УДК 517.95

Е.Ю. Панов

О последовательностях мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка

В статье исследуется поведение ограниченных последовательностей мерозначных решений уравнения

$$\operatorname{div}_x \varphi(x,u) + \psi(x,u) = 0, \tag{$*$}$$

$u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Основным результатом работы является доказательство предкомпактности ограниченной последовательности мерозначных решений уравнений вида $(*)$ в топологии сильной сходимости.

Библиография: 8 названий.

§1. Введение

Рассмотрим квазилинейное уравнение первого порядка

$$\operatorname{div}_x \varphi(x,u) + \psi(x,u) = 0, \tag{1}$$

$u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\varphi(x,u) = (\varphi_1(x,u), \dots, \varphi_n(x,u))$, функции $\varphi_i(x,u) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$; $\psi(x,u) \in L^\infty(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega \times \mathbb{R}$.

В настоящей статье исследуется поведение ограниченных последовательностей мерозначных решений уравнения (1). Основным результатом работы является установленная в § 4 для широкого класса уравнений вида (1) предкомпактность ограниченной последовательности мерозначных решений в топологии сильной сходимости. При доказательстве этого результата существенно используется введенное Тартаром в работе [1] понятие H-меры, соответствующей ограниченной в $L^2(\Omega)$ последовательности функций, и распространяемое в § 2 на случай последовательности мерозначных функций. В § 3 доказывается теорема о локализации H-меры, соответствующей ограниченной последовательности мерозначных решений (аналог теоремы 1.6 из [1]). Наконец, в § 4 в невырожденном случае принцип локализации применяется для доказательства основного результата работы.

Приведем определение обобщенного решения уравнения (1) в классе ограниченных измеримых функций, которое будет служить основой для дальнейших обобщений.

Определение 1 (см. [2], [3]). Ограниченная измеримая функция $u(x)$ на Ω называется *обобщенным решением* (коротко – о.р.) уравнения (1), если при $k \in \mathbb{R}$ для всех $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $f(x) \ge 0$

$$\int_\Omega \Big[\Big((\varphi(x,u(x)) - \varphi(x,k))\operatorname{sign}(u(x)-k), \nabla f(x)\Big) \\ - \operatorname{sign}(u(x)-k)\Big(\operatorname{div}_x \varphi(x,k) + \psi(x,u(x))\Big) f(x)\Big]\, dx \ge 0$$

($(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$), т.е. при $k \in \mathbb{R}$ в области Ω

$$\operatorname{div}_x \Big((\varphi(x,u(x)) - \varphi(x,k))\operatorname{sign}(u(x)-k)\Big) \\ + \operatorname{sign}(u(x)-k)\Big(\operatorname{div}_x \varphi(x,k) + \psi(x,u(x))\Big) \le 0$$

в смысле распределений.

В настоящей работе мы изучаем более общие мерозначные решения, введенные впервые в работах [4]–[5].

Приведем основные используемые понятия:

Мерозначной функцией на Ω называется слабо измеримое отображение $x \to \nu_x$ множества Ω в пространство вероятностных борелевских мер с компактным носителем на прямой $\mathbb{R}$. Слабая измеримость ν_x означает, что для любой непрерывной функции $p(\lambda)$ функция $x \to \int p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$ измерима на Ω.

Мерозначная функция ν_x называется *ограниченной*, если существует $M > 0$ такое, что для п.в. $x \in \Omega$ $\operatorname{supp}\nu_x \subset [-M, M]$. Наконец, мерозначные функции вида: $\nu_x = \delta_{u(x)}$, где δ_u – мера Дирака с носителем в точке u, называются регулярными и будут нами отождествляться с соответствующими функциями $u(x)$. Таким образом, множество ограниченных мерозначных функций включает в себя пространство $L^\infty(\Omega)$.

Пусть $MV(\Omega)$ – множество ограниченных мерозначных функций на Ω. Определим понятия сильной и слабой сходимости последовательностей из $MV(\Omega)$:

Определение 2. Пусть $\nu_x^k \in MV(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu_x \in MV(\Omega)$. Будем говорить, что

1) последовательность ν_x^k сходится к ν_x слабо, если для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int p(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \to \int p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \quad \text{при } k \to \infty \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(\Omega).$$

2) последовательность ν_x^k сходится к ν_x сильно, если для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int p(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \to \int p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \quad \text{при } k \to \infty \text{ в } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Как показано в следующей теореме, мерозначные функции естественно возникают как слабые пределы ограниченных последовательностей из $L^\infty(\Omega)$:

Теорема 1. 1) *Пусть* $u_k(x) \in L^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, *– ограниченная последовательность. Тогда существует подпоследовательность* $u_r(x) = u_k(x)$, $k = k_r$, *и мерозначная функция* $\nu_x \in MV(\Omega)$ *такие, что для всех* $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$p(u_r(x)) \to \int p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \qquad \text{при } r \to \infty \ \ *\text{-слабо в } L^\infty(\Omega),$$

т.е. последовательность регулярных мерозначных функций, отождествляемых с $u_r(x)$, *сходится слабо к* ν_x *в смысле определения 2. При этом*

2) *мерозначная функция* ν_x *регулярна:* $\nu_x = \delta_{u(x)}$ *тогда и только тогда, когда при* $r \to \infty$ $u_r(x) \to u(x)$ *в* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *(сильно).*

Доказательство теоремы 1 можно найти в работе [4] (см. также обзор [6]). Заметим, что, обратно, любая мерозначная функция на Ω является слабым пределом ограниченной последовательности из $L^\infty(\Omega)$ (см. [4], [6]).

Будем называть последовательность мерозначных функций ν_x^k, $k \in \mathbb{N}$, *ограниченной*, если при некотором $M > 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и для всех $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} \nu_x^k \subset [-M, M]$.

Верно следующее обобщение первого утверждения теоремы 1:

Теорема 2. *Пусть* ν_x^k, $k \in \mathbb{N}$, *– ограниченная последовательность мерозначных функций. Тогда существует подпоследовательность* $\nu_x^r = \nu_x^k$, $k = k_r$, *и мерозначная функция* ν_x *на* Ω, *такие, что при* $r \to \infty$ $\nu_x^r \to \nu_x$ *слабо.*

Доказательство. Пусть $M > 0$ таково, что для всех $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} \nu_x^k \subset [-M, M]$; μ^k – мера на $\Omega \times [-M, M]$, определяемая соотношением:

$$\langle \mu^k, p(x,\lambda)\rangle = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} p(x,\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \right) dx \qquad \text{при } p(x,\lambda) \in C_0(\Omega \times [-M, M]).$$

Заметим, что из слабой измеримости отображения $x \to \nu_x^k$ следует измеримость функции $x \to \int_{\mathbb{R}} p(x,\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda)$. Из определения мерозначной функции следует, что:

1) если $p(x,\lambda) \geq 0$, то $\langle \mu^k, p(x,\lambda)\rangle \geq 0$,

2) если $p(x,\lambda) = p(x)$, где $p(x) \in C_0(\Omega)$, то $\langle \mu^k, p(x,\lambda)\rangle = \int_\Omega p(x)\, dx$.

Из 1), 2) вытекает, что μ^k, $k \in \mathbb{N}$, – последовательность неотрицательных мер на $\Omega \times [-M, M]$, ограниченная по вариации на любом компакте: для любого компакта $K \subset \Omega$ $\mu^k(K \times [-M, M]) = \operatorname{mes}(K)$, где mes – мера Лебега на Ω. Поэтому, существует подпоследовательность $\mu^r = \mu^k$, $k = k_r$, и неотрицательная мера μ на $\Omega \times [-M, M]$ такие, что при $r \to \infty$ $\mu^r \to \mu$ слабо. Из 2) следует, что $\mathrm{pr}_\Omega\, \mu^r = \operatorname{mes}$ и в пределе при $r \to \infty$ $\mathrm{pr}_\Omega\, \mu = \operatorname{mes}$. Как показано в работе [4], отсюда следует, что существует мерозначная функция ν_x такая, что $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$, для всех $p(x,\lambda) \in C_0(\Omega \times [-M, M])$

$$\langle \mu, p(x,\lambda)\rangle = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} p(x,\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \right) dx.$$

Пусть $p(x,\lambda) = \varphi(x)g(\lambda)$, где $\varphi(x) \in C_0(\Omega)$, $g(\lambda) \in C([-M,M])$. Тогда из слабой сходимости мер $\mu^r \to \mu$

$$\int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_x^r(\lambda) \right) \varphi(x)\, dx = \langle \mu^r, p(x,\lambda) \rangle$$
$$\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \langle \mu, p(x,\lambda) \rangle = \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \right) \varphi(x)\, dx,$$

откуда, учитывая ограниченность последовательности $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_x^r(\lambda)$ в $L^\infty(\Omega)$ и плотность $C_0(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$, получаем, что последнее предельное соотношение выполнено для всех $\varphi(x) \in L^1(\Omega)$, т.е. для всех $g(\lambda) \in C([-M,M])$

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_x^r(\lambda) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \qquad *\text{-слабо в } L^\infty(\Omega)$$

и $\nu_x^r \to \nu_x$. Теорема доказана.

Определение 3. Ограниченная мерозначная функция ν_x на Ω называется *мерозначным решением* (коротко – м.р.) уравнения (1), если для всех $k \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{div}_x \left(\int (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,k)) \operatorname{sign}(\lambda - k)\, d\nu_x(\lambda) \right)$$
$$+ \int \operatorname{sign}(\lambda - k) \big[\operatorname{div}_x \varphi(x,k) + \psi(x,\lambda) \big]\, d\nu_x(\lambda) \le 0 \qquad (2)$$

в смысле распределений.

Заметим, что определение 3 согласуется с определением 1 в том смысле, что функция $u(x)$ является о.р. уравнения (1) тогда и только тогда, когда она как регулярная мерозначная функция является м.р. уравнения (1).

Замечание 1. Если ν_x – м.р. уравнения (1), то

$$\operatorname{div}_x \left(\int \varphi(x,\lambda)\, d\nu_x(\lambda) \right) + \int \psi(x,\lambda)\, d\nu_x(\lambda) = 0$$

в смысле распределений; в частности, если $u(x)$ – о.р. уравнения (1), то $u(x)$ удовлетворяет (1) в смысле распределений.

Действительно, требуемое равенство вытекает из (2) при $k = \pm M$, где $M > 0$ таково, что для п.в. $x \in \Omega$ $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$.

§2. H-меры, соответствующие ограниченным последовательностям мерозначных функций

Нам потребуется определенное в работе [1] понятие H-меры. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Введем следующие обозначения:

$F(u)(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, – преобразование Фурье функции $u(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$;

$S = S^{n-1} = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \mid |\xi| = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{1/2} = 1\}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$;

$u \to \overline{u}$, $u \in \mathbb{C}$, – операция комплексного сопряжения.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $p \in \mathbb{N}$, последовательность $U^k(x) = \left(U_1^k(x), \dots, U_p^k(x)\right) \in (L^2(\Omega))^p$ слабо сходится к нулю.

Предложение 1 (см. [1, теорема 1.1]). *Существует семейство комплексных борелевских мер* $\mu = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1}^p$ *на* $\Omega \times S$ *и подпоследовательность* $U^r(x) = U^k(x)$, $k = k_r$, *такие, что для всех* $\phi_1(x)$, $\phi_2(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\langle \mu^{ij}, \phi_1(x)\overline{\phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(U_i^r\phi_1)(\xi)\overline{F(U_j^r\phi_2)(\xi)}\,\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \quad (3)$$

Определение 4 (см. [1]). Семейство мер $\mu = \{\mu^{ij}\}_{i,j=1}^p$ называется *H-мерой*, соответствующей подпоследовательности $U^r(x)$.

Лемма 1. *Пусть при* $i = 1, \dots, p$ $M_i = \overline{\lim}_{k\to\infty} \|U_i^k\|_{2,\Omega}$. *Тогда для всех* $i, j = 1, \dots, p$ $\operatorname{Var}\mu^{ij} \le 4M_iM_j$.

Доказательство. Пусть сначала $i = j$. Тогда из (3) при $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ следует, что μ^{ii} – неотрицательная мера и по равенству Планшереля

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\mu^{ii} &= \mu^{ii}(\Omega \times S) = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(U_i^r\chi_\Omega)(\xi)\overline{F(U_i^r\chi_\Omega)(\xi)}\,d\xi \\ &= \lim_{r\to\infty} \|U_i^r\|_{2,\Omega}^2 \le M_i^2\end{aligned}$$

(здесь $\chi_\Omega(x)$ – индикатор множества Ω). Далее (см. [1, Corollary 1.2]) для любого борелевского множества $A \subset \Omega \times S$ матрица $\{\mu^{ij}(A)\}_{i,j=1}^p$ положительно определена, в частности,

$$|\mu^{ij}(A)| \le \left(\mu^{ii}(A)\mu^{jj}(A)\right)^{1/2} \le M_iM_j,$$

откуда следует, что

$$|\operatorname{Re}\mu^{ij}(A)| \le M_iM_j, \qquad |\operatorname{Im}\mu^{ij}(A)| \le M_iM_j.$$

Отсюда и из разложения Хана (см. [7]) для мер $\operatorname{Re}\mu^{ij}$, $\operatorname{Im}\mu^{ij}$ следует, что

$$\operatorname{Var}(\operatorname{Re}\mu^{ij}) \le 2M_iM_j, \qquad \operatorname{Var}(\operatorname{Im}\mu^{ij}) \le 2M_iM_j$$

и, наконец,

$$\operatorname{Var}(\mu^{ij}) \le \operatorname{Var}(\operatorname{Re}\mu^{ij}) + \operatorname{Var}(\operatorname{Im}\mu^{ij}) \le 4M_iM_j.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\nu_x \in MV(\Omega)$. *Тогда для любой ограниченной борелевской функции* $p(\lambda)$ *функция* $x \to \int p(\lambda)\,d\nu_x(\lambda)$ *измерима по Лебегу на* Ω.

Доказательство. Пусть $F = \{p(\lambda) \mid p(\lambda)$ – борелевская функция на $\mathbb{R}$, $|p(\lambda)| \le 1$ и функция $x \to \int p(\lambda)\,d\nu_x(\lambda)$ измерима по Лебегу$\}$.

По определению мерозначной функции единичный шар B пространства $C(\mathbb{R})$ содержится в F. Далее, F секвенциально замкнуто в топологии поточечной сходимости:

Если $p_k(\lambda) \to p(\lambda)$ и для всех $k \in \mathbb{N}$ $p_k(\lambda) \in F$, то $p(\lambda) \in F$. Действительно, по теореме Лебега об ограниченной сходимости для всех $x \in \Omega$

$$\int p_k(\lambda)\,d\nu_x(\lambda) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int p(\lambda)\,d\nu_x(\lambda)$$

и функция $x \mapsto \int p(\lambda)\,d\nu_x(\lambda)$ измерима по Лебегу как поточечный предел последовательности измеримых функций. Используя трансфинитную индукцию, получим отсюда, что для любого порядкового числа α множество F содержит функции, по модулю не превосходящие единицы, из класса Бэра B_α. По теореме Лебега, (см. [7, с. 368]), F содержит все борелевские функции $p(\lambda)$, по модулю не превосходящие единицы, и, значит, для любой ограниченной борелевской функции $p(\lambda)$ функция $x \mapsto \int p(\lambda)\,d\nu_x(\lambda)$ измерима по Лебегу. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\nu_x \in MV(\Omega)$. Тогда функция $u(x,\lambda) = \nu_x((\lambda,+\infty))$ измерима по Лебегу на множестве $\Omega \times \mathbb{R}$.*

Доказательство. Определим при $k \in \mathbb{N}$ ступенчатую по переменной λ функцию $u_k(x,\lambda)$: $u_k(x,\lambda) = u(x,\frac{i}{k})$, где целое i таково, что $\frac{i-1}{k} \le \lambda < \frac{i}{k}$. Тогда при $\frac{i-1}{k} \le \lambda \le \frac{i}{k}$

$$u_k(x,\lambda) = \int \theta\left(\lambda - \frac{i}{k}\right) d\nu_x(\lambda), \quad \text{где } \theta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } \lambda \le 0 \end{cases}$$

– функция Хевисайда.

По лемме 2 при любом $k \in \mathbb{N}$ функция $x \mapsto \int \theta(\lambda - \frac{i}{k})\,d\nu_x(\lambda)$ измерима на Ω, откуда следует измеримость функции $u_k(x,\lambda)$ на $\Omega \times \mathbb{R}$. Так как при фиксированном $x \in \Omega$ функция $u(x,\lambda)$ полунепрерывна справа, то последовательность $u_k(x,\lambda)$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к $u(x,\lambda)$ поточечно и, следовательно, функция $u(x,\lambda)$ измерима на $\Omega \times \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\nu_x^k \in MV(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, – ограниченная последовательность мерозначных функций, слабо сходящаяся к мерозначной функции $\nu_x \in MV(\Omega)$. Обозначим при $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$u^k(x,\lambda) = \nu_x^k\big((\lambda,+\infty)\big), \qquad u^0(x,\lambda) = \nu_x\big((\lambda,+\infty)\big).$$

Тогда по лемме 2 при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $u^k(x,\lambda) \in L^\infty(\Omega)$ и $0 \le u^k(x,\lambda) \le 1$. Пусть

$$E = E(\nu_x^0) = \left\{\lambda_0 \in \mathbb{R} \mid u^0(x,\lambda) \underset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} u^0(x,\lambda_0) \text{ в } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\right\}.$$

Лемма 4. *Дополнение* $\overline{E} = \mathbb{R} \setminus E$ *не более чем счетно и при* $\lambda \in E$ $u^k(x,\lambda) \to u^0(x,\lambda)$ $*$*-слабо в* $L^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $\varphi(x) > 0$ на Ω; A – множество точек непрерывности функции

$$p(\lambda) = \int_\Omega u^0(x,\lambda)\varphi(x)\,dx.$$

Так как $p(\lambda)$ – невозрастающая функция, то дополнение $\overline{A}$ не более чем счетно. Покажем, что $E \supset A$. Действительно, если $\lambda_0 \in A$, то, учитывая монотонность функции $u^0(x,\lambda)$ по λ,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|u^0(x,\lambda) - u^0(x,\lambda_0)\right|\varphi(x)\,dx &= \left|\int_\Omega (u^0(x,\lambda) - u^0(x,\lambda_0))\varphi(x)\,dx\right| \\ &= |p(\lambda) - p(\lambda_0)| \to 0 \quad \text{при } \lambda \to \lambda_0\end{aligned}$$

и $u^0(x,\lambda) \to u^0(x,\lambda_0)$ в $L^1(\Omega, \varphi(x)\,dx)$. Так как $\varphi(x) \in C(\Omega)$, $\varphi(x) > 0$, то $u^0(x,\lambda) \underset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow} u^0(x,\lambda_0)$ также и в $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, т.е. $x \in E$.

Итак, $E \supset A$ и, значит, $\overline{E} \subset \overline{A}$ – не более чем счетно. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение.

Пусть $\lambda_0 \in E$, $h > 0$; $\theta_h^-(\lambda)$, $\theta_h^+(\lambda)$ – непрерывные функции, такие, что $0 \le \theta_h^-(\lambda) \le 1$, $0 \le \theta_h^+(\lambda) \le 1$ и

$$\theta_h^-(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \ge \lambda_0 + h, \\ 0 & \text{при } \lambda \le \lambda_0, \end{cases} \qquad \theta_h^+(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \ge \lambda_0, \\ 0 & \text{при } \lambda \le \lambda_0 - h. \end{cases}$$

Пусть, как и выше, $\theta(\lambda)$ – функция Хевисайда. Тогда, очевидно,

$$\theta(\lambda - \lambda_0 - h) \le \theta_h^-(\lambda) \le \theta(\lambda - \lambda_0) \le \theta_h^+(\lambda) \le \theta(\lambda - \lambda_0 + h)$$

и, интегрируя эту цепочку неравенств по мере $\nu_x^k(\lambda)$ при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получим

$$\begin{aligned} u^k(x,\lambda_0 + h) &\le \int \theta_h^-(\lambda)\,d\nu_x^k(\lambda) \le u^k(x,\lambda_0) \\ &\le \int \theta_h^+(\lambda)\,d\nu_x^k(\lambda) \le u^k(x,\lambda_0 - h). \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $\varphi(x) \in C_0(\Omega)$, $\varphi(x) \ge 0$. Так как $\lambda_0 \in E$, то существует $h > 0$, такое, что $\int_\Omega \left(u^0(x,\lambda_0 - h) - u^0(x,\lambda_0 + h)\right)\varphi(x)\,dx \le \varepsilon$ и из (4)

$$\int_\Omega \left(\int \theta_h^+(\lambda)\,d\nu_x^0(\lambda)\right)\varphi(x)\,dx - \int_\Omega \left(\int \theta_h^-(\lambda)\,d\nu_x^0(\lambda)\right)\varphi(x)\,dx \le \varepsilon. \tag{5}$$

Обозначим при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$Q_+^k = \int_\Omega \left(\int \theta_h^+(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \right) \varphi(x)\, dx, \qquad Q_-^k = \int_\Omega \left(\int \theta_h^-(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \right) \varphi(x)\, dx.$$

Тогда (5) можно переписать в виде: $Q_+^0 - Q_-^0 \le \varepsilon$. Из слабой сходимости $\nu_x^k \to \nu_x$ следует, что существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $k \ge k_0$

$$|Q_+^k - Q_+^0| \le \varepsilon, \qquad |Q_-^k - Q_-^0| \le \varepsilon. \tag{6}$$

Пусть при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$Q^k = \int_\Omega u^k(x, \lambda_0) \varphi(x)\, dx.$$

Из (4) при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеем $Q_-^k \le Q^k \le Q_+^k$, откуда, учитывая (5) и (6) при $k \ge k_0$

$$\begin{aligned} |Q^k - Q^0| &\le \max(Q_+^k, Q_+^0) - \min(Q_-^k, Q_-^0) \\ &\le |Q_+^0 - Q_-^0| + |Q_+^k - Q_+^0| + |Q_-^k - Q_-^0| \le 3\varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

(Мы воспользовались очевидным неравенством: при $p, q, P, Q \in \mathbb{R}$ $\max(P, Q) - \min(p, q) \le |P - Q| + |Q - q| + |p - q|$). Из (7) имеем $\lim_{k\to\infty} Q^k = Q^0$ или, раскрыв, для всех $\varphi(x) \in C_0(\Omega)$, $\varphi(x) \ge 0$

$$\int_\Omega u^k(x, \lambda_0) \varphi(x)\, dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u^0(x, \lambda_0) \varphi(x)\, dx. \tag{8}$$

Учитывая, что любая функция из $C_0(\Omega)$ представима в виде разности двух неотрицательных функций из $C_0(\Omega)$, получаем, что (8) выполнено для всех $\varphi(x) \in C_0(\Omega)$ и из ограниченности последовательности $u^k(x, \lambda_0)$ в $L^\infty(\Omega)$ и плотности $C_0(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ следует, что (8) выполнено для всех $\varphi(x) \in L^1(\Omega)$, т.е. $u^k(x, \lambda_0) \to u^0(x, \lambda_0)$ при $k \to \infty$ $*$-слабо в $L^\infty(\Omega)$. Лемма доказана.

Пусть $U_\lambda^k(x) = u^k(x, \lambda) - u^0(x, \lambda)$. По лемме 4 при $\lambda \in E$

$$U_\lambda^k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad *\text{-слабо в } L^\infty(\Omega).$$

Теорема 3. 1) *Существует семейство локально-конечных борелевских мер* $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ *на* $\Omega \times S$ *и подпоследовательность* $U^r(x) = \{U_p^r(x)\}_{p\in E}$, $U_p^r(x) = U_p^k(x)$, $k = k_r$, *такие, что для всех* $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C_0(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\langle \mu^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi) \rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_p^r)(\xi) \overline{F(\Phi_2 U_q^r)(\xi)}\, \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \tag{9}$$

2) *Отображение* $(p, q) \mapsto \mu^{pq}$ *непрерывно как отображение* $E \times E$ *в пространство* $Z(\Omega \times S)$ *локально-конечных борелевских мер* μ *на* $\Omega \times S$ *с топологией, порожденной полунормами* $\|\mu\|_K = \mathrm{Var}(\mu)(K)$, K *– компакт в* $\Omega \times S$.

Доказательство. Докажем сначала утверждения теоремы с заменой множества Ω на его открытое предкомпактное подмножество.

1) Пусть $\overline{\Omega} \subset \Omega$ – открытое подмножество с компактным замыканием в Ω, $D \subset E$ – счетное, всюду плотное множество. По предложению 1 для любого конечного подмножества $B \subset D$ существует подпоследовательность последовательности $U^k(x)$ и семейство конечных борелевских мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in B}$ на $\overline{\Omega} \times S$, для которых выполнено условие (9) при $p, q \in B$. Используя стандартную диагональную процедуру, мы можем выбрать подпоследовательность $U^r(x) = U^k(x)$, $k = k_r$ и семейство конечных борелевских мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in D}$ на $\overline{\Omega} \times S$ так, что (9) будет выполнено уже для всех $p, q \in D$. Пусть $p, p' \in E$. Тогда (при $u^r(x,p) = u^k(x,p)$, $k = k_r$)

$$\int_{\overline{\Omega}} |U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)|\,dx \le \int_{\overline{\Omega}} |u^r(x,p) - u^r(x,p')|\,dx + \int_{\overline{\Omega}} |u^0(x,p) - u^0(x,p')|\,dx. \tag{10}$$

Из монотонности $u^r(x,p)$ по переменной p

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega}} |u^r(x,p) - u^r(x,p')|\,dx &= \left|\int_{\overline{\Omega}} (u^r(x,p) - u^r(x,p'))\,dx\right| \\ &\le \left|\int_{\overline{\Omega}} (u^r(x,p) - u^0(x,p))\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_{\overline{\Omega}} (u^r(x,p') - u^0(x,p'))\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_{\overline{\Omega}} (u^0(x,p) - u^0(x,p'))\,dx\right|\end{aligned}$$

и из (10) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\int_{\overline{\Omega}} |U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)|\,dx &\le \left|\int_{\overline{\Omega}} (u^r(x,p) - u^0(x,p))\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_{\overline{\Omega}} (u^r(x,p') - u^0(x,p'))\,dx\right| \\ &\quad + 2\int_{\overline{\Omega}} |u^0(x,p) - u^0(x,p')|\,dx.\end{aligned} \tag{11}$$

Так как по лемме 4 для всех $p \in E$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\overline{\Omega}} (u^r(x,p) - u^0(x,p))\,dx = 0,$$

то из (11)

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \int_{\overline{\Omega}} |U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)|\,dx \le 2\int_{\overline{\Omega}} |u^0(x,p) - u^0(x,p')|\,dx,$$

откуда, поскольку $|U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)| \le c$, $c = \mathrm{const}$

$$\varlimsup_{r\to\infty} \|U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)\|_{2,\overline{\Omega}} \le \left(2c\int_{\overline{\Omega}} |u^0(x,p) - u^0(x,p')|\,dx\right)^{1/2}$$

Следовательно, учитывая, что $p \in E$

$$\lim_{p'\to p} \varlimsup_{r\to\infty} \|U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)\|_{2,\overline{\Omega}} = 0. \tag{12}$$

Пусть теперь $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C_0(\overline{\Omega})$, $\psi(\xi) \in C(S)$. Обозначим

$$F_r(p,q) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_p^r)(\xi)\overline{F(\Phi_2 U_q^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi.$$

Пусть $(p,q), (p',q') \in E \times E$. Тогда

$$\begin{aligned} F_r(p',q') - F_r(p,q) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1(U_{p'}^r - U_p^r))(\xi)\overline{F(\Phi_2 U_{q'}^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_p^r)(\xi)\overline{F(\Phi_2(U_{q'}^r - U_q^r))(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi \end{aligned}$$

и, используя равенство Планшереля, получим, что

$$\begin{aligned} |F_r(p',q') - F_r(p,q)| &\le \left(\|U_P^r - U_{p'}^r\|_{2,\overline{\Omega}}\|U_{q'}^r\|_{2,\overline{\Omega}} + \|U_p^r\|_{2,\overline{\Omega}}\|U_q^r - U_{q'}^r\|_{2,\overline{\Omega}}\right) \\ &\times \|\Phi_1(x)\|_\infty \|\Phi_2(x)\|_\infty \|\psi(\xi)\|_\infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (12), (13) и того, что при $p \in E$

$$\|U_p^r\|_{2,\overline{\Omega}} \le \|U_p^r\|_\infty \left(\mathrm{mes}(\overline{\Omega})\right)^{1/2} \le 2\left(\mathrm{mes}(\overline{\Omega})\right)^{1/2} = \mathrm{const},$$

получаем

$$\lim_{(p',q')\to(p,q)} \varlimsup_{r\to\infty} |F_r(p',q') - F_r(p,q)| = 0. \tag{14}$$

Если $(p',q') \in D \times D$, то по выбору подпоследовательности $U^r(x)$ в пределе при $r \to \infty$ $F_r(p',q') \to \langle \mu^{p'q'}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle$ и, так как D плотно в E, мы можем перейти к пределу при $(p',q') \to (p,q)$, где $(p',q') \in D \times D$, $(p,q) \in E \times E$. Учитывая (14) получим тогда, что для всех $(p,q) \in E \times E$, $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C_0(\overline{\Omega})$, $\psi(\xi) \in C(S)$ существует предел $\lim_{r\to\infty} F_r(p,q) = F(p,q)$, причем предельная функция $F(p,q)$ непрерывна на $E \times E$. Пусть $p, q \in E$. Используя плотность D, выберем последовательности $p_k, q_k \in D$, такие, что при $k \to \infty$ $p_k \to p$, $q_k \to q$. По лемме 1 при $p, q \in D$

$$\mathrm{Var}\,\mu^{pq} \le 4 \cdot \varlimsup_{r\to\infty} \|U_p^r\|_{2,\overline{\Omega}} \cdot \varlimsup_{r\to\infty} \|U_q^r\|_{2,\overline{\Omega}} \le \mathrm{const}$$

и, по предкомпактности ограниченного по вариации множества мер в топологии слабой сходимости, получим, что (после возможного выделения подпоследовательности) существует конечная мера μ^{pq} с носителем на $\overline{\Omega} \times S$, такая, что при $k \to \infty$ $\mu^{p_k q_k} \to \mu^{pq}$ $*$-слабо в $Z(\overline{\Omega} \times S) = (C_0(\overline{\Omega} \times S))^*$. Заметим далее, что при $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x) \in C_0(\overline{\Omega})$, $\psi(\xi) \in C(S)$ $F(p_k, q_k) = \langle \mu^{p_k q_k}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle$ и из непрерывности $F(p,q)$ на $E \times E$ и слабой сходимости последовательности мер $\mu^{p_k q_k}$ к мере μ^{pq} следует, что

$$F(p,q) = \lim_{k\to\infty} F(p_k, q_k) = \langle \mu^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle.$$

Из полученного равенства, в частности, следует, что мера μ^{pq} определена однозначно.

Итак, существует семейство мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ на $\overline{\Omega} \times S$ такое, что для всех $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x) \in C_0(\overline{\Omega})$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\langle \mu^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_p^r)(\xi)\overline{F(\Phi_2 U_q^r)(\xi)}\, \psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi.$$

2) Пусть $p, p', q \in E$, $\tilde{\mu} = \{\tilde{\mu}^{ij}\}_{i,j=1}^2$ – H-мера, соответствующая последовательности $\left(U_{p'}^r(x) - U_p^r(x), U_q^r(x)\right) \in \left(L^2(\overline{\Omega})\right)^2$. Тогда, очевидно, $\tilde{\mu}^{12} = \mu^{p'q} - \mu^{pq}$. По лемме 1 $\operatorname{Var}\tilde{\mu}^{12} \le \mathrm{const}\cdot \overline{\lim}_{r\to\infty} \|U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)\|_{2,\overline{\Omega}}$ и из (12) следует, что $\lim_{p'\to p} \operatorname{Var}(\mu^{p'q} - \mu^{pq}) = 0$ равномерно по $q \in E$ и отображение $p \to \mu^{pq}$ непрерывно по вариации в $\overline{\Omega} \times S$ равномерно по $q \in E$. Так как $\mu^{pq} = \overline{\mu^{qp}}$ (см. [1, Corollary 1.2]), то отображение $q \to \mu^{pq}$ также непрерывно равномерно по $p \in E$. Следовательно, отображение $(p,q) \to \mu^{pq}$ непрерывно по совокупности переменных $(p,q) \in E \times E$.

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим возрастающую по включению последовательность предкомпактных в Ω открытых подмножеств Ω_m, $m \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Omega_m = \Omega$. Как показано выше, для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует семейство конечных борелевских мер $\{\mu_m^{pq}\}_{p,q\in E}$ на $\Omega_m \times S$ и подпоследовательность

$$r \to U_m^r(x) = \{U_{mp}^r(x)\}_{p\in E} = \{U_p^{k(r,m)}(x)\}_{p\in E}$$

исходной последовательности $k \to U^k(x) = \{U_p^k(x)\}_{p\in E}$ такие, что $U_{m+1}^r(x)$ является подпоследовательностью последовательности $U_m^r(x)$ и для всех $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x) \in C_0(\Omega_m)$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\langle \mu_m^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_{mp}^r)(\xi)\overline{F(\Phi_2 U_{mp}^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi. \quad (15)$$

Отсюда в частности следует, что при $m' > m$ для всех $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x) \in C_0(\Omega_m)$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\langle \mu_{m'}^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(xi)\rangle = \langle \mu_m^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle$$

и семейства мер μ_m^{pq}, $m \in \mathbb{N}$ согласованы: при $m' > m$ $\mu_{m'}^{pq}|_{\Omega_m \times S} = \mu_m^{pq}$. Поэтому, для всех $p, q \in E$ существует единственная локально-конечная борелевская мера μ^{pq} на $\Omega \times S$, такая, что при $m \in \mathbb{N}$ $\mu^{pq}|_{\Omega_m \times S} = \mu_m^{pq}$. Тогда из (15) для всех $\Phi_1(x), \Phi_2(x) \in C_0(\Omega_m)$, $\psi(\xi) \in C(S)$

$$\langle \mu^{pq}, \Phi_1(x)\overline{\Phi_2(x)}\psi(\xi)\rangle = \lim_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} F(\Phi_1 U_{mp}^r)(\xi)\overline{F(\Phi_2 U_{mq}^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi.$$

Выберем "диагональную" подпоследовательность

$$r \to U^r(x) = \left\{U_p^r(x)\right\}_{p \in E}, \qquad \text{где } U_p^r(x) = U_p^{k(r,r)}(x).$$

Тогда из (16) следует, что для выбранной подпоследовательности и построенного выше семейства мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in E}$ выполнено (9).

Наконец, утверждение 2) теоремы 3 следует из равенства

$$\mu^{pq}|_{\Omega_m \times S} = \mu_m^{pq}$$

и установленного выше свойства непрерывности по вариации отображений $(p, q) \to \mu_m^{pq}$, $m \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Определение 5. Семейство мер $\{\mu^{pq}\}_{p,q \in E}$ будем называть *H-мерой, соответствующей подпоследовательности* $\nu_x^r = \nu_x^k$, $k = k_r$.

§3. Принцип локализации для H-меры, соответствующей ограниченной последовательности м.р.

Обозначим H_p^s – пространство Соболева на $\mathbb{R}^n$ с показателями p, s, $1 \le p \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ (определение и основные свойства общих пространств Соболева можно найти, например, в [8]). Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, то, как обычно, $H_{p,\mathrm{loc}}^s(\Omega)$ обозначает локально-выпуклое пространство, состоящее из распределений u на Ω, таких, что для всех $\Phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ $\Phi u \in H_p^s$ с топологией, порожденной семейством полунорм $p_\Phi(u) = \|\Phi u\|_{H_p^s}$, $\Phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Лемма 5. *Пусть ν_x – м.р. задачи (1), константа $M > 0$ такова, что п.в. в Ω $\operatorname{supp} \nu_x \subset [-M, M]$. Положим при $p \in \mathbb{R}$*

$$q(x) = \int_p^{+\infty} (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,p))\, d\nu_x(\lambda),$$

$$c(x) = \int_p^{+\infty} (\operatorname{div}_x \varphi(x,p) + \psi(x,\lambda))\, d\nu_x(\lambda).$$

Тогда существует неотрицательная локально-конечная мера μ на Ω, такая, что $\operatorname{div} q(x) + c(x) = -\mu$ в смысле распределений, причем для любой функции $\Phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\operatorname{Var} \Phi\mu = \int_\Omega |\Phi(x)|\, d\mu(x) \le c_1, \qquad \Phi\mu \in H_\infty^{-1}, \qquad \|\Phi\mu\|_{H_\infty^{-1}} \le c_2,$$

константы c_1, c_2 зависят только от M и Φ.

Доказательство. Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. Рассмотрим линейный функционал

$$\mathcal{L}(f) = \int_\Omega \left[(q(x), \nabla f(x)) - c(x)f(x)\right] dx.$$

Тогда $\mathcal{L}(f) = (\mathcal{A}(f) + \mathcal{B}(f))/2$, где

$$\mathcal{A}(f) = \int_\Omega \Bigg[\Bigg(\int (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,p))\operatorname{sign}(\lambda - p)\, d\nu_x(\lambda), \nabla f(x)\Bigg) - \Bigg(\int \operatorname{sign}(\lambda - p)(\operatorname{div}_x \varphi(x,p) + \psi(x,\lambda))\, d\nu_x(\lambda)\Bigg) f(x)\Bigg]\, dx,$$

$$\mathcal{B}(f) = \int_\Omega \Bigg[\Bigg(\int (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,p))\, d\nu_x(\lambda), \nabla f(x)\Bigg) - \Bigg(\int (\operatorname{div}_x \varphi(x,p) + \psi(x,\lambda))\, d\nu_x(\lambda)\Bigg) f(x)\Bigg]\, dx.$$

Так как

$$\int_\Omega (\varphi(x,p), \nabla f(x))\, dx = -\int_\Omega \operatorname{div}_x \varphi(x,p) f(x)\, dx,$$

то $\mathcal{B}(f)$ можно преобразовать к виду:

$$\mathcal{B}(f) = \int_\Omega \Bigg[\Bigg(\int \varphi(x,\lambda)\, d\nu_x(\lambda), \nabla f(x)\Bigg) - \Bigg(\int \psi(x,\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\Bigg) f(x)\Bigg]\, dx$$

и по замечанию 1 $\mathcal{B}(f) = 0$. Так как ν_x – м.р., то для любой неотрицательной функции

$$f(x) \in C_0^\infty(\Omega) \qquad \mathcal{A}(f) \geq 0.$$

Следовательно, функционал $\mathcal{L}(f)$ положителен:

$$\mathcal{L}(f) \geq 0 \quad \text{при } f(x) \in C_0^\infty(\Omega),\ f(x) \geq 0.$$

Пусть $K = \operatorname{supp}(f)$ и $\varphi_K(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_K(x) \geq 0$, $\varphi_K(x) = 1$ при $x \in K$. Тогда $|f(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \varphi_K(x)$ и из положительности $\mathcal{L}$ имеем: $\mathcal{L}(\|f\|_\infty \cdot \varphi_K(x) \pm f(x)) \geq 0$, откуда

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(f)| &\leq \|f\|_\infty \mathcal{L}(\varphi_K) \\ &\leq \|f\|_\infty \cdot \Bigg[\max_{i=1,\dots,n} \|q_i(x)\|_{\infty,K} \int_\Omega \sum_{i=1}^n |(\varphi_K)_{x_i}(x)|\, dx \\ &\qquad + \|c(x)\|_{\infty,K} \cdot \int_\Omega |\varphi_K(x)|\, dx\Bigg]. \end{aligned} \tag{17}$$

Можно считать, что $p \in [-M, M]$, в противном случае, как легко следует из определения м.р. и замечания 1, $\mathcal{L}(f) = 0$. При $p \in [-M, M]$, $i = 1, \dots, n$

$$\|q_i(x)\|_{\infty,K} \le 2 \max_{x\in K, |u|\le M} |\varphi_i(x,u)|,$$

$$\|c(x)\|_{\infty,K} \le \max_{x\in K, |u|\le M} \sum_{i=1}^{n} |\varphi_{ix_i}(x,u)| + \|\psi(x,u)\|_{\infty, K\times[-M,M]}$$

и из (17)

$$\mathcal{L}(f) \le c_K \|f\|_\infty, \tag{18}$$

где константа c_K зависит только от K и M. Итак, функционал $\mathcal{L}$ непрерывен в топологии $C_0(\Omega)$ и, так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $C_0(\Omega)$ однозначно продолжается до положительного непрерывного линейного функционала на $C_0(\Omega)$. По теореме Рисса–Маркова

$$\mathcal{L}(f) = \int_\Omega f(x)\, d\mu,$$

где μ – локально-конечная мера, причем из оценки (18) вытекает, что для любого компакта $K \subset \Omega$ $\mu(K) \le c_K$. Итак, для всех $f(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\mathcal{L}(f) = \int_\Omega \left[(q(x), \nabla f(x)) - c(x) f(x)\right] dx = \int_\Omega f(x)\, d\mu$$

и $\operatorname{div} q(x) + c(x) = -\mu$ в смысле распределений. Пусть $\Phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $K = \operatorname{supp} \Phi(x)$. Тогда

$$\int_\Omega |\Phi(x)|\, d\mu(x) \le c_1 = c_K \|\Phi\|_\infty.$$

Существует константа C, зависящая только от M и $\Phi(x)$, такая, что $\|\Phi(x) q_i(x)\|_\infty \le C$, $i = 1, \dots, n$, $\|(\nabla\Phi(x), q(x))\|_\infty \le C$, $\|\Phi(x) c(x)\|_\infty \le C$. Используя известную (см., например, [8]) непрерывность операторов дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ в H_∞^{-1} и непрерывность вложения $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ в H_∞^{-1}, получим, что

$$-\Phi\mu = \operatorname{div} \Phi q(x) + \Phi c(x) - (\nabla\Phi(x), q(x)) \in H_\infty^{-1}$$

и $\|\Phi\mu\|_{H_\infty^{-1}} \le c_2$, константа c_2 зависит только от M и $\Phi(x)$. Лемма доказана.

Нам понадобится также следующий результат, доказанный в [4] (лемма 28).

Лемма 6. *Пусть Z – пространство конечных зарядов на $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\mu\| = \operatorname{Var}(\mu)$. Тогда любое множество $L \subset Z \cap H_\infty^{-1}$, ограниченное в Z и H_∞^{-1}, компактно в $H_{2,\mathrm{loc}}^{-1}$.*

Пусть теперь ν_x^k – ограниченная последовательность м.р., сходящаяся слабо к ограниченной мерозначной функции ν_x^0, $x \in \Omega$. Тогда ν_x^0 также является м.р. уравнения (1). Для доказательства нужно в условии (2) с $\nu_x = \nu_x^k$ перейти к пределу при $k \to \infty$, используя определение слабой сходимости мерозначных функций.

Пусть

$$A(x,\xi,p) = \left(\xi, \frac{\partial\varphi(x,p)}{\partial p}\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial\varphi_i(x,p)}{\partial p}, \qquad (x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}, \qquad \xi \in S.$$

По теореме 3 некоторой подпоследовательности последовательности ν_x^k (за которой мы сохраним прежнее обозначение) соответствует H-мера $\mu = \{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$, E – множество, определенное перед леммой 4.

ТЕОРЕМА 4 (принцип локализации). *Для всех* $p, q \in E$ $A(x,\xi,p)\mu^{pq} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ограниченности последовательности ν_x^k следует существование константы $M > 0$, такой, что для п.в. $x \in \Omega$ при $k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} \nu_x^k \subset [-M, M]$. Пусть $\Phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$. По лемме 5 для всех $p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p^k &= \operatorname{div}_x\left(\Phi(x)\int_p^{+\infty} (\varphi(x,\lambda - \varphi(x,p))\, d\nu_x^k(\lambda)\right) \\
&= -\Phi(x)\mu^k - \Phi(x)\int_p^{+\infty} (\operatorname{div}_x \varphi(x,p) + \psi(x,\lambda))\, d\nu_x^k(\lambda) \\
&\quad + \left(\nabla\Phi(x), \int_p^{+\infty} (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,p))\, d\nu_x^k(\lambda)\right), \qquad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Из лемм 5, 6 и финитности функции $\Phi(x)$ следует компактность последовательности распределений $\Phi(x)\mu^k$, $k \in \mathbb{N}$, в H_2^{-1}. Далее, из финитности функции $\Phi(x)$ вытекает, что последовательности

$$\begin{aligned}
&k \to \Phi(x)\int_p^{+\infty} (\operatorname{div}_x \varphi(x,p) + \psi(x,\lambda))\, d\nu_x^k(\lambda), \\
&k \to \left(\nabla\Phi(x), \int_p^{+\infty} (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,p))\, d\nu_x^k(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

ограничены в $L^2(\Omega)$ и, по полной непрерывности вложения $L^2(\Omega)$ в H_2^{-1} (см., например, [8]), также компактны в H_2^{-1}. Итак, последовательность распределений $\mathcal{L}_p^k$ компактна в H_2^{-1}. Пусть $p \in [-M, M]$,

$$\begin{aligned}
u^k(x,\lambda) &= \nu_x^k((\lambda, +\infty)), \qquad u^0(x,\lambda) = \nu_x^0((\lambda, +\infty)), \\
U_\lambda^k(x) &= u^k(x,\lambda) - u^0(x,\lambda).
\end{aligned}$$

Из формулы интегрирования по частям следуют равенства

$$\int_p^{+\infty} (\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,p))\, d\nu_x^k(\lambda) = \int_p^M \frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda} u^k(x,\lambda)\, d\lambda$$

для п.в. $x \in \Omega$. Поэтому распределения $\mathcal{L}_p^k$ можно переписать в виде:

$$\mathcal{L}_p^k = \int_p^M \operatorname{div}_x\left(\Phi(x)\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda} u^k(x,\lambda)\right) d\lambda$$

(заметим, что по лемме 3 $u^k(x,\lambda) \in L^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$) Пусть $V_p^k(x) = U_p^k(x)\Phi(x)$,

$$\mathcal{B}_p^k = \int_p^M \operatorname{div}_x\left(\Phi(x)\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda}V_\lambda^k(x)\right)d\lambda = \mathcal{L}_p^k - \mathcal{L}_p^0,$$

где

$$\mathcal{L}_p^0 = \int_p^M \operatorname{div}_x\left(\Phi(x)\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda}u^0(x,\lambda)\right)d\lambda.$$

Тогда из компактности последовательности $\mathcal{L}_p^k$, $k \in \mathbb{N}$, в H_2^{-1} и из того, что по лемме 4 при $\lambda \in E$

$$U_\lambda^k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad *\text{-слабо в } L^\infty(\Omega),$$

следует, что

$$\text{при } k\to\infty \quad \mathcal{B}_p^k \to 0 \text{ в } H_2^{-1}. \tag{19}$$

Применяя преобразование Фурье к $\mathcal{B}_p^k$, из (19) получим, что

$$\int_p^M \frac{1}{|\xi|}\left(\xi, F\left(V_\lambda^k\frac{\partial\varphi(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi)\right)d\lambda = \frac{1}{|\xi|}F(\mathcal{B}_p^k)(\xi) \to 0 \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ при } k\to\infty. \tag{20}$$

Действительно, (см. [8]) условие (19) эквивалентно условию:

$$(1+|\xi|)^{-1}F(\mathcal{B}_p^k)(\xi) \to 0$$

при $k\to\infty$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, откуда следует, что при $k\to\infty$ (B – шар $\{\xi\in\mathbb{R}^n \mid |\xi|\le 1\}$)

$$\frac{1}{|\xi|}F(\mathcal{B}_p^k)(\xi) \to 0 \quad \text{в } L^2(\mathbb{R}^n\setminus B). \tag{21}$$

Так как $\operatorname{supp} V_\lambda^k \subset \operatorname{supp}\Phi(x)$ и $\|V_\lambda^k\|_\infty \le \mathrm{const}$, то функции $F\left(V_\lambda^k\frac{\partial\varphi_i(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi)$, $i = 1,\ldots,n$, ограничены равномерно по $\lambda\in[p,M]$, $k\in\mathbb{N}$. Далее, поскольку $V_\lambda^k(\xi) \to 0$ $*$-слабо в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $k\to\infty$, если $\lambda \in E$, то при $k\to\infty$

$$F\left(V_\lambda^k\frac{\partial\varphi_i(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi) \to 0,$$

$i = 1,\ldots,n$, поточечно. Таким образом, по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_p^M \frac{1}{|\xi|}\left(\xi, F\left(V_\lambda^k\frac{\partial\varphi(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi)\right)d\lambda \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{в } L^2(B). \tag{22}$$

Здесь учтена ограниченность при $\xi\in B$ функции $\frac{1}{|\xi|}\xi_i$, $i = 1,\ldots,n$. Из (21) и (22) следует утверждение (20). Пусть $\psi(\xi)\in C(S)$. Умножим (20) на функцию

$\overline{F(V_q^k)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$, $q \in E$, и проинтегрируем по ξ. Используя ограниченность последовательности $V_q^k(x)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, получим, что при $k \to \infty$

$$\int_p^M \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|}\left(\xi, F\left(V_\lambda^k \frac{\partial\varphi(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi)\right)\overline{F(V_q^k)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi\, d\lambda \to 0. \tag{23}$$

По теореме 3, может быть после дополнительного выделения подпоследовательности, для любого $\lambda \in E$ при $k \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|}\left(\xi, F\left(V_\lambda^k \frac{\partial\varphi(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi)\right)\overline{F(V_q^k)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi$$
$$\to \left\langle \mu^{\lambda q}, \left(\xi, \frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right)|\Phi(x)|^2\psi(\xi)\right\rangle = \langle \mu^{\lambda q}, A(x,\xi,\lambda)|\Phi(x)|^2\psi(\xi)\rangle,$$

где $\mu = \{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ – H-мера на $\Omega \times S$, соответствующая выделенной подпоследовательности ν_x^k. Отсюда, по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{k\to\infty}\int_p^M \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\xi|}\left(\xi, F\left(V_\lambda^k \frac{\partial\varphi(\cdot,\lambda)}{\partial\lambda}\right)(\xi)\right)\overline{F(V_q^k)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi\, d\lambda$$
$$= \int_p^M \langle \mu^{\lambda q}, A(x,\xi,\lambda)|\Phi(x)|^2\psi(\xi)\rangle\, d\lambda.$$

Тогда из (23) при $p \in [-M, M]$, $q \in E$

$$\int_p^M \langle \mu^{\lambda q}, A(x,\xi,\lambda)|\Phi(x)|^2\psi(\xi)\rangle\, d\lambda = 0. \tag{24}$$

По теореме 3 функция $\lambda \to \langle \mu^{\lambda q}, A(x,\xi,\lambda)|\Phi(x)|^2\psi(\xi)\rangle$ непрерывна на E и из (24) следует, что при $p \in [-M, M] \cap E$, $q \in E$

$$\langle \mu^{pq}, A(x,\xi,p)|\Phi(x)|^2\psi(\xi)\rangle = 0.$$

Из произвольности $\Phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi(\xi) \in C(S)$ имеем $A(x,\xi,p)\mu^{pq} = 0$ для всех $p, q \in E$ (при $|p| > M$ для всех $k \in \mathbb{N}$ $U_p^k(x) = 0$ п.в. в Ω и, следовательно, для любого $q \in E$ $\mu^{pq} = 0$), что и требовалось доказать.

§4. О предкомпактности ограниченных последовательностей м.р. в топологии сильной сходимости

Будем называть уравнение (1) невырожденным, если для п.в. $x \in \Omega$ и при всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in S$ функции

$$\lambda \mapsto A(x,\xi,\lambda) = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial\varphi_i(x,\lambda)}{\partial\lambda}$$

не равны тождественно нулю ни на каком множестве положительной меры Лебега. Из теоремы 4 в случае, когда уравнение (1) невырождено, вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть ν_x^k – ограниченная последовательность м.р., сходящаяся слабо к мерозначной функции ν_x^0. Тогда последовательность ν_x^k сходится к ν_x^0 сильно.*

Доказательство. Пусть $E = E(\nu_x^0)$ – множество, определенное перед леммой 4, ν_x^r, $k = k_r$ – подпоследовательность, для которой определена H-мера $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$. Покажем, что при $p \in E$ $\mu^{pp} = 0$. Пусть $p \in E$, $\varepsilon > 0$, $K \subset \Omega$ – компактное подмножество. По теореме 3 существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при $\lambda \in V(\delta) = \{\lambda \in E \mid |\lambda - p| < \delta\}$

$$\mathrm{Var}(\mu^{\lambda p} - \mu^{pp})(K) < \varepsilon. \tag{25}$$

Пусть $f(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } A(x,\xi,\lambda) = 0, \\ 1, & \text{если } A(x,\xi,\lambda) \neq 0. \end{cases}$ Тогда по теореме 4 при $\lambda \in E$

$$\int_{K\times S} f(x,\xi,\lambda)\, d\mu^{\lambda p}(x,\xi) = 0. \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, что при $\lambda \in V(\delta)$

$$\int_{K\times S} f(x,\xi,\lambda)\, d\mu^{pp}(x,\xi) = \int_{K\times S} f(x,\xi,\lambda)\, d(\mu^{pp} - \mu^{\lambda p})(x,\xi) \leq \varepsilon.$$

Интегрируя последнюю оценку по $\lambda \in V(\delta)$, получим, что

$$\frac{1}{2\delta}\int_{p-\delta}^{p+\delta}\left(\int_{K\times S} f(x,\xi,\lambda)\, d\mu^{pp}(x,\xi)\right) d\lambda \leq \varepsilon$$

или, изменив порядок интегрирования,

$$\int_{K\times S} F(x,\xi)\, d\mu^{pp}(x,\xi) \leq \varepsilon, \tag{27}$$

где

$$F(x,\xi) = \frac{1}{2\delta}\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x,\xi,\lambda)\, d\lambda.$$

По условию теоремы при $(x,\xi) \in D \times S$, где $D \subset \Omega$ – некоторое множество полной меры Лебега, множество $\{\lambda \in \mathbb{R} \mid A(x,\xi,\lambda) = 0\}$ имеет нулевую меру Лебега. Следовательно, при $(x,\xi) \in D \times S$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ $f(x,\xi,\lambda) = 1$ и, значит, при $(x,\xi) \in D \times S$ $F(x,\xi) = 1$. Тогда из (27)

$$\mu^{pp}((K \cap D) \times S) \leq \varepsilon. \tag{28}$$

Из (9) и равенства Планшереля следует, что при $p \in E$, $\Phi(x) \in C_0(\Omega)$

$$\langle \mu^{pp}, |\Phi(x)|^2 \rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} U_p^r(x)\overline{U_p^r(x)}|\Phi(x)|^2\, dx \leq c\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(x)|^2\, dx,$$

$c = \mathrm{const}$ и $\mathrm{pr}_\Omega\, \mu^{pp} \leq c \cdot \mathrm{mes}$; mes – мера Лебега на Ω. Отсюда следует, что $\mu^{pp}((K \setminus D) \times S) \leq c \cdot \mathrm{mes}(K \setminus D) = 0$ и из (28) $\mu^{pp}(K \times S) = \mu^{pp}((K \cap D) \times S) \leq \varepsilon$.

Так как $\varepsilon > 0$ и компакт $K \subset \Omega$ произвольны, то при $p \in E$ $\mu^{pp} = 0$. Отсюда вытекает, что при $k \to \infty$

$$u^k(x,p) = \int_p^{+\infty} d\nu_x^k(\lambda) \to u^0(x,p) = \int_p^{+\infty} d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Действительно, по определению H-меры и равенству Планшереля при $\Phi(x) \in C_0(\Omega)$, $\lambda \in E$

$$\lim_{k\to\infty} \|U_p^k \Phi\|^2_{2,\Omega} = \langle \mu^{pp}, |\Phi(x)|^2 \rangle = 0.$$

Итак, при $p \in E$

$$\int \theta(\lambda - p)\, d\nu_x^k(\lambda) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int \theta(\lambda - p)\, d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}(\Omega). \tag{29}$$

($\theta(u)$ – функция Хевисайда) Так как любая непрерывная функция может быть равномерно на любом компакте аппроксимирована конечными линейными комбинациями функций вида $\lambda \to \theta(\lambda - p)$, $p \in E$, то из (29) для всех $p(\lambda) \in C(\mathbb{R})$

$$\int p(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int p(\lambda)\, d\nu_x^0(\lambda) \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}(\Omega),$$

а значит, и в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, т.е. подпоследовательность ν_x^k сходится к ν_x^0 сильно. Наконец, поскольку при любом возможном выборе подпоследовательности ν_x^k предельная мерозначная функция определяется однозначно, то и исходная последовательность ν_x^k также сильно сходится к ν_x^0. Теорема доказана.

Теорема 5 с учетом теоремы 2 может быть сформулирована иначе: любое ограниченное множество м.р. предкомпактно в топологии сильной сходимости.

Следствие 1. *Любая ограниченная в $L^\infty(\Omega)$ последовательность о.р. $u_k(x)$ уравнения* (1) *содержит сходящуюся в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ подпоследовательность.*

Заметим, что, как показано в [4], при $n = 2$ утверждение следствия 1 может быть доказано методом компенсированной компактности.

Замечание 2. Условие невырожденности уравнения (1) в теореме 5 существенно. Действительно, пусть $\varphi(x,u) = \varphi(u)$, $\psi(x,u) = 0$ и существует $\xi \in S$ и интервал $(a,b) \subset \mathbb{R}$, такие, что $(\xi, \varphi'(u)) = 0$ при $u \in (a,b)$. Тогда для любой функции $h(s)$ со значениями в отрезке $[a,b]$ функция $u(x) = h((\xi,x))$ является, очевидно, о.р. уравнения (1). Пусть $h_k(s) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \sin(ks)$. Тогда соответствующая последовательность $u_k(x)$ сходится слабо к $\frac{a+b}{2}$ в $L^\infty(\Omega)$, но не имеет предельных точек в $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Замечание 3. Для ограниченной в $L^\infty(\Omega)$ последовательности функций $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих (1) в смысле распределений (но не более того), утверждение следствия 1 в общем случае неверно (и, значит, неверны утверждения 5 и 4).

Действительно, пусть $n = 1$, $\Omega = \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$(u^2)' = 0. \tag{30}$$

Очевидно, уравнение (30) невырождено. Пусть $u(x) = 1$, если целая часть x четна и $u(x) = -1$ в противном случае. Положим при $k \in \mathbb{N}$ $u_k(x) = u(kx)$. Тогда, $u_k^2(x) \equiv 1$ и $u_k(x)$ удовлетворяет (30) в смысле распределений. Однако, как легко проверить, последовательность $u_k(x)$ не имеет предельных точек в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Список литературы

1. *Tartar L.* H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1990. V. 115A. №3–4.
2. *Кружков С.Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР. 1969. Т. 187. №1. С. 29–32.
3. *Кружков С.Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Матем. сб. 1970. Т. 81(123). С. 228–255.
4. *Tartar L.* Compensated compactness and applications to partial differential equations // Research notes in mathematics, nonlinear analysis, and mechanics. Heriot–Watt Symp. 1979. V. 4. P. 136–212.
5. *DiPerna R.J.* Generalized solutions to conservation laws, in system of nonlinear partial differential equations // NATO ASI Series / ed. J.M.Ball: D.Reidel Pub. Co. 1983.
6. *Дакоронья Б.* Слабая непрерывность и слабая полунепрерывность снизу нелинейных функционалов // УМН. 1989. Т. 44. №4. С. 35–98.
7. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Гостехиздат, 1957.
8. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. М.: Мир, 1980.

Новгород

Поступила в редакцию
12.11.1992