mu dE_m/\hbar\Omega\,|\,\delta\,|$. Отсюда следует, что при $\mu > 1$ в центре солитона двухуровневая система находится в состоянии с инверсной заселенностью уровней $W_m > 0$. В частности, это условие всегда выполнимо для резонансного солитона $\delta=0$.

В заключение отметим, что нелинейный закон дисперсии (17) отличается от аналогичного соотношения, полученного в [8] для монохроматической волны.

Литература

[1] *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 237 с.

[2] *Бачин И. В., Красовицкий В. Б.* Распространение электромагнитных солитонов в неравновесных средах с дисперсией. — ЖЭТФ, 1980, т. 79, № 2 (8), с. 472—477.

[3] *Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б.* Квазипоперечные ленгмюровские солитоны в магнитоактивной плазме с релятивистским электронным пучком. — Укр. физ. журн., 1983, т. 28, № 1, с. 49—57.

[4] *Красовицкий В. Б., Курилко В. И.* Распространение и возбуждение электромагнитных волн в нелинейной среде. — ЖЭТФ, 1965, т. 48, № 1, с. 353—357.

[5] *McCall S. L., Hahn E. L.* Self-induced transparency by pulsed coherent light. — Phys. Rev. Lett., 1967, v. 22, № 21, p. 908—911; Self—induced transparency. — Phys. Rev., 1969, v. 183, № 2, p. 457—485.

[6] *Полуэктов И. А., Попов Ю. М., Ройтберг В. С.* Эффект самоиндуцированной прозрачности. — УФН, 1974, т. 114, № 1, с. 97—131.

[7] *Courtens E.* Giant faraday rotations in self-induced transparency. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, № 1, p. 3—5.

[8] *Красовицкий В. Б., Курилко В. И.* Взаимодействие электромагнитных волн с двухуровневой системой. — ЖТФ, 1966, т. 36, № 2, с. 401—404.

Ростовский
государственный университет

Поступило в Редакцию
16 июня 1983 г.
В окончательной редакции
28 декабря 1983 г.