А. Г. Иванов, Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений. II,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 441–454

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 441–454

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977.1

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ. II

© 2005 г. **А. Г. Иванов**

Настоящая работа является продолжением статьи [1], в ней используются введенные там обозначения.

4. К свойствам п.п. вариаций для $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$. В этом пункте приведем еще ряд свойств п.п. вариаций для фиксированного набора $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$, с которым свяжем следующие обозначения:

$$\begin{gathered}\widehat{f}(t,u)\doteq f(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u),\quad \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\doteq f_{\mathfrak{l}}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u),\quad \mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m},\\ \Delta f(t,\nu)\doteq\langle\widehat{\mu}(t)-\nu,\widehat{f}(t,u)\rangle,\quad \Delta f_m(t,\nu)\doteq\Delta f(t+ma,\nu),\quad m\in\mathbb{Z},\quad \nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U}),\\ \Delta f_{\mathfrak{l}}(t,\nu)\doteq\langle\widehat{\mu}(t)-\nu,\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle,\quad \Delta f_{\mathfrak{l},m}(t,\nu)\doteq\Delta f_{\mathfrak{l}}(t+ma,\nu),\\ \psi_{\mathfrak{l}}(t)\doteq\langle\widehat{\mu}(t),f'_x(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle,\quad \psi_{\mathfrak{l},m}(t)\doteq\psi_{\mathfrak{l}}(t+ma),\end{gathered}\tag{4.1}$$

и чтобы не усложнять обозначений, в дальнейшем для заданных $K_r\in\operatorname{comp}(G)$, $V\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^k)$ и $\mathfrak{U}\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ положим

$$\mathfrak{d}\doteq\sup_{(t,x,u)\in\mathbb{R}\times K_r\times V\times\mathfrak{U}}\Big\{|f(t,x,v,u)|+|f'_x(t,x,v,u)|+\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}|f_{\mathfrak{l}}(t,x,v,u)|\Big\}.\tag{4.2}$$

Так как [2] отображения $(t,u)\mapsto\widehat{f}(t,u)$, $\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)$, $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, п.п. по $t\in\mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u\in\mathfrak{U}$, то по лемме 2.1 при каждом $\vartheta\in[0,a]$ и всякой последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}$ существуют пределы $\lim\limits_{q\to\infty}(qa)^{-1}\sum_{m=0}^{q-1}\langle\nu(m),\widehat{f}(\vartheta+ma,u)\rangle$ и $\lim\limits_{q\to\infty}(qa)^{-1}\sum_{m=0}^{q-1}\langle\nu(m),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(\vartheta+ma,u)\rangle$, и, кроме того, по теореме 1.1 функции $t\mapsto\langle\widehat{\mu}(t),\widehat{f}(t,u)\rangle$, $\langle\widehat{\mu}(t),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle$ п.п. по Степанову. Поэтому, используя теорему 1.4 из [3], получаем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Существуют такие последовательности* $\{q_l\}_{l=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $\lim\limits_{l\to\infty}q_l=\infty$, *и* $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}\subset[0,a]$, $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p=0$, *а также измеримое множество* $\Xi\subset[0,a]$, $\operatorname{mes}\Xi=a$, *что при каждом* $\vartheta\in\Xi$ *будут выполнены равенства*

$$\lim_{p\to\infty}\bigg(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\int\limits_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta f_m(t+\vartheta,\nu)-\Delta f_m(\vartheta,\nu)|\,dt\bigg)=0,\tag{4.3}$$

$$\begin{gathered}\lim_{p\to\infty}\bigg(\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-ka\sigma}}{\eta_p}\int\limits_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta f_{m+k}(t+\vartheta,\nu)-\Delta f_{m+k}(\vartheta,\nu)|\,dt\bigg)=0,\\ \sigma\doteq\max(\sigma_1,\sigma_2),\end{gathered}\tag{4.4}$$

и для любой последовательности $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{APS}$ *существуют пределы*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\Delta f_m(\vartheta,\nu(m)),\quad \lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m)),\quad \mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{4.5}$$

Кроме того, при каждом $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ *для функций* $\Delta f_{\mathfrak{l}}$ *справедливы предельные соотношения, аналогичные (4.3), (4.4).*

Всюду далее предполагаем, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ точки ϑ_i принадлежат множеству $\Xi\subset[0,a]$, определенному теоремой 4.1. Теперь для иголки

$$\iota=\{(\vec{\beta}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N\in\mathcal{V}$$

и всех $m\in\mathbb{Z}_+$, $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ полагаем

$$L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota)\doteq\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^{k_i}\beta_{ij}\int_0^a\psi_{\mathfrak{l},m}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\{\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i-(k+1)a)\Delta f_m(\vartheta_i-(k+1)a,\nu_{ij}(m-(k+1)))+$$

$$+\mathcal{G}_m(t,\vartheta_i+ka)\Delta f_m(\vartheta_i+ka,\nu_{ij}(m+k))\}\,dt\quad(\mathcal{G}_m(\cdot,\cdot)\doteq\mathcal{G}(\cdot+ma,\cdot+ma)). \tag{4.6}$$

Используя выбор точек ϑ_i, ограниченность функций $\psi_{\mathfrak{l}}\in S(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$, следствие 1.3 и лемму 1.9 из [3], неравенство (2.5) из [4] и существование пределов (4.5), можно доказать существование пределов

$$\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)\doteq\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota),\quad \mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{4.7}$$

Кроме того, из существования пределов (4.5) вытекает также, что для каждой иголки $\iota\in\mathcal{V}$ существуют пределы

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)\doteq\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^{k_i}\beta_{ij}\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu_{ij}(m)),\quad \mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}. \tag{4.8}$$

Далее, так как (см. (2.5), (2.6)) для любых $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ и $\mathfrak{y}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ иголка $\mathfrak{y}\vec{\iota}\in\mathcal{V}$, то из (2.3), (2.4) и (4.6) получаем, что

$$L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\mathfrak{y}\vec{\iota})=\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}),\quad \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\mathfrak{y}\vec{\iota})=\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}),\quad \mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\mathfrak{y}\vec{\iota})=\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota_{\mathfrak{q}}). \tag{4.9}$$

Лемма 4.1. *Пусть* $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ *такое, что* $\beta(\vec{\iota})>0$ *и* $\varepsilon_p\doteq\eta_p/\rho\beta(\vec{\iota})$, $p\in\mathbb{N}$, *где* $\{\eta_p\}_{p=1}^{\infty}$ *– последовательность, указанная в теореме 4.1, и отображения* $\mathfrak{y}\mapsto h(\cdot,\mathfrak{y})\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{y}\mapsto y(\cdot,\mathfrak{y})\in B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$ *заданы равенствами (2.16) и (3.10) соответственно. Тогда при каждом* $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sup_{\mathfrak{y}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\left|M\left\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)\left(\frac{\Delta x(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota})}{\varepsilon_p}+y(t,\mathfrak{y})\right)\right\}-\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\mathfrak{y}\vec{\iota})\right|\right)=0, \tag{4.10}$$

$$\lim_{p\to\infty}\left(\sup_{\mathfrak{y}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\left|\frac{1}{\varepsilon_p}M\{\langle\Delta\mu(t;\varepsilon_p,\mathfrak{y}\vec{\iota}),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}-\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\mathfrak{y}\vec{\iota})\right|\right)=0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Для каждого $\iota \in \mathcal{V}$ $(\beta(\iota) > 0)$ и всех $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\iota)]$ полагаем

$$I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \iota, \varepsilon) \doteq \int\limits_{ma}^{(m+1)a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t; \iota, \varepsilon)\, dt - L^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \iota), \quad g(t; \iota, \varepsilon) \doteq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t,s) \langle \Delta\mu(s; \varepsilon, \iota), \hat{f}(s,u) \rangle\, ds. \tag{4.12}$$

Поскольку при каждом $\mathfrak{n} \in \mathbb{Z}$ и всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\left| \int\limits_{(m+\mathfrak{n})a}^{(m+\mathfrak{n})a+a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t; \iota, \varepsilon)\, dt - \int\limits_{ma}^{(m+1)a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t; \iota, \varepsilon)\, dt \right| \leq$$

$$\leq a \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t; \iota, \varepsilon)| d_a(\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot + \mathfrak{n}a), \psi_{\mathfrak{l}}(\cdot)) + a\, d_a(\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot), 0) \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t + \mathfrak{n}a; \iota, \varepsilon) - g(t; \iota, \varepsilon)|,$$

а функции $g(\cdot; \iota, \varepsilon)$, $\psi_{\mathfrak{l}}(\cdot)$ п.п. по Бору и Степанову соответственно, то в силу леммы 1.6 из [3] вытекает, что последовательность $\{\int_{ma}^{(m+1)a} \psi_{\mathfrak{l}}(t) g(t; \iota, \varepsilon)\, dt\}_{m \in \mathbb{Z}}$ является п.п., а значит, для нее существует среднее [5, с. 178]. Поэтому из (4.12) и существования предела (4.7) получаем, что для каждого $\iota \in \mathcal{V}$ существует $\lim\limits_{l \to \infty} (q_l a)^{-1} \sum_{m=0}^{q_l - 1} I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \iota, \varepsilon)$, и, значит (см. (4.9)), аналогичный предел существует и для иголки $\mathfrak{y}\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$.

Далее, из (4.5), (4.9) и (4.12), учитывая (2.9), (2.14), получаем, что для каждого $\vec{\iota} \in \mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, такого (см. (2.7)), что $\beta(\vec{\iota}) > 0$, при $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\iota)]$ выполнено неравенство $|I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon)| \leq$ $\leq |I_-^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon)| + |I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon)| + |I_+^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon)|$, $m \in \mathbb{Z}$, $\mathfrak{l} = 0, \ldots, \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$, где

$$I_-^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon) \doteq \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \int\limits_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t) \sum_{k=0}^{\infty} \Biggl\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{T_{-(k+1),i,j}(\varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota})} P_{1,m}(t,s) \Delta f_m(s, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m - (k+1)))\, ds -$$

$$- \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \beta_{ij}^{\mathfrak{q}} P_{1,m}(t, \vartheta_i - (k+1)a) \Delta f_m(\vartheta_i - (k+1)a, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m - (k+1))) \Biggr\} dt,$$

$$I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon) \doteq$$

$$\doteq \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \int\limits_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t) \Biggl\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{T_{0,i,j}(\varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota})} \mathcal{G}_m(t,s) \Delta f_m(s, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))\, ds - \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \beta_{ij} \mathcal{G}_m(t, \vartheta_i) \Delta f_m(\vartheta_i, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m)) \Biggr\} dt,$$

$$I_+^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon) \doteq - \sum_{i=1}^{N} \sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}} \int\limits_0^a \psi_{\mathfrak{l},m}(t) \sum_{k=1}^{\infty} \Biggl\{ \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{T_{k,i,j}(\varepsilon, \mathfrak{y}\vec{\iota})} P_{2,m}(t,s) \Delta f_m(s, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))\, ds -$$

$$- \mathfrak{y}_{\mathfrak{q}} \beta_{ij}^{\mathfrak{q}} P_{2,m}(t, \vartheta_i + ka) \Delta f_m(\vartheta_i + ka, \nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k)) \Biggr\} dt \quad (P_{l,m}(\cdot,\cdot) \doteq P_l(\cdot + ma, \cdot + ma), \quad l = 1, 2).$$

Теперь, используя определение слагаемых в правой части указанного неравенства для $|I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon)|$, покажем, внеся соответствующие изменения в схему доказательства леммы 6.1 из [6], что при $\varepsilon_p \doteq \eta_p / \rho\beta(\vec{\iota})$, $p \in \mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\lim_{p \to \infty} \left(\sup_{\mathfrak{y} \in \Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}} \left| \lim_{l \to \infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l - 1} I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta}, \mathfrak{y}\vec{\iota}, \varepsilon_p) \right| \right) = 0, \quad \mathfrak{l} = 0, \ldots, \mathfrak{k} + \mathfrak{m}. \tag{4.13}$$

В самом деле, определяя $J_+(\varepsilon,\vartheta_i)$, как и в доказательстве леммы 6.1 из [6], с заменой $\varepsilon\beta(\iota)$ на $\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})$ и учитывая, что (см. (2.11), (2.12)) $\operatorname{mes}(\bigcup_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathbb{T}_{m,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}},\vec{\iota}))\le\varepsilon\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\mathfrak{y}_{\mathfrak{q}}|\beta_{ij}^{\mathfrak{q}}|\le\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})$, имеем следующие соотношения:

$$|I_+^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})|\le\mathfrak{d}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\int_0^a\sum_{k=1}^{\infty}\bigg\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{T_{k,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})}|P_{2,m}(t,s)\Delta f_m(s,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))-$$

$$-P_{2,m}(t,\vartheta_i+ka)\Delta f_m(\vartheta_i+ka,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m+k))|\,ds\bigg\}dt\le 2\mathfrak{d}^2\sum_{i=1}^{N}k_i\,J_+(\varepsilon,\vartheta_i)+$$

$$+\mathfrak{r}\,\mathfrak{d}\,a\,e^a\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-ka\sigma}}{\varepsilon}\int_{T_{k,i,j}(\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})}|\Delta f_{m+k}(s+\vartheta_i,\nu_{ij}(m+k))-\Delta f_{m+k}(\vartheta_i,\nu_{ij}(m+k))|\,ds\le$$

$$\le 2\mathfrak{d}^2\sum_{i=1}^{N}k_i\,J_+(\varepsilon,\vartheta_i)+\mathfrak{r}\,\mathfrak{d}\,a\,e^a\sum_{i=1}^{N}\frac{e^{-ka\sigma}}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon\rho\beta(\vec{\iota})}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta f_{m+k}(s+\vartheta_i,\nu)-\Delta f_{m+k}(\vartheta_i,\nu)|\,ds.$$

Так как (см. [6]) $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}J_+(\varepsilon,\vartheta_i)=0$, то из полученных выше соотношений при $\varepsilon=\varepsilon_p$ в силу (4.4) вытекает, что $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\lim\limits_{l\to\infty}(q_la)^{-1}\sum_{m=0}^{q_l-1}I_+^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota},\varepsilon_p)|\big)=0$. Точно так же, внеся соответствующие изменения в схему доказательства леммы 6.1 работы [6], получим аналогичные предельные равенства для $I_-^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota},\varepsilon_p)$ и $I_0^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota},\varepsilon_p)$, из которых вытекает равенство (4.13).

Теперь из соотношений

$$\left|M\left\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)\frac{\Delta x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})}{\varepsilon_p}\right\}-\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})\right|\le$$

$$\le\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\int_{ma}^{(m+1)a}|\psi_{\mathfrak{l}}(t)|\left|\frac{\Delta x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})}{\varepsilon_p}-\frac{1}{\varepsilon_p}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(t,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),\widehat{f}(s,u)\rangle\,ds\right|dt+$$

$$+\left|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota},\varepsilon_p)\right|\overset{(4.2)}{\le}$$

$$\overset{(4.2)}{\le}\mathfrak{d}\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\left\|\frac{\Delta x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})}{\varepsilon_p}-\frac{1}{\varepsilon_p}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{G}(\cdot,s)\langle\Delta\mu(s;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),\widehat{f}(s,u)\rangle\,ds\right\|_C+$$

$$+\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\left|\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}I^{(m,\mathfrak{l})}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota},\varepsilon_p)\right|$$

в силу леммы 3.1 при $\varepsilon_p\doteq\eta_p/\rho\beta(\vec{\iota})$, $p\in\mathbb{N}$, и (4.13) получаем предельное равенство (4.10). Поскольку

$$\left|\frac{1}{\varepsilon_p}M\{\langle\Delta\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),\widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}-\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})\right|\overset{(2.14),(4.8)}{\le}$$

$$\overset{(2.14),(4.8)}{\le}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\mathfrak{q}=1}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\sum_{j=1}^{k_i^{\mathfrak{q}}}\frac{1}{\varepsilon_p}\int_{T_{0,i,j}(\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})}|\Delta f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))-\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu_{ij}^{\mathfrak{q}}(m))|\,dt\overset{(2.7)-(2.11)}{\le}$$

$$\overset{(2.7)-(2.11)}{\leq} \rho\beta(\vec{\iota})\sum_{i=1}^{N}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_l a}\sum_{m=0}^{q_l-1}\frac{1}{\eta_p}\int\limits_0^{\eta_p}\sup_{\nu\in\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})}|\Delta f_{\mathfrak{l},m}(t+\vartheta_i,\nu)-\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta_i,\nu)|\,dt,$$

то из (4.3) получаем (4.11).

Обозначим далее (см. (4.1), (4.7) и (4.8)) для каждого $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$

$$y_{\mathfrak{l}}(t;h(\cdot)) \doteq \langle\widehat{\mu}(t), f'_{\mathfrak{l}v}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t), \quad t\in\mathbb{R}, \quad h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}, \tag{4.14}$$

$$\begin{gathered}\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)) \doteq -\mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)-\mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota)+M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t;h(\cdot)\}+M\{y_{\mathfrak{l}}(t;h(\cdot))\},\\ \iota\in\mathcal{V}, \quad h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}.\end{gathered} \tag{4.15}$$

Из (2.3), (2.4) вытекает линейность отображения $(\iota,h(\cdot))\mapsto\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))$, $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times B(\mathbb{R},\mathbb{R}^k)$. Следовательно, полагая

$$\mathcal{K}(\vec{\vartheta}) \doteq \{(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))),\ (\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\}\subset\mathbb{R}^{1+\mathfrak{l}+\mathfrak{m}} \tag{4.16}$$

и учитывая, что $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\subset\mathbb{R}^k$ – выпуклый конус с вершиной в нуле и для каждой иголки вида $\iota_0\doteq\{(\vec{0}_{k_i},\{\vec{\nu}_{k_i}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})\}_{i=1}^N$ точка $(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota_0,0),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota_0,0))$ – нуль пространства $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, заключаем, что $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ – выпуклый конус с вершиной в нуле.

5. Свойства конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$. Непосредственному доказательству необходимых свойств конуса вариаций $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающего допустимому набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ системы (1.2), предпошлем одно свойство компонент $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))$ (см. (4.15)), входящих в его определение. Для этого зафиксируем $\vec{\iota}\in\mathcal{V}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ такое, что $\beta(\vec{\iota})>0$, и для пары $(\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ рассмотрим последовательность (см. определение 2.3 и (2.16)) $\{(w(\cdot,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ ее п.п. вариаций, отвечающую $h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}})\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, и последовательности $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}$ из леммы 4.1. Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p=0$, то без ограничения общности можно считать, что $\{\varepsilon_p\}_{p=1}^{\infty}\subset(0,\varepsilon(\rho,\vec{\iota})]$. Кроме того, в дальнейшем не оговаривая, для последовательности $\{(w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}))\}_{p=1}^{\infty}\subset\mathfrak{S}\times\mathrm{APM}_1$ рассматриваем последовательность

$$\{(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}))\}_{p\geq\widehat{p}_2}\subset\mathfrak{D}_c \tag{5.1}$$

п.п. вариаций для $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in D_c$ со свойствами, указанными в п. 3 из [1] и в п. 4 данной работы.

Лемма 5.1. *При каждом* $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$

$$\begin{gathered}|\varepsilon_p^{-1}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}},\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}))-\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))-\\ -\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota},h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}))|\underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows}0 \quad \text{при} \quad p\to\infty.\end{gathered} \tag{5.2}$$

Доказательство. В силу (1.3) при всех $p\geq\widehat{p}_2$, $\vec{\mathfrak{y}}\in\tilde{\Pi}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ и каждом $\mathfrak{l}=0,\ldots,\mathfrak{k}+\mathfrak{m}$ справедливо равенство $\varepsilon_p^{-1}(\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(x(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}},\vec{\iota}),w(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),\mu(\cdot;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}))-\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))=\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}})+$ $+\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}})$, где

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq M\{\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),f_{\mathfrak{l}}(t,x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)-\widehat{f_{\mathfrak{l}}}(t,u)\rangle\},$$

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq M\{\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),f_{\mathfrak{l}}(t,x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),w(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}),u)-f_{\mathfrak{l}}(t,x(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)\rangle\}.$$

В свою очередь (здесь см. обозначения в (3.4), (4.1))

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}})=-\varepsilon_p^{-1}M\{\langle\Delta\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota}),\hat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\}-\varepsilon_p^{-1}M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)\Delta x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\vec{\iota})\}+\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}),$$

где
$$\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}) \doteq -\varepsilon_p^{-1}M\{\langle\Delta\mu(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), f_{\mathfrak{l}}(t,x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u) - \widehat{f}_{\mathfrak{l}}(t,u)\rangle\} -$$
$$-\varepsilon_p^{-1}M\left\{\left\langle\widehat{\mu}(t),\int\limits_0^1(f'_{\mathfrak{l}x}(t,\hat{x}(t)-\theta\Delta x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\widehat{v}(t),u)-\widehat{f}'_{\mathfrak{l}x}(t,u))\,d\theta\right\rangle\Delta x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\right\}.$$

Так как (см. (3.9), (2.7), (2.14) и обозначение (3.1) при $g=f'_{\mathfrak{l}x}$ и $g=f$)
$$|\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}})| \le a\varkappa\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}\omega_{\xi(p)}(s;f'_{\mathfrak{l}x})\,ds + 2\rho\beta(\vec{\iota})\sup_{t\in\mathbb{R}}\omega_{\xi(p)}(t;f_{\mathfrak{l}}),\quad \xi(\varepsilon)\doteq\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}\|\Delta x(\cdot;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})\|_C,$$

то из ограничений на f в силу леммы 1.1 с учетом (3.4), получаем, что
$$\lim_{p\to\infty}\big(\sup_{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}|\mathbb{I}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}})|\big)=0$$

и, значит, $|\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(1)}(p,\vec{\mathfrak{y}}) + \mathfrak{b}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) + \mathfrak{c}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}) - M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t;h(\cdot,\vec{\mathfrak{y}}))\}| \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} 0$ при $p\to\infty$. Так как (см. обозначение в (3.13))
$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}) = M\left\{\left\langle\mu(t;\varepsilon,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),\int\limits_0^1 f'_{\mathfrak{l}v}(t,x(t;\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}),w(t,\varepsilon_p,\theta,\vec{\mathfrak{y}}),u)\,d\theta\right\rangle\zeta(t,\varepsilon_p,\vec{\mathfrak{y}})\right\},$$

то (см. лемму 2.3 и схему доказательства равенства (3.14)) получим, что
$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}^{(2)}(p,\vec{\mathfrak{y}}) \underset{\vec{\mathfrak{y}}\in\Pi^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}}{\rightrightarrows} M\{\langle\widehat{\mu}(t),f'_{\mathfrak{l}v}(t,\widehat{x}(t),\widehat{v}(t),u)\rangle h(t)\}$$

при $p\to\infty$. Из последних двух предельных соотношений, учитывая (4.14), получаем (5.2).

Доказанные утверждения в силу замечания 2.2 справедливы для всякого фиксированного набора $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ точек $\vartheta_i\in\Xi$, $i=1,\ldots,N$, допускающих совпадение. Поэтому в дальнейшем при ссылке на соответствующий результат предполагается, что в зафиксированном наборе $\vec{\vartheta}=(\vartheta_i)_{i=1}^N$ точки (см. теорему 4.1) $\vartheta_i\in\Xi$, $i=1,\ldots,N$, такие, что $0\le\vartheta_1\le\ldots\le\vartheta_N<a$.

Введем в рассмотрение проектор $P:\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, определенный для каждой точки конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$ (см. (4.16)) равенством
$$P(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))) \doteq (\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))),$$

и выпуклый конус $\mathcal{H}\doteq\{(x_0,\ldots,x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}):x_0,\ldots,x_{\mathfrak{k}}<0,\ x_{\mathfrak{k}+1}=\ldots=x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}=0\}\subset\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$.

Следующая теорема отражает основное свойство конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, отвечающего допустимому набору $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ задачи (1.4), такого, что $\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $\mathfrak{l}=1,\ldots,\mathfrak{k}$.

Теорема 5.1. *Пусть п.п. по Степанову система уравнений (1.9), отвечающая допустимому набору* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot)\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ *задачи (1.4), допускает э.д. Тогда если* $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\cap\mathcal{H}\ne\emptyset$ *и* $P(\mathcal{K}(\vec{\vartheta}))=\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, *то найдется такой допустимый набор* $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{D}$ *задачи (1.6), что* $I_0(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{T}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Доказательство. Для простоты обозначений считаем $\mathfrak{k}=\mathfrak{m}=1$ и полагаем $\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\iota,h(\cdot))\doteq$ $\doteq\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))$ для всех $(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, $\mathcal{K}\doteq\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$.

Рассуждая, как и при доказательстве теоремы 7.1 из [7], и используя условия $\mathcal{K}\cap\mathcal{H}\ne\emptyset$, $P(\mathcal{K})=\mathbb{R}$, получаем, что найдутся такие $\varsigma'=(\iota',h'(\cdot))$, $\varsigma''=(\iota'',h''(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и константы $\rho',\rho'',\gamma>0$, что
$$\mathfrak{a}_0(\varsigma'),\ \mathfrak{a}_1(\varsigma')\le-\gamma/2,\quad \rho'\mathfrak{a}_2(\varsigma')=-1,\quad \mathfrak{a}_0(\varsigma''),\ \mathfrak{a}_1(\varsigma'')\le-\gamma/2,\quad \rho''\mathfrak{a}_2(\varsigma'')=1. \tag{5.3}$$

Теперь рассмотрим иголку $\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'') \in \mathcal{V}^2$, по $\rho', \rho'' \in [0, \rho]$, $\rho \doteq \max(\rho', \rho'')$, определим (см. (2.15), (2.16)) функцию $\vec{\lambda} \mapsto \mathfrak{g}(\vec{\lambda}) \doteq (\lambda_1\rho', \lambda_2\rho'')$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$, и зададим отображение

$$\vec{\mathfrak{y}} \mapsto h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \doteq \lambda_1\rho' h'(\cdot) + \lambda_2\rho'' h''(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}, \quad \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^2 \doteq \mathfrak{g}(\Lambda^2) \subset \Pi^2 \doteq [0, \rho] \times [0, \rho]. \tag{5.4}$$

В дальнейшем в последовательности (5.1) п.п. вариаций для $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{D}_c \subset D_c$ считаем, что $\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'')$, последовательность $\{w(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}})\}_{p \geq \widehat{p}_2} \subset \mathfrak{S}$, определенная равенством (2.19), отвечает $h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, где $\vec{\mathfrak{y}}$ принадлежит множеству $\tilde{\Pi}^2$, заданному равенством (5.4).

Рассмотрим далее последовательность отображений

$$\vec{\mathfrak{y}} \mapsto \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}), \quad \vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^2, \quad p \in \{0, \widehat{p}_2, \widehat{p}_2 + 1, \ldots\},$$

где

$$\varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}) \doteq \begin{cases} \varepsilon_p^{-1}\mathfrak{T}_2(x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}), w(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}), \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota})), & p \geq \widehat{p}_2, \\ \mathfrak{a}_2(\vec{\mathfrak{y}}\,\vec{\iota}, h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}})), & p = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

а также гомеоморфное отображение $\mathfrak{f} : \Lambda^2 \to [-1, 1]$, $\mathfrak{f}(\vec{\lambda}) \doteq \lambda_2 - \lambda_1$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$, для которого в силу (5.3) $\mathfrak{f}(\vec{\lambda}) = \mathfrak{a}_2(\lambda_1\rho'\,\iota' + \lambda_2\rho''\,\iota'')$, $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$. Поскольку $\mathfrak{f}$ – гомеоморфизм, то определено также непрерывное отображение $\alpha \mapsto \mathfrak{f}^{-1}(\alpha) = \vec{\lambda}(\alpha) \doteq (\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)) \in \Lambda^2$, $\alpha \in [-1, 1]$, которое в свою очередь порождает непрерывную функцию

$$\alpha \mapsto \vec{\mathfrak{y}}(\alpha) = (\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f}^{-1})(\alpha) \doteq (\lambda_1(\alpha)\rho', \lambda_2(\alpha)\rho'') \in \tilde{\Pi}^2, \quad \alpha \in [-1, 1]. \tag{5.6}$$

Следовательно, при каждом $p \in \{0, \widehat{p}_2, \widehat{p}_2 + 1, \ldots\}$ определено отображение $\alpha \mapsto \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))$. Так как по лемме 5.1 $|\varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}) - \varphi_0(\vec{\mathfrak{y}})| \to 0$ при $p \to \infty$ равномерно по $\vec{\mathfrak{y}} \in \tilde{\Pi}^2$, то (см. (5.5), (5.6))

$$\alpha - \varphi_0(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)) = 0, \quad \alpha \in [-1, 1], \quad |\alpha - \varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))| \underset{\alpha \in [-1,1]}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty. \tag{5.7}$$

Теперь для краткости записи введем при $p \in \{0, \widehat{p}_2, \widehat{p}_2 + 1, \ldots\}$ и $\alpha \in [-1, 1]$ следующие обозначения (см. (5.6) и (2.6) для $\vec{\iota} \doteq (\iota', \iota'')$ и $\vec{\mathfrak{y}} \doteq \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)$):

$$\mathfrak{x}_0(\cdot, \alpha) \doteq \widehat{x}(\cdot), \quad \nu_0(\cdot, \alpha) \doteq \widehat{\mu}(\cdot),$$

$$\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha) \doteq x(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota}), \quad \nu_p(\cdot, \alpha) \doteq \mu(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota}), \quad p \geq \widehat{p}_2, \tag{5.8}$$

$$h(\cdot, \alpha) \doteq h(\cdot, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)) \overset{(5.4),(5.6)}{=} \lambda_1(\alpha)\rho' h'(\cdot) + \lambda_2(\alpha)\rho'' h''(\cdot), \quad w_p(\cdot, \alpha) \doteq w(\cdot; \varepsilon_p, \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)).$$

Таким образом, имеем совокупность $\{(\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha), w_p(\cdot, \alpha), \nu_p(\cdot, \alpha)),\ \alpha \in [-1, 1],\ p = 0, \widehat{p}_2, \ldots\}$ допустимых наборов системы (1.2), в которой $\nu_p \in S(\mathbb{R} \times [-1, 1], \mathbb{R})$, последовательность $\{w_p(\cdot, \alpha)\}_{p=\widehat{p}_2}^{\infty} \subset \mathfrak{S}$, отвечающая при каждом $\alpha \in [-1, 1]$ вектору $h(\cdot, \alpha) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, такова (см. (5.8) и (2.24)), что

$$\lim_{p \to \infty} \xi_1(p) = 0, \quad \xi_1(p) \doteq \sup_{\alpha \in [-1,1]} \|w_p(\cdot, \alpha) - \widehat{v}(\cdot)\|_C, \tag{5.9}$$

$\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha)$ – п.п. по Бору решение системы $\dot{x} = \langle \nu_p(t, \alpha), f(t, x, w_p(t, \alpha), u) \rangle$ такое, что

$$\overline{\mathrm{orb}}(\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha) - \widehat{x}(\cdot)) \subset O_r[0],$$

где $r > 0$ такое, что отвечающий ему компакт $K_r \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset G$ и

$$\lim_{p \to \infty} \xi_2(p) = 0, \quad \xi_2(p) \doteq \sup_{\alpha \in [-1,1]} \|\mathfrak{x}_p(\cdot, \alpha) - \widehat{x}(\cdot)\|_C. \tag{5.10}$$

Кроме того, учитывая принятые обозначения (5.8) и (5.4), непрерывность функции $\alpha \mapsto \vec{\mathfrak{y}}(\alpha)$ (см. (5.6)), по лемме 2.3 и последнему утверждению теоремы 2.1 получаем следующие равенства:

$$\begin{gathered}\lim_{\gamma\downarrow 0}\Bigg(\sup_{\substack{(p,\alpha_l)\in\mathbb{N}\times[-1,1]\\ l=1,2,\ |\alpha_1-\alpha_2|\le\gamma}}\Bigg(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}|\nu_p(s,\alpha_1)-\nu_p(s,\alpha_2)|(\mathfrak{U})\,ds\Bigg)\Bigg)=0,\\ \lim_{\gamma\downarrow 0}\mathfrak{w}_\gamma=0,\quad \mathfrak{w}_\gamma\doteq\sup_{\substack{(p,\alpha_l)\in\mathbb{N}\times[-1,1]\\ l=1,2,\ |\alpha_1-\alpha_2|\le\gamma}}\|w_p(\cdot,\alpha_1)-w_p(\cdot,\alpha_2)\|_C.\end{gathered}\tag{5.11}$$

Отсюда в свою очередь, следуя схеме доказательства теоремы 2.2 работы [8], убеждаемся в том, что последовательность отображений $(t,\alpha)\mapsto\mathfrak{x}_p(t,\alpha)$, $p\ge\widehat{p}_2$, принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathbb{R})$.

Покажем, что

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\sup_{\alpha\in[-1,1]}I(p,\alpha)\Big)=0,$$

$$I(p,\alpha)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+a}|\langle\nu_p(s,\alpha),f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),w_p(s,\alpha),u)\rangle-\langle\widehat{\mu}(s),f'_x(s,u)\rangle|\,ds.$$

Действительно, при каждом $p\ge\widehat{p}_2$ и любом $\alpha\in[-1,1]$ имеет место неравенство $I(p,\alpha)\le$ $\le I_1(p,\alpha)+I_2(p,\alpha)$, где

$$I_1(p,\alpha)\doteq\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+a}|\langle\nu_p(s,\alpha),f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),w_p(s,\alpha),u)-f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),\widehat{v}(s),u)\rangle|\,ds,$$

$$I_2(p,\alpha)\doteq 2\sup_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_{ma}^{(m+1)a}|\langle\nu_p(s,\alpha),f'_x(s,\mathfrak{x}_p(s,\alpha),\widehat{v}(s)u)\rangle-\langle\widehat{\mu}(s),f'_x(s,u)\rangle|\,ds.$$

Из неравенства (см. обозначение в (5.9) и (3.2) при $g=f'_x$) $I_1(p,\alpha)\le\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+a}\omega^{(1)}_{\xi_1(p)}(s,f'_x)\,ds$, леммы 1.2 и равенства в (5.9) получаем, что $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\alpha\in[-1,1]}I_1(p,\alpha)\big)=0$. Далее, из определений иголки $\vec{\iota}\doteq(\iota',\iota'')$ и отображения $\nu_p(\cdot,\alpha)$ (см. (5.10) и (2.14)) вытекает, что

$$I_2(p,\alpha)\le\varepsilon_p\,4\rho\mathfrak{d}\sum_{i=1}^N(|\vec{\beta}'_{k'_i}|+|\vec{\beta}''_{k''_i}|)+2\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+a}\omega^{(2)}_{\xi_2(p)}(s,f'_x)\,ds.$$

Снова из леммы 1.2 и равенства в (5.10) следует, что $\lim\limits_{p\to\infty}\big(\sup\limits_{\alpha\in[-1,1]}I_2(p,\alpha)\big)=0$. Из последних двух предельных равенств получаем нужное нам предельное равенство, из которого в свою очередь в силу э.д. системы (1.9) и свойства устойчивости э.д. к малым возмущениям [9] вытекает существование такого $\widehat{p}_3\ge\widehat{p}_2$, что при всех $p\ge\widehat{p}_3$ и $\alpha\in[-1,1]$ п.п. по Степанову система уравнений $\dot{y}=\langle\nu_p(t,\alpha),f'_x(t,\mathfrak{x}_p(t,\alpha),w_p(t,\alpha),u)\rangle y$, $(t,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, будет э.д., причем существуют такие положительные числа $\tilde{\mathfrak{r}},\tilde{\sigma}$, что для функции Грина $\mathcal{G}(t,s;p,\alpha)$ этой системы будет выполняться неравенство $|\mathcal{G}(t,s;p,\alpha)|\le\tilde{\mathfrak{r}}e^{-\tilde{\sigma}|t-s|}$ при всех $t,s\in\mathbb{R}$ и $p\ge\widehat{p}_3$, $\alpha\in[-1,1]$.

Указанные выше свойства рассматриваемого множества допустимых наборов системы (1.2) в силу теоремы 2.1 [10] позволяют утверждать, что если для $\nu_p\in S(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ $(p\ge\widehat{p}_3)$ рассмотреть [3, 11] аппроксимирующую его последовательность $\{u_{pj}\}_{j=1}^\infty\subset S(\mathbb{R}\times[-1,1],\mathfrak{U})$, то найдется такое $j_1=j_1(p)\in\mathbb{N}$, что для п.п. по Степанову системы $\dot{x}=f(t,x,w_p(t,\alpha),u_{pj}(t,\alpha))$,

$(t,x)\in\mathbb{R}\times G$, существует множество допустимых наборов $\{(x_{pj}(\cdot,\alpha),w_p(t,\alpha),u_{pj}(\cdot,\alpha)),\ j\geq\hat{j},$ $\alpha\in[-1,1]\}$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{j\to\infty}\xi_3(pj)=0,\quad \xi_3(pj)\doteq\sup_{\alpha\in[-1,1]}\|\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha)-x_{pj}(\cdot,\alpha)\|_C, \tag{5.12}$$

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{\alpha\in[-1,1]}\|\nu_p(\cdot,\alpha)-\delta_{u_{pj}(\cdot,\alpha)}\|_w\big)=0, \tag{5.13}$$

причем для всех $\alpha\in[-1,1]$ замыкание орбиты п.п. по Бору отображения $t\mapsto\mathfrak{x}_p(t,\alpha)-x_{pj}(t,\alpha)$ содержится в $O_{r_1}[0]$ и компакт $\mathbb{K}_{\widehat{r}}\doteq K_r+O_{r_1}[0]\subset G$;

$$\lim_{\gamma\downarrow 0}(\mathfrak{m}_\gamma[u_{pj},[-1,1]])=0,$$
$$\mathfrak{m}_\gamma[u_{pj},[-1,1]]\doteq\sup_{\substack{\alpha_l\in[-1,1],\ l=1,2\\|\alpha_1-\alpha_2|\leq\gamma}}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}|\delta_{u_{pj}(s,\alpha_1)}-\delta_{u_{pj}(s,\alpha_2)}|(\mathfrak{U})\,ds\right), \tag{5.14}$$

и, наконец, для любой функции $g\in S(\mathbb{R},C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n))$

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{\alpha\in[-1,1]}|M\{\langle\nu_p(t,\alpha)-\delta_{u_{pj}(t,\alpha)},g(t,u)\rangle\}|\big)=0. \tag{5.15}$$

Укажем сейчас индексы $\mathfrak{p}\geq\widehat{p}_3$ и $j\geq j_1(\mathfrak{p})$, для которых найдется $\alpha_{\mathfrak{p}j}\in[-1,1]$ такое, что набор $(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha),w_{\mathfrak{p}}(t,\alpha_{\mathfrak{p}j}),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha))\in\mathfrak{D}$ и обладает свойством, указанным в теореме 5.1. С этой целью сначала для $\mathfrak{l}=0,1$ при $p\geq\widehat{p}_3$ и $j\geq j_1(p)$ рассмотрим (см. обозначения (4.15), (5.6) и (5.8))

$$y_p(\alpha)\doteq\left|\frac{1}{\varepsilon_p}(\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha),w_p(\cdot,\alpha),\nu_p(\cdot,\alpha))-\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))-\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha))\right|+$$
$$+\,\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha)). \tag{5.16}$$

В силу (5.2) $\varepsilon_p^{-1}(\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha),w_p(\cdot,\alpha),\nu_p(\cdot,\alpha))-\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)))\underset{\alpha\in[-1,1]}{\rightrightarrows}\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha))$ при $p\to\infty$. Поэтому, учитывая (5.7) и неравенство

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha)\,\vec{\iota},h(\cdot,\alpha))\overset{(5.3)}{=}\lambda_1(\alpha)\rho'\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\varsigma')+\lambda_2(\alpha)\rho''\mathfrak{a}_\mathfrak{l}(\varsigma'')\leq-(\gamma/2)\min(\rho',\rho''),$$

получаем существование такого $\widehat{p}_4\geq\widehat{p}_3$, что для каждого $\mathfrak{p}\geq\widehat{p}_4$ будут выполнены неравенства

$$\sup_{\alpha\in[-1,1]}y_p(\alpha)\leq-\frac{\gamma}{4}\min(\rho',\rho''),\qquad\sup_{\alpha\in[-1,1]}|\alpha-\varphi_p(\vec{\mathfrak{y}}(\alpha))|\leq\frac{1}{2}. \tag{5.17}$$

Покажем также, что при каждом $\mathfrak{p}\geq\widehat{p}_4$

$$\lim_{j\to\infty}\big(\sup_{\alpha\in[-1,1]}|\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha),w_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha),\nu_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha))-I_\mathfrak{l}(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha),w_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha))|\big)=0. \tag{5.18}$$

Допустим противное. Тогда найдутся константа $\gamma>0$, последовательности $\{j_i\}_{i=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty\subset[-1,1]$, $\lim\limits_{i\to\infty}\alpha_i=\widehat{\alpha}\in[-1,1]$, такие, что при каждом $i\in\mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $z_i\doteq|\mathfrak{T}_\mathfrak{l}(\mathfrak{x}_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha_i),w_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha_i),\nu_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha_i))-I_\mathfrak{l}(x_{\mathfrak{p}j_i}(\cdot,\alpha_i),w_\mathfrak{p}(\cdot,\alpha_i),u_{\mathfrak{p}j_i}(\cdot,\alpha_i))|\geq\gamma$. С другой стороны, при всех $i\in\mathbb{N}$

$$z_i\leq|M\{\langle\nu_\mathfrak{p}(t,\alpha_i)-\delta_{u_{\mathfrak{p}j_i}(t,\alpha_i)},f_\mathfrak{l}(t,\mathfrak{x}_\mathfrak{p}(t,\alpha_i),w_\mathfrak{p}(t,\alpha_i),u)\rangle\}|+$$
$$+\,|M\{f_\mathfrak{l}(t,\mathfrak{x}_\mathfrak{p}(t,\alpha_i),w_\mathfrak{p}(t,\alpha_i),u)-f_\mathfrak{l}(t,\mathfrak{x}_\mathfrak{p}(t,\alpha_i),w_\mathfrak{p}(t,\alpha_i),u_{\mathfrak{p}j_i}(t,\alpha_i))\}|\leq$$

$$\leq |M\{\langle\nu_{\mathfrak{p}}(t,\alpha_i) - \delta_{u_{\mathfrak{p}j_i}(t,\alpha_i)}, f_{\mathfrak{l}}(t, \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), w_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), u)\rangle\}| +$$

$$+ |M\{\langle\nu_{\mathfrak{p}}(t,\alpha_i) - \delta_{u_{\mathfrak{p}j_i}(t,\alpha_i)}, f_{\mathfrak{l}}(t,\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(t,\alpha_i), w_{\mathfrak{p}}(t,\alpha_i), u) - f_{\mathfrak{l}}(t,\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), w_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), u)\rangle\}| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \omega^{(1)}_{\zeta_1(i)}(t, f_{\mathfrak{l}}) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha\in[-1,1]} |M\{\langle\nu_{\mathfrak{p}}(t,\alpha) - \delta_{u_{\mathfrak{p}j_i}(t,\alpha)}, f_{\mathfrak{l}}(t,\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), w_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), u)\rangle\}| +$$

$$+ 2\sup_{t\in\mathbb{R}} \omega^{(1)}_{\zeta_1(i)}(t, f_{\mathfrak{l}}) + \sup_{t\in\mathbb{R}} \omega^{(1)}_{\zeta_2(i)}(t, f_{\mathfrak{l}}) + \sup_{t\in\mathbb{R}} \omega^{(2)}_{\zeta_3(i)}(t, f_{\mathfrak{l}}),$$

где (см. (5.12)) $\zeta_1(i) = \xi_3(\mathfrak{p}j_i)$, $\zeta_2(i) \doteq \|\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha_i) - \mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(\cdot,\widehat{\alpha})\|_C$, $\zeta_3(i) \doteq \|w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha_i) - w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\widehat{\alpha})\|_C$, а $w^{(1)}_{\gamma}(\cdot, f_{\mathfrak{l}})$, $w^{(2)}_{\gamma}(\cdot, f_{\mathfrak{l}})$ $(\gamma > 0)$ определены равенствами (3.1) и (3.2) соответственно при $g = f_{\mathfrak{l}}$, $K_r = \mathbb{K}_{\widehat{r}}$ и V, заданном равенством (2.17) при $\varrho \doteq \rho'\|h'(\cdot)\|_C + \rho''\|h''(\cdot)\|_C + 1$. Теперь, учитывая равенства (5.12), (5.11) и (5.15) при $g(t,u) \doteq f_{\mathfrak{l}}(t,\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), w_{\mathfrak{p}}(t,\widehat{\alpha}), u)$, включения $\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}} \in \in B(\mathbb{R}\times[-1,1], \mathbb{K}_r)$ и $f_{\mathfrak{l}} \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{K}_r\times V\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, получаем [12], что $z_i \downarrow 0$ при $i\to\infty$, а это противоречит сделанному предположению $z_i \geq \gamma$, $i\in\mathbb{N}$.

Далее, для всех $j \geq j_1(\mathfrak{p})$ при $\mathfrak{l} = 0, 1$ имеем

$$\varepsilon_p^{-1}(I_{\mathfrak{l}}(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha)) - \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))) \leq$$

$$\leq \varepsilon_p^{-1} \sup_{\alpha\in[-1,1]} |I_{\mathfrak{l}}(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), u_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha)) - \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), \nu_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha))| + y_{\mathfrak{p}}(\alpha),$$

где $y_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ задается равенством (5.16) при $p = \mathfrak{p}$. В свою очередь из (5.18) вытекает существование такого $j_2(\mathfrak{p}) \geq j_1(\mathfrak{p})$, что при всех $j \geq j_2(p)$ будет выполнено неравенство $\sup_{\alpha\in[-1,1]} |I_{\mathfrak{l}}(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha)) - \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\mathfrak{x}_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), \nu_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha))| \leq (\gamma\varepsilon_{\mathfrak{p}}/8)\min(\rho',\rho'')$. Отсюда с учетом (5.17) получаем, что при каждом $\mathfrak{p} \geq \widehat{p}_4$ и $j \geq j_2(\mathfrak{p})$ и всяком $\alpha \in [-1,1]$ будет выполняться неравенство

$$I_{\mathfrak{l}}(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha)) \leq \mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - (\varepsilon_{\mathfrak{p}}\gamma/8)\min(\rho',\rho''). \tag{5.19}$$

На $[-1,1]$ зададим функцию $\alpha \mapsto \Phi_{pj}(\alpha) \doteq \alpha - \varepsilon_p^{-1} I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot;\varepsilon_p,\alpha))$. Поскольку при каждом $\alpha\in[-1,1]$ имеет место неравенство $|\Phi_{pj}(\alpha)| \overset{(5.7)}{\leq} \sup_{\alpha\in[-1,1]} |\alpha - \varphi_p(\mathfrak{y}(\alpha))| + + \varepsilon_p^{-1} \sup_{\alpha\in[-1,1]} |\mathfrak{T}_2(\mathfrak{x}_p(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), \nu_p(\cdot,\alpha)) - I_2(x_{pj}(\cdot,\alpha), w_p(\cdot,\alpha), u_{pj}(\cdot;\varepsilon_p,\alpha))|$, то в силу (5.17) и (5.18) найдется такое $j_3(\mathfrak{p}) \geq j_2(\mathfrak{p})$, что при всех $j \geq j_3(\mathfrak{p})$ будет выполнено включение $\Phi_{\mathfrak{p}j}([-1,1]) \subset [-1,1]$.

Покажем, что $\Phi_{\mathfrak{p}j} \in C([-1,1],[-1,1])$. В самом деле, поскольку $f_2 \in B(\mathbb{R}\times\mathbb{K}_{\widehat{r}}\times V\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, то для заданного $\varkappa > 0$ найдется такое $\gamma > 0$, что $\sup_{t\in\mathbb{R}} \omega^{(l)}_{\gamma}(t, f_2) < \varkappa\varepsilon_{\mathfrak{p}}/4$, $l = 1, 2$. Далее в силу равенств (5.11), как и в теоремах 2.2 и 6.1 в [10], принятых обозначений получаем, что отображение $(t,\alpha) \mapsto x_{\mathfrak{p}j}(t,\alpha)$ принадлежит $B(\mathbb{R}\times[-1,1], \mathbb{K}_{\widehat{r}})$. Следовательно, найдется такое $\delta_1 > 0$, что $\sup\{\|x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha') - x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha'')\|_C,\ \alpha',\alpha'' \in [-1,1],\ |\alpha'-\alpha''| \leq \delta_1\} \leq \gamma$. В силу второго равенства в (5.11) найдется такое $\delta_2 > 0$, что $\mathfrak{w}_{\delta_2} \leq \gamma$. Наконец, из (5.14) вытекает существование такого $\delta_3 > 0$, при котором $\mathfrak{m}_{\delta_3}[\delta_{u_{\mathfrak{p}j}}, [-1,1]] < \varkappa\varepsilon_{\mathfrak{p}/(4\mathfrak{d})}$, где константа $\mathfrak{d} > 0$ задается равенством (4.2) при $K_r = \mathbb{K}_{\widehat{r}}$. Теперь если положить $\delta \doteq \min(\varkappa/4, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$, то для любых $\alpha',\alpha'' \in [-1,1]$, $|\alpha'-\alpha''| \leq \delta$, будем иметь следующие соотношения:

$$|\Phi_{pj}(\alpha') - \Phi_{pj}(\alpha'')| \leq$$

$$\leq |\alpha'-\alpha''| + \varepsilon_{\mathfrak{p}}^{-1}|I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha'), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha'), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha')) - I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha''), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha'), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha'))| +$$

$$+ \varepsilon_{\mathfrak{p}}^{-1}|I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha''), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha'), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha')) - I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha''), w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha''), u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha'))| +$$

$$+\varepsilon_{\mathfrak{p}}^{-1}|I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha''),w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha''),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha'))-I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha''),w_{\mathfrak{p}}(\cdot,\alpha''),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha''))|\le$$

$$\le\frac{\varkappa}{3}+\frac{1}{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}w_\gamma^{(1)}(t,f_2)+\sup_{t\in\mathbb{R}}w_\gamma^{(2)}(t,f_2)+\mathfrak{d}\sup_{t\in\mathbb{R}}\int\limits_t^{t+1}|\delta_{u_{\mathfrak{p}j}(s,\alpha')}-\delta_{u_{\mathfrak{p}j}(s,\alpha'')}|(\mathfrak{U})\,ds\right)\le$$

$$\le\frac{3\varkappa}{4}+\frac{\mathfrak{d}}{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{m}_{\delta_3}[\delta_{u_{\mathfrak{p}j}},[-1,1]]<\varkappa,$$

т.е. отображение $\alpha\mapsto\Phi_{\mathfrak{p}j}(\alpha)$ равномерно непрерывно на $[-1,1]$, а так как $\Phi_{\mathfrak{p}j}([-1,1])\subset\subset[-1,1]$, то получаем, что, действительно, $\Phi_{\mathfrak{p}j}\in C([-1,1],[-1,1])$ при $j\ge j_2(\mathfrak{p})$. Поэтому по теореме Брауэра [13] для указанных $\mathfrak{p}$ и j существует такая точка $\alpha_{\mathfrak{p}j}\in[-1,1]$, что $\alpha_{\mathfrak{p}j}=\Phi_{\mathfrak{p}j}(\alpha_{\mathfrak{p}j})$, или иначе $I_2(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}),w_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}))=0$. Из этого равенства с учетом неравенства (5.19) и условия $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ получаем, что

$$(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}),w_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}))\in\mathfrak{D}$$

и, кроме того, $\mathfrak{I}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))>I_0(x_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}),w_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}),u_{\mathfrak{p}j}(\cdot,\alpha_{\mathfrak{p}j}))$. Теорема доказана.

Рассмотрим далее случай, когда в задаче (1.4) имеются ограничения в виде строгих неравенств. Тогда выделим индексы $\mathfrak{l}_1,\ldots,\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}$, для которых $\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}_i}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $i=1,\ldots,\mathfrak{k}'$, и в $\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}$ рассмотрим конус

$$\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\doteq\{(\mathfrak{a}_0(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_1}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{k}'}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+1}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot)),\ldots,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta},\iota,h(\cdot))),$$

$$(\iota,h(\cdot))\in\mathcal{V}\times T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\}$$

(свойства которого аналогичны свойствам конуса $\mathcal{K}(\vec{\vartheta})$, определенного равенством (4.16)), проектор $P:\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, задаваемый аналогично проектору $P:\mathcal{K}(\vec{\vartheta})\to\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, и конус $\mathcal{H}'\doteq\{x\in\mathbb{R}^{1+\mathfrak{k}'+\mathfrak{m}}:\ x_0,x_1,\ldots,x_{\mathfrak{k}'}<0,\ x_{\mathfrak{k}+1}=\ldots=x_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}=0\}$.

Следствие 5.1. *Пусть п.п. по Степанову система уравнений (1.9), отвечающая допустимому набору* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$, *является э.д. Тогда если* $P(\mathcal{K}'(\vec{\vartheta}))=\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ *и* $\mathcal{K}'(\vec{\vartheta})\bigcap\mathcal{H}'\ne\emptyset$, *то найдется такой набор* $(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))\in\mathfrak{D}$, *что будет выполнено неравенство* $I_0(x(\cdot),v(\cdot),u(\cdot))<\mathfrak{I}_0(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))$.

Доказательство приведенного утверждения в силу равенств (5.9), (5.10), (5.13) и (5.15) по сути сводится к доказательству теоремы 5.1 (см. доказательство следствия 7.1 в [7]), поэтому мы его здесь опускаем.

Далее для каждой пары $(\vartheta,\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, где $\vartheta\in\Xi$, а $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{APS}$, полагаем

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta,\nu(m))\doteq\int\limits_0^a\psi_{\mathfrak{l},m}(t)\sum_{k=0}^{\infty}\{\mathcal{G}_m(t,\vartheta-(k+1)a)\Delta f_m(\vartheta-(k+1)a,\nu(m-(k+1)))+$$

$$+\mathcal{G}_m(t,\vartheta+ka)\Delta f_m(\vartheta+ka,\nu(m+k))\}\,dt.$$

Теорема 5.2. *Пусть допустимый набор* $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{D}_c$ *является решением задачи (1.4) в ослабленном смысле и система (1.9) допускает э.д. Тогда существуют такие числа* $\widehat{\lambda}_0\ge0$, $\widehat{\lambda}_1,\ldots,\widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *не равные нулю одновременно, что для каждого* $h(\cdot)\in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$, *всякой точки* $\vartheta\in\Xi$ *и любой последовательности* $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{APS}$ *выполнено неравенство (см. обозначения (4.14) и (3.10))*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{q_la}\sum_{m=0}^{q_l-1}\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}(\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta,\nu(m))+\mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta,\nu(m))-M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t,h(\cdot))\}-M\{y_{\mathfrak{l}}(t,h(\cdot))\})\le0 \tag{5.20}$$

и, кроме того, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\ge0$, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}}\mathfrak{I}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot),\widehat{v}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))=0$, $\mathfrak{l}=1,\ldots,\mathfrak{k}$.

Доказательство. Точно так же, как и при доказательстве теоремы 7.2 из [7], используя утверждения теоремы 5.1 и следствия 5.1, показываем сначала, что в условиях теоремы 5.2 для каждого набора $\vec{\vartheta} = (\vartheta_i)_{i=1}^N$ точек $\vartheta_i \in \Xi$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих неравенствам $0 \le \vartheta_1 \le \ldots \le \vartheta_N < a$, существуют такие числа $\lambda_0(\vec{\vartheta}) \ge 0$, $\lambda_1(\vec{\vartheta}), \ldots, \lambda_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(\vec{\vartheta})$, не равные нулю одновременно, что для каждого $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и всякой иголки $\iota \in \mathcal{V}$ будут выполнены соотношения

$$\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\mathfrak{a}_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}, \iota, h(\cdot)) \ge 0, \quad \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta}) \ge 0, \quad \lambda_{\mathfrak{l}}(\vec{\vartheta})\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0, \quad \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}. \tag{5.21}$$

Далее, для всякого $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ и каждой пары $(\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}})$, где $\vartheta \in \Xi$, а $\{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \in \mathbb{APS}$ (в этом случае набор $((\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}), h(\cdot))$ называем допустимым), введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{K}(\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, h(\cdot)) \doteq \Big\{\vec{\lambda} = (\lambda_{\mathfrak{l}})_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \in S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0) : \lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}}(\Delta f_{\mathfrak{l},m}(\vartheta, \nu(m)) +$$

$$+ \mathfrak{L}_{\mathfrak{l}}^{(m)}(\vartheta, \nu(m)) - M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t)y(t, h(\cdot))\} - M\{y_{\mathfrak{l}}(t, h(\cdot))\}) \le 0, \tag{5.22}$$

$$\lambda_0 \ge 0, \quad \lambda_{\mathfrak{l}} \ge 0, \quad \lambda_{\mathfrak{l}}\mathfrak{T}_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = 0, \quad \mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}\Big\}.$$

Используя приведенные в (5.22) соотношения, а также обозначения (4.15), (4.6)–(4.8), следуя схеме доказательства леммы 7.2 в [7], показываем, что определенная выше система замкнутых множеств $\{\mathfrak{K}(\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}, h(\cdot)), ((\vartheta, \{\nu(m)\}_{m\in\mathbb{Z}}), h(\cdot)) \in \mathbb{I}\}$, где $\mathbb{I}$ – совокупность допустимых наборов компакта $S_1^{1+\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}(0)$, является центрированной. Поэтому [13] пересечение этой системы множеств не пусто. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 5.2 в качестве искомого набора чисел достаточно взять координаты $(\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}})$ любого вектора из этого пересечения.

6. Доказательство теоремы 1.2. Непосредственному доказательству теоремы 1.2 предпошлем определение стекловского усреднения для $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. Для этого при фиксированном $\zeta > 0$ и каждом $t \in \mathbb{R}$ рассмотрим функционал $c(\cdot) \mapsto \zeta^{-1}\int_t^{t+\zeta}\langle\mu(s), c(u)\rangle\, ds$, $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$, который, как легко видеть, принадлежит $(C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))^*$. Поэтому из теоремы Рисса [14] с учетом включения $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1 \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ вытекает существование такой меры $\mu(t, \zeta) \in \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, что для каждой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ будет выполнено равенство

$$\langle\mu(t, \zeta), c(u)\rangle = \frac{1}{\zeta}\int_t^{t+\zeta}\langle\mu(s), c(u)\rangle\, ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

из которого следует, что для каждой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ отображение $t \mapsto \langle\mu(t, \zeta), c(u)\rangle$ непрерывно на $\mathbb{R}$. Поэтому $\mu(\cdot, \zeta) \in C(\mathbb{R}, (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, где ρ_w – метрика на $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, индуцированная нормой $|\cdot|_w$.

Определение 6.1. Пусть $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. Тогда отображение $\mu(\cdot, \zeta) \in C(\mathbb{R}, (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, удовлетворяющее при каждом $t \in \mathbb{R}$ и всякой функции $c(\cdot) \in C(\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ равенству (6.1), называется стекловским усреднением для $\mu(\cdot)$.

В работе [3] доказано, что если $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$, то $\mu(\cdot, \zeta)$ принадлежит множеству $B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})) \subset C(\mathbb{R}, (\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}), \rho_w))$, состоящему из мерозначных п.п. по Бору функций. Там же доказана

Теорема 6.1. *Пусть* $\mu(\cdot, \zeta) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ *– стекловское усреднение для* $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$. *Тогда для каждой функции* $g \in S(\mathbb{R}, C(\mathfrak{U}, \mathbb{R}))$ $\lim\limits_{\zeta\downarrow 0}(\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|\int_t^{t+1}\langle\mu(s, \zeta) - \mu(s), g(s, u)\rangle\, ds|) = 0$ *и, следовательно,* $\lim\limits_{\zeta\downarrow 0} M\{\langle\mu(t, \zeta), g(t, u)\rangle\} = M\{\langle\mu(t), g(t, u)\rangle\}$.

Перейдем к доказательству теоремы 1.2. Покажем, что числа $\widehat{\lambda}_0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$ (множители Лагранжа), указанные в теореме 5.2, искомые. В самом деле, для этих чисел условия (1.12) выполнены. Далее для произвольно фиксированного $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$ рассмотрим его стекловское усреднение $\mu(\cdot, \zeta)$. Так как $\mu(\cdot, \zeta) \in B(\mathbb{R}, \mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$, то при каждом $\vartheta \in [0, a]$ последовательность $\{\mu(\vartheta + ma, \zeta)\}_{m\in\mathbb{Z}} \subset \mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ является п.п. По теореме 5.2 для этой последовательности при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ будет выполнено неравенство

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{q_l a} \sum_{m=0}^{q_l-1} \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \Biggl(\Delta f_{\mathfrak{l}}(\vartheta + ma, \mu(\vartheta + ma, \zeta)) +$$

$$+ \int_0^a \psi_{\mathfrak{l}}(t + ma) \sum_{k=0}^{\infty} \{\mathcal{G}_m(t, \vartheta - (k+1)a)\Delta f_{\mathfrak{l}}(\vartheta + ma - (k+1)a, \mu(\vartheta + ma - (k+1)a, \zeta)) +$$

$$+ \mathcal{G}_m(t, \vartheta + ka)\Delta f_{\mathfrak{l}}(\vartheta + ma + ka, \mu(\vartheta + ma + ka, \zeta))\}\, dt - M\{\psi_{\mathfrak{l}}(t) y(t, h(\cdot))\} - M\{y_{\mathfrak{l}}(t, h(\cdot))\} \Biggr) \le 0,$$

проинтегрировав которое по ϑ от 0 до a получаем (см. (4.6))

$$M\Biggl\{ \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \Delta f_{\mathfrak{l}}(t, \mu(t, \zeta)) \Biggr\} + M\Biggl\{ \Biggl(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t) \Biggr) z(t, \zeta) \Biggr\} - M\Biggl\{ \Biggl(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t) \Biggr) y(t, h(\cdot)) \Biggr\} -$$

$$- M\Biggl\{ \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} y_{\mathfrak{l}}(t, h(\cdot)) \Biggr\} \le 0,$$

где $z(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}(t, \vartheta)\Delta f(\vartheta, \mu(\vartheta, \zeta))\, d\vartheta$. Так как функции $z(\cdot, \zeta)$ и (см. (3.10)) $y(\cdot, h(\cdot))$ являются п.п. по Бору решениями систем уравнений $\dot{y} = A(t)y + \Delta f(t, \mu(t, h))$ и $\dot{y} = A(t)y + \langle \widehat{\mu}(t), f'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle h(t)$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, в которых $A(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(t, \widehat{x}(t), u)\rangle$, то из равенств

$$\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t) z(t, \zeta)) = \Biggl(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t) \Biggr) z(t, \zeta) + \widehat{p}(t)\Delta f(t, \mu(t, h)),$$

$$\frac{d}{dt}(\widehat{p}(t) y(t, h(\cdot))) = \Biggl(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t) \Biggr) y(t, h(\cdot)) + \widehat{p}(t)\langle \widehat{\mu}(t), f'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle h(t),$$

где $\widehat{p}(\cdot)$ – п.п. по Бору решение системы (1.11), получаем в свою очередь равенства

$$M\Biggl\{ \Biggl(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t) \Biggr) z(t, \zeta) \Biggr\} = -M\{\widehat{p}(t)\Delta f(t, \mu(t, h))\},$$

$$M\Biggl\{ \Biggl(\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \psi_{\mathfrak{l}}(t) y(t, h(\cdot)) \Biggr) \Biggr\} = -M\{\widehat{p}(t)\langle \widehat{\mu}(t), f'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u)\rangle h(t)\}.$$

Поэтому (см. определение 1.4 и обозначения (4.1)) из полученного выше неравенства вытекает, что

$$M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t))\} - M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \mu(t, \zeta), \widehat{p}(t))\} +$$
$$+ M\{\langle \widehat{\mu}(t), H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle h(t)\} \le 0.$$

Отсюда в свою очередь несложно заключить, что при каждом $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ справедливо неравенство (1.13) и для всех $\zeta > 0$ $M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{\mu}(t), \widehat{p}(t))\} - M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \mu(t, \zeta), \widehat{p}(t))\} \ge 0$. Далее, так как отображение (см. определение 1.4 и теорему 1.1) $(t, u) \mapsto H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))$ п.п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u \in \mathfrak{U}$, то по теореме 6.1 получаем, что $\lim\limits_{h\downarrow 0} M\{\mathbb{H}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \mu(t, \zeta), \widehat{p}(t))\} = M\{\mathbb{H}(\langle \mu(t), H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t))\rangle)\}$. Из этого равенства с учетом последнего неравенства получаем нужное равенство (1.10). Теорема 1.2 доказана.

Из определения 1.4 и теоремы 1.2 вытекает

Теорема 6.2. *Пусть допустимый процесс* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathfrak{D}$ *является решением задачи (1.6) и п.п. по Степанову система уравнений* $\dot{y} = f'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))y$, $(t, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, *допускает э.д. Тогда найдутся такие не равные нулю одновременно числа* $\widehat{\lambda}_0 \geq 0, \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}}$, *что при п.в.* $t \in \mathbb{R}$ $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}} H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), u, \widehat{p}(t)) = H(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t), \widehat{p}(t))$, *где* $\widehat{p}(t) \in \mathbb{R}^{n*}$, $t \in \mathbb{R}$, *– п.п. по Бору решение системы* $\dot{p} = -pf'_x(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t)) + \sum_{\mathfrak{l}=0}^{\mathfrak{k}+\mathfrak{m}} \lambda_{\mathfrak{l}} f'_{\mathfrak{l}x}(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))$, *выполнены условия* $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} \geq 0$, $\widehat{\lambda}_{\mathfrak{l}} I_{\mathfrak{l}}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) = 0$, $\mathfrak{l} = 1, \ldots, \mathfrak{k}$, *и при каждом* $h(\cdot) \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ $M\{H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))h(t)\} \leq 0$.

Замечание 6.1. На $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ определено [15] скалярное произведение

$$(f, g) \doteq M\{f^*(t)g(t)\}, \quad f, g \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k).$$

Полученное предгильбертово пространство обозначим APC. Поскольку замыкание APC по норме $\|f\|_{\mathbb{B}} \doteq \sqrt{(f, f)}$, $f \in B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ – гильбертово пространство $\mathrm{APB} \subset L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ п.п. по Безиковичу функций [15], то [16, с. 219] $(\mathrm{APC})^*$ изоморфно APB и, значит, поляру $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ$ выпуклого конуса $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \subset \mathrm{APC}$ можно представить в виде $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ = \{g \in \mathrm{APB} : (g, h) \leq 0, h \in T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}\}$. Последнее утверждение теоремы 6.2 показывает, что п.п. по Степанову функция $t \mapsto H'_v(t, \widehat{x}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))$ принадлежит $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ$ (напомним [15], что $S(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k) \subset \mathrm{APB}$). Отметим также, что если множество $\mathfrak{S} \subset B(\mathbb{R}, \mathbb{R}^k)$ выпукло, то [17] $T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S}$ совпадает с замыканием по норме $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$ выпуклого конуса $\mathrm{cone}(\mathfrak{S} - \widehat{v}(\cdot))$ и $(T_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S})^\circ = N_{\widehat{v}(\cdot)}\mathfrak{S} \doteq \{g(\cdot) \in \mathrm{APB} : (g(\cdot), v(\cdot) - \widehat{v}(\cdot)) \leq 0,\ v(\cdot) \in \mathfrak{S}\}$.

Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (проект Е 00-1.0-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. С. 312–324.
2. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 7. С. 876–884.
3. *Иванов А.Г.* // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 1 (24). С. 3–100.
4. *Иванов А.Г.* О ряде свойств линейных почти периодических систем управления. Деп. в ВИНИТИ. 27.08.2001. № 1902–В01.
5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев, 1987.
6. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 3. С. 316–324.
7. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 378–486.
8. *Иванов А.Г.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 186–197.
9. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
10. *Иванов А.Г.* // Изв. вузов. 2002. № 6 (481). С. 14–25.
11. *Иванов А.Г.* // Изв. вузов. 2001. № 6 (469). С. 34–43.
12. *Fink A.M.* // Lect. Notes Math. 1974. V. 377.
13. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М., 1965.
14. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
15. *Левитан Б.М.* Почти периодические функции. М., 1953.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1989.
17. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.

Институт математики и информатики
Удмуртского государственного университета,
г. Ижевск

Поступила в редакцию
02.12.2002 г.