В. Г. Чередниченко, Рациональная интерполяция, аналитическое решение, *Сиб. матем. журн.*, 2002, том 43, номер 1, 188–193

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2002. Том 43, № 1

УДК 511.3

РАЦИОНАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В. Г. Чередниченко

Аннотация: Классическая задача интерполяции рациональными функциями сводится, как известно, к системе линейных алгебраических уравнений. Однако получаемая система обычно трудна как для качественного анализа проблемы, так и для численной реализации. Предлагается новый подход, обобщающий полиномиальную интерполяцию до рациональной в постановке задачи и в способе ее исследования. Решение доведено до явных формул. Приведены простые достаточные условия существования решения, описано множество неразрешимых задач. Создана основа для эффективной численной реализации. По современной терминологии теории функций исследуются многоточечные аппроксимации Паде. Библиогр. 2.

Классическая задача интерполяции рациональными функциями сводится, как известно, к линейной системе алгебраических уравнений. Однако эта система затруднительна как для качественного анализа проблемы, так и для численной реализации. Предлагается новый подход, естественным способом обобщающий полиномиальную интерполяцию до рациональной, как в плане постановки задачи, так и в способе ее исследования, решение доведено до явных формул. Приведены простые достаточные условия существования решения, описано множество неразрешимых задач. Создана основа для более эффективной численной реализации задачи. По современной терминологии теории функций исследуются многоточечные аппроксимации Паде [1]. Частный случай рассмотрен автором ранее [2].

Введем полиномы $Q_m(z)$, $P_n(z)$ степеней не больше m, n соответственно, а также рациональную функцию

$$R(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}, \tag{1}$$

степень которой обозначим через (m,n).

Задача 1. Даны неотрицательные целые числа m, n. Заданы пары комплексных чисел

$$(z_k, w_k), \quad k = 1, 2, \dots, m+n+1, \tag{2}$$

z_k всегда различны. Найти рациональную функцию $R(z)$ вида (1) по условиям

$$R(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, m+n+1. \tag{3}$$

Задача 2. Пусть m, n — неотрицательные целые числа и $m + n = N$ фиксировано. Заданы пары чисел (2). Найти рациональные функции $R(z)$ вида (1) по условиям (3).

Иными словами, отыскиваются решения задачи 1 — рациональные функции степеней $(m, N-m)$, $m = N, N-1, \dots, 0$, при $m = N$ получаем классическую задачу полиномиальной интерполяции.

Утверждение 1. *Задача 1 имеет не более одного решения, задача 2 — не более $N+1$ решений. Кроме того, если найдено решение степени (m_0, n_0), $m_0 + n_0 < N$, то нет других решений задачи 2 степеней*

$$(m_0 + s, n_0), (m_0 + s - 1, n_0 + 1), \dots, (m_0, n_0 + s), \quad s = N - (m_0 + n_0).$$

Эти важные факты сразу следуют из свойства единственности для полиномов. Отметим, что рациональные функции считаются равными, если их разность, быть может, имеющая устранимые особые точки, равна нулю.

Утверждение 2. *Пусть среди w_k в (2) имеется p одинаковых, $w_k = w$, $w \neq 0$, и l нулей. Для существования нетривиального ($R = \mathrm{const}$) решения задачи 1 необходимо, чтобы $l \le m$, $p \le \max(m, n)$.*

Действительно, если $l > m$, то $R \equiv 0$ и, значит, остальные w_k тоже равны нулю, в противном случае решений задачи нет; если $p > \max(m, n)$, то $R \equiv w$, но тогда и остальные w_k равны w, иначе решений нет.

Стандартный способ исследования задачи 1 состоит в приведении ее к системе из $m + n + 1$ линейных уравнений:

$$Q_m(z_k) = w_k P_n(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, m + n + 1, \tag{4}$$

относительно $m + n + 2$ коэффициентов полиномов Q_m, P_n. Система является однородной и поэтому имеет нетривиальные решения. Найденные полиномы Q_m, P_n дают решение задачи 1 при условии

$$P_n(z_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m + n + 1, \tag{5}$$

нарушение этого условия может привести к несуществованию решения интерполяционной задачи. Так как полином $P_n(z)$ неизвестен, это условие не является эффективным. Ранг системы в зависимости от данных (2) может быть произвольным. Качественное и численное исследование системы весьма затруднительно [1]. Даже простые утверждения 1, 2 таким путем получить сложно.

Пример 1. Пусть задача 1 решается в классе (1, 2) для данных

$$\left(z_k, \frac{1}{z_k}\right), \quad k = 1, 2, 3; \quad (z_4, w_4).$$

Если $w_4 \neq 1/z_4$, то ранг соответствующей системы равен четырем и

$$Q_1(z) = c(z - 4), \quad P_2(z) = c(z - 4)z, \quad R(z) = 1/z.$$

Решение системы (4) имеется, а решения задачи нет, условие (5) нарушено. Если же $w_4 = 1/z_4$, то ранг равен трем и

$$Q_1 = c_2 z - c_1, \quad P_2 = (c_2 z - c_1)z, \quad R(z) = 1/z.$$

Решение системы привело к решению задачи 1, хотя и здесь при $c_2 = 1$, $c_1 = 4$ условие (5) нарушено.

Если в (2) $w_k = 0$ при некотором k, то $Q_m = (z - z_k)Q_{m-1}$ и приходим к задаче 1 уже меньшей размерности. Значит, можем считать, что числа в (2) отличны от нуля. Иногда вместо (3) удобнее исследовать задачу

$$\frac{P_n(z_k)}{Q_m(z_k)} = \frac{1}{w_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m + n + 1,$$

т. е. отыскиваем рациональную функцию степени (n, m), а не (m, n), как в первоначальной постановке.

Данные (2) задачи 1 назовем *особыми*, если для них решения не существует. В этом случае $P_n(z_k) = 0$ хотя бы при одном значении k. Отсюда и из вида системы (4) следует $Q_m(z_k) = 0$, и наоборот.

Утверждение 3. *Все особые случаи задачи 1 для функции $R(z)$ степени (m,n), $1 \le m \le n$, задаются следующим образом. Выделим r точек из z_k, считаем, что это $z_1, z_2, \dots z_r$, и возьмем целое число r_1, $r \le r_1 \le m$. Пусть рациональная функция $R_1(z)$ степени $(m-r_1, n-r_1)$ и данные задачи 1 таковы, что $R_1(z_k) = w_k$, $k = r+1, \dots, m+n+1$, но хотя бы при одном k, $1 \le k \le r$, $R_1(z_k) \ne w_k$, тогда имеем особый случай задачи 1.*

Действительно, функция

$$R(z) = R_1(z)\frac{(z-z_1)^{l_1}\dots(z-z_r)^{l_r}}{(z-z_1)^{l_1}\dots(z-z_r)^{l_r}}, \quad l_k \ge 1,\ l_1 + l_2 + \dots + l_r = r_1,$$

дает решение системы (4) при любых $w_1, \dots, w_r$, но не является решением задачи 1.

Приведем алгоритм, на каждом шаге которого степень числителя или знаменателя искомой рациональной функции понижается по крайней мере на единицу. В итоге будет построено решение задачи 1 либо доказана ее неразрешимость.

Считаем, что $m \ge n$ в (1), и пусть

$$w_1 = w_2 = \dots = w_p, \quad 1 \le p \le m.$$

(Если $p > m$, то применяем утверждение 2.) Полином $w_1 P_n(z) - Q_m(z)$ степени не выше m имеет корни $z, z_2, \dots, z_p$, и, значит,

$$w_1 P_n(z) - Q_m(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_p)Q_{m-p}(z),$$

где $Q_{m-p}(z)$ — неизвестный полином. Первые p условий в (3) учтены, оставшиеся принимают вид

$$\frac{Q_{m-p}(z_k)}{P_n(z_k)} = \lambda_k, \quad \lambda_k = \frac{w_1 - w_k}{(z_k - z_1)\dots(z_k - z_p)}, \quad k = p+1, \dots, m+n+1.$$

Опять имеем задачу 1, но уже меньшей размерности. Если $m - p \ge n$, то снова применяем описанную процедуру, в противном случае решаем задачу для функции P_n/Q_{m-p}. Действуя таким образом, находим решение задачи 1 либо убеждаемся в ее неразрешимости.

Пример 2. Решим интерполяционную задачу

$$\frac{Q_2(z_k)}{P_1(z_k)} = w_k; \quad (1,-2),\ (-2,-2),\ (-1,2),\ (2,2).$$

Имеем

$$(-2)P_1(z) - Q_2(z) = (z-1)(z+2), \quad z = z_k,\ k = 3,4,\ Q_0 = 1,$$

$$\frac{1}{P_1(z_3)} = 2, \quad \frac{1}{P_1(z_4)} = -1, \quad P_1(z) = -\frac{z}{2}, \quad Q_2 = -z^2 + 2, \quad \frac{Q_2}{P_1} = \frac{2z^2 - 4}{z}.$$

Заметим, что при построении решения таким способом используются не только классические разности типа $\frac{w_k - w_1}{z_k - z_1}$ и им обратные, но и разности вида λ_k и им обратные.

Предлагается новый подход к задачам 1, 2. По данным (2) построим два полинома:

$$R_{N+1}(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{N+1}) \tag{6}$$

и классический интерполяционный полином $W_q(z)$, степень которого равна q, $q \le N$, по условиям

$$W_q(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2 \ldots, N+1. \tag{7}$$

Эти полиномы содержат всю информацию о задачах 1, 2.

Задачу 2 сформулируем так: найти полиномы

$$Q_m,\ P_{N-m}, \quad m = N, N-1, \ldots, 0,$$

по условиям

$$\frac{Q_m(z_k)}{P_{N-m}(z_k)} = W_q(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N+1. \tag{8}$$

При $m = N$, $N-1, \ldots, q$ полиномы $Q_m = W_q$, $P_{N-m} = 1$ дают решение задачи 2 и согласно утверждению 1 других решений нет. Поэтому считаем, что в (8) $m = q-1$, $q-2, \ldots, 0$.

Из (8) получаем

$$P_{N-m}(z_k)W_q(z_k) - Q_m(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N+1.$$

У полинома степени $N - m + q$ известны $N+1$ корней, поэтому

$$P_{N-m}(z)W_q(z) - Q_m(z) = T_{q-m-1}(z)R_{N+1}(z). \tag{9}$$

Задача 3 (о трех полиномах). Найти полиномы P_{N-m}, Q_m, T_{q-m-q} по условию (9), где R_{N+1}, W_q — заданные полиномы (6), (7).

Обозначим

$$\frac{R_{N+1}}{W_q} = A^{(1)}_{N+1-q} + \frac{H_{q-1}}{W_q}, \quad \frac{W_q}{H_{q-1}} = A^{(2)}_1 + \frac{H_{q-2}}{H_{q-1}}, \ldots, \quad \frac{H_2}{H_1} = A^{(q)}_1 + \frac{H_0}{H_1}. \tag{10}$$

Итак, построены полиномы W_q, $H_{q-1}, \ldots$, H_0.

При $m = q-1$, полагая $T_0 = 1$, получаем

$$P_{N-m} - \frac{Q_m}{W_q} = A^{(1)}_{N+1-q} + \frac{H_{q-1}}{W_q},$$

т. е. $Q_m = -H_{q-1}$, $P_{N-m} = A^{(1)}_{N+1-q}$. Решение выписано явно; удивительно, что этот факт не был замечен ранее.

В общем случае имеем

$$P_{N-m} - \frac{Q_m}{W_q} = \frac{T_{q-m-1}R_{N+1}}{W_q}. \tag{11}$$

Оказывается, можно определить T_{q-m-1} (с точностью до постоянного множителя), не находя P_{N-m}, Q_m. Своеобразие представления (11) заключено в том, что остаток от деления двух полиномов имеет вид Q_m/W_q, хотя в общем случае должен быть Q_{q-1}/W_q. Приравнивая нулю коэффициенты при z в степенях $m+1, m+2, \ldots$, $q-1$ остатка при делении двух полиномов справа, получаем однородную систему из $q - m - 1 \le n - 1$ уравнений с $q - m$ неизвестными. Если стандартная система (4) состоит из $m + n + 1$ уравнений, то на этом пути система содержит не более $\min(n-1, m-1)$ уравнений. Однако не остановимся на этом и извлечем из (11) важное (и удивительное) следствие.

Опишем алгоритм решения задачи 3.

Пусть $m = q - 2$, тогда (9) принимает вид

$$P_{N-m}W_q - Q_m = T_1 R_{N+1},$$

откуда, используя первое равенство в (10), получаем

$$P_{N-m} - \frac{Q_m}{W_q} = T_1\left(A^{(1)}_{N+1-q} + \frac{H_{q-1}}{W_q}\right),$$

$$\big(P_{N-m} - T_1 A^{(1)}_{N+1-q}\big)W_q - Q_m = T_1 H_{q-1}.$$

Отсюда видим, что полином перед W_q имеет нулевую степень и можно положить $P_{N-m} - T_1 A^{(1)}_{N+1-q} = 1$. Теперь надо определить два полинома Q_m, T_1:

$$W_q - Q_m = T_1 H_{q-1}, \quad \frac{W_q}{H_{q-1}} - \frac{Q_m}{H_{q-1}} = T_1.$$

Используем второе равенство из (10), это дает

$$Q_m = H_{q-2}, \quad T_1 = A^{(2)}, \quad P_{N-m} = 1 + A^{(2)}_1 A^{(1)}_{N+1-q}.$$

Далее полагаем $m = q - 3$ и продолжаем процесс.

Утверждение 4. *Числитель $Q_m(z)$ искомой рациональной функции определяется формулой*

$$Q_m = (-1)^{q-m} H_m, \quad m = q-1, q-2, \dots, 0,$$

где полиномы H_m задаются соотношениями (10).

Анализируя алгоритм, можно записать формулу для P_{N-m} при всех m, однако имеется и другой подход. Считаем, что все w_k в (2) отличны от нуля.

Утверждение 5. *Знаменатель $P_{N-m}(z)$ искомой рациональной функции определяется как решение задачи полиномиальной интерполяции:*

$$P_{N-m}(z_k) = \frac{Q_m(z_k)}{W_q(z_k)}, \quad z_k \in J_{N-m+1}, \; m = q-1, \; q-2, \dots, 0,$$

где J_{n-m+1} — произвольная выборка без повторов из $z_1, z_2, \dots, z_{N+1}$ в количестве $N - m + 1$ точек.

Если вместо W_q ввести полином V_p, $p \le N$:

$$V_p(z_k) = \frac{1}{w_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1,$$

то вместо (8) *получаем*

$$\frac{P_{N-m}(z_k)}{Q_m(z_k)} = V_p(z_k), \quad k = 1, 2, \dots, N+1,$$

и полиномы P_{N-m} определяются согласно утверждению 4.

Утверждение 6 (достаточное условие разрешимости). *Пусть при фиксированном m, $m = q-1, q-2, \dots, 0$,*

$$H_m(z_k) \ne 0, \quad k = 1, 2, \dots, N+1, \tag{9}$$

тогда решение степени $(m, N-m)$ задачи 2 *существует (и может быть найдено указанным способом).*

Утверждение 7. *Пусть при фиксированном m, $m = q-1, q-2, \dots, 0$, условие* (9) *нарушено, т. е.*

$$H_m(z_{k_s}) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, l, \ 1 \le k_s \le N+1,$$

но

$$\lim_{z \to z_{k_s}} \frac{H_m(z)}{P_{N-m}(z)} = w_{k_s}, \quad s = 1, 2, \dots, l.$$

Тогда решение степени $(m, N-m)$ *задачи* 2 *существует. Если хотя бы одно из этих условий нарушено, то задача* 2 *неразрешима для этой степени.*

Пример 3. Используем данные из примера 2, тогда

$$R_4 = z^4 - 5z^2 + 4, \quad W_3 = z^3 - 3z \quad (N = q = 3),$$

поэтому

$$\frac{Q_3}{P_0} = W_3, \quad \frac{Q_2}{P_1} = \frac{2z^2-4}{z}, \quad \frac{Q_1}{P_2} = \frac{2z}{z^2-2}, \quad \frac{Q_0}{P_3} = \frac{4}{z^3-3z}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
2. *Cherednichenko V. G.* Determination of the rational function poles. I // Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, N 2. P. 121–126.

Статья поступила 14 мая 2001 г.

Чередниченко Виктор Григорьевич
Сибирский университет потребительской кооперации,
пр. К. Маркса, 26, Новосибирск 630087
cheredvg@sibupk.nsk.su