È. M. Galeev, Approximation of classes of periodic functions of several variables by nuclear operators, *Mat. Zametki*, 1990, Volume 47, Issue 3, 32–41

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЯДЕРНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Э. М. Галеев

Пусть $\mathbf{T}^n = [-\pi, \pi]^n$ — n-мерный тор. Обозначим через $\tilde{L}_p = \tilde{L}_p(\mathbf{T}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, пространство периодических с периодом 2π по каждому аргументу функций $x(t) = x(t_1, \ldots, t_n)$ с векторной нормой (см. [1, с. 237]). Для упрощения формулировок будем рассматривать только функции с нулевыми средними по всем аргументам. Для множества $K \subset \overset{0}{\mathbf{Z}}{}^n$ будем обозначать $x(K, t) = \sum_{k \in K} x_k e^{i(k, t)}$. Каждому вектору $s \in \mathbf{N}^n$ сопоставим подмножество $\square_s \subset \overset{0}{\mathbf{Z}}{}^n$ по следующему правилу:

$$\square_s = \{k \in \overset{0}{\mathbf{Z}}{}^n \mid 2^{s_j - 1} \leqslant |k_j| < 2^{s_j}, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда $x(t) = \sum_k x_k e^{i(k, t)} = \sum_s \delta_s x(t)$, где $\delta_s x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i(k, t)}$.

Для векторов $r \in \mathbf{R}^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, введем классы функций $\tilde{W}_p^r = \{x(\cdot) \mid \|x^{(r)}\|_p \leqslant 1\}$ и класс О. В. Бесова

$$B_{p,\theta}^r = \left\{x(\cdot) \mid \|x\|_{B_{p,\theta}^r} = \left(\sum_{s \in \mathbf{N}^n} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \leqslant 1\right\}, \quad 1 \leqslant \theta \leqslant \infty.$$

Число элементов во множестве $A \subset \mathbf{Z}^n$ будем обозначать card A или $|A|$. Для $r \in \mathbf{R}$ обозначим $[r]$ — целую часть числа r, $r_+ = r$ при $r \geqslant 0$ и $r_+ = 0$ при $r < 0$.

Укажем на работы автора [2—3], монографию В. Н. Темлякова [4] и статью Динь-Зунга [5], в которых изучается приближение в пространстве $\tilde{L}_q$ классов $\tilde{W}_p^r$, $\tilde{H}_p^r$, $B_{p,\theta}^r$, их пересечений оператором Фурье и поперечники этих классов. Там же можно найти ссылки на предшествующие работы. Однако оператор Фурье не всегда является оптимальным среди операторов наилучшего приближения и даже среди операторов наилучшего линейного приближения. Поэтому встает вопрос о нахождении как можно более широкого множества операторов, содержащих операторы Фурье, такого, что наилучшим (в смысле порядка приближения) среди этого множества операторов будет оператор Фурье. Первые результаты в этом направлении получены В. Н. Темляковым (см. [6, 7]).

Он доказал, что оператор Фурье дает при $1 < p \leqslant q < \infty$ наилучшее приближение классов $\tilde{H}^r_p$ и $\tilde{W}^r_p$ в пространстве $\tilde{L}_q$ среди всех операторов ортогонального проектирования, а также среди более широкого класса операторов, чем ортопроекторы, а именно среди линейных операторов P с ограничением

$$\| Pe^{i(k, \cdot)} \|_2 \leqslant C \qquad \forall k \in \overset{0}{\mathbf{Z}}{}^n \qquad (C \geqslant 1). \tag{1}$$

Приведем некоторые другие условия на линейные операторы, при которых оператор Фурье дает оптимальное по порядку приближение, не привлекая при этом дополнительное пространство $\tilde{L}_2$ и понятие ортогональности, которое имеет смысл только в гильбертовом пространстве.

Ядерным N-поперечником множества W в банаховом пространстве X назовем величину

$$\mathfrak{N}_N (W, X) = \inf_{P \in \mathcal{P}(N, X)} \sup_{x \in W} \| x - Px \|_X,$$

где $\mathcal{P} (N, X)$ — множество ядерных операторов, у которых ядерная норма $N (P) \leqslant N$ $(N > 0)$.

Отметим, что определение ядерного поперечника непосредственно не связано с размерностью приближающего подпространства, а N может принимать и нецелые значения.

Напомним (см. [8, с. 98]), что P: $X \to X$ — линейный непрерывный оператор — называется ядерным, если он представим в виде

$$Px = \sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l, x \rangle f_l, \tag{2}$$

где $f_l \in X$, $\lambda_l \in X^*$ (X^* — пространство, сопряженное к X) и $\sum_{l=1}^{\infty} \| \lambda_l \|_{X^*} \| f_l \|_X < \infty$; по определению $N (P) = \inf \sum_{l=1}^{\infty} \| \lambda_l \| \cdot \| f_l \|$ (нижняя грань берется по всевозможным представлениям оператора в виде (2), т. е. ядерным представлениям).

Если P — линейный непрерывный оператор, действующий на подпространство размерности N, то существует (см. [8, с. 17—18]) конечное представление $Px = \sum_{l=1}^{N} \langle \lambda_l, x \rangle f_l$, где $f_l \in X$, $\lambda_l \in X^*$, $\| \lambda_l \|_{X^*} \leqslant \| P \|$, $\| f_l \|_X = 1$. Поскольку $N(P) \leqslant \sum_{l=1}^{N} \| \lambda_l \| \cdot \| f_l \| \leqslant N \| P \|$, то $P \in \mathcal{P} (\| P \| N, X)$.

Если P — ортопроектор на пространство размерности N в пространстве $\tilde{L}_2$, то $\| P \|_2 = 1$ и, следовательно, $P \in \mathcal{P} (N, \tilde{L}_2)$.

Здесь также приводится теорема о приближении класса Бесова $B^r_{p,\theta}$ в пространстве $\tilde{L}_q$ при $1 < q < p < 2$ ядерными операторами, и тем самым определяются ортопроекционные поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ и $\tilde{H}^r_p$. Оценка сверху в этой теореме следует из приближения этих классов суммами Фурье. При оценке снизу строится функция, которая плохо приближается ядерными операторами. При построении этой функции нам пришлось несколько видоизменить функцию, использованную В. Н. Темляковым при доказательстве оценки снизу приближения суммами Фурье (соответствующая работа сдана в печать В. Н. Темляковым и была любезно представлена автору до выхода в свет).

Для оценки снизу ядерных поперечников нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. *Пусть* $P \in \mathcal{P}(N, \tilde{L}_q)$, $1 < q < \infty$, δ_s — *параллелепипед в* $\mathbf{R}^n$ *с ребрами, параллельными координатным осям,* $\Delta_s = \delta_s \bigcap \square_s$, $s \in \mathbf{N}^n$, $K = \bigcup\limits_{s \in S} \Delta_s$. *Тогда существует константа* C_q, *зависящая только от* q, *такая, что имеется ядерное представление* (2) *оператора* P *и*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \leqslant C_q N.$$

Доказательство. Если $P \in \mathcal{P}(N, \tilde{L}_q)$, то это означает, что существует ядерное представление (2), для которого $\sum_{l=1}^{\infty} \| \lambda_l(\cdot) \|_q \cdot \| f_l(\cdot) \|_q \leqslant 2N$. После применения теоремы Марцинкевича (см. [1, с. 239]) с множителями $\mu_k = 1$, $k \in K$, $\mu_k = 0$, $k \notin K$, к этому представлению получим нужное неравенство:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \| \lambda_l \|_{q'} \| f_l(K, \cdot) \|_q \leqslant$$

$$\leqslant C_q' \sum_{l=1}^{\infty} \| \lambda_l \|_{q'} \| f_l \|_q \leqslant C_q N.$$

Если S_N — оператор Фурье в пространстве $\tilde{L}_q$, отображающий на подпространство размерности N по формуле $S_N x(\cdot) = x(K, \cdot)$, $K \subset \overset{0}{\mathbf{Z}}{}^n$, $|K| = N$, то $S_N \in \mathcal{P}(N, \tilde{L}_q)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\tilde{W}^{\bar{r}}_{\bar{p}} = \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{W}^{r^i}_{p^i}$, $1 < p^i < \infty$, $r^i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, m$,

$G = \operatorname{conv}\{(1/p^i, r^i), \ i = 1, \ldots, m\} + \operatorname{cone}\{(1, 0), (-1, -1)\}$,

$\gamma = \gamma(1/q) = \max\limits_{(1/q, r) \in G} r > 0$, $1 < q < \infty$. *Тогда*

$$\mathfrak{N}_N(\tilde{W}^{\bar{r}}_{\bar{p}}, \tilde{L}_q) \asymp N^{-\gamma(1/q)}.$$

Доказательство. Оценка сверху. Поскольку оператор Фурье S_N, отображающий на пространство $\mathcal{T} = \operatorname{lim}\{e^{ikt}, \ |k| \leqslant [N/2], \ k \neq 0\}$, принадлежит множеству $\mathcal{P}(N, \tilde{L}_q)$, то оценка сверху следует из приближения класса $\tilde{W}^{\bar{r}}_{\bar{p}}$ оператором Фурье (см. [2]):

$$\mathfrak{N}_N(\tilde{W}^{\bar{r}}_{\bar{p}}, \tilde{L}_q) \leqslant \sup_{x(\cdot) \in \tilde{W}^{\bar{r}}_{\bar{p}}} \| x(\cdot) - S_N x(\cdot) \|_q \asymp N^{-\gamma(1/q)}.$$

Оценка снизу. Проведем через точку $(1/q, \gamma(1/q))$, лежащую на границе выпуклого замкнутого множества G, опорную к G прямую. Пусть γ' — тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс. Из построения множества G следует, что $0 \leqslant \gamma' \leqslant 1$.

Возьмем произвольный оператор $P \in \mathcal{P}(N, \tilde{L}_q)$. Положим $\mathcal{K} = \{N, N+1, \ldots, N+[2C_qN]\}$ (C_q — константа из леммы 1). Тогда

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\mathcal{K}, \cdot)\rangle \leqslant C_qN \leqslant |\mathcal{K}|/2.$$

Отсюда вытекает, что существует множество $K \subset \mathcal{K}$ подряд идущих гармоник $|K| = [N^{\gamma'}]$, такое, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \leqslant 2|K|/3. \tag{3}$$

Возьмем функцию $x(t) = a\sum_{k\in K} e^{ikt}$. Поскольку точка $(1/p, r) \in \{(1/p^i, r^i)\ (i = 1, \ldots, m)\}$ лежит не выше опорной прямой, то $r - \gamma'/p \leqslant \gamma - \gamma'/q$ и, следовательно [2, лемма 3], имеем

$$\|x^{(r)}\|_p \asymp aN^{r+\gamma'(1-1/p)} \leqslant aN^{\gamma+\gamma'(1-1/q)}.$$

Значит, $x(\cdot) \in \overline{W}_{\overline{p}}^{\overline{r}}$ при $a \asymp N^{-\gamma-\gamma'(1-1/q)}$. Покажем, что существует точка $\tau \in [-\pi, \pi]$ такая, что

$$\|x(\cdot - \tau) - Px(\cdot - \tau)\|_q \gg N^{-\gamma},$$

и тем самым оценка снизу будет доказана. Такой метод сдвига функции и последующего усреднения использован в работе В. Н. Темлякова [4].

Используя теорему Марцинкевича и неравенство С. М. Никольского, получим

$$\begin{aligned}
&\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_{q,t} = \\
&\quad = \Big\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(t)\Big\|_{q,t} \gg \\
&\quad \gg \Big\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(K, t)\Big\|_{q,t} \gg \\
&\gg N^{-\gamma'/q}\Big\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(K, t)\Big\|_{\infty,t} \gg \\
&\qquad \gg N^{-\gamma'/q}\Big(a|K| - \sum_{l=1}^{\infty}\langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(K, \tau)\Big)
\end{aligned}$$

(при последнем переходе положили $t = \tau$ и отбросили знак модуля). Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{l=1}^{\infty}\langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot - \tau)\rangle f_l(K, \tau)\Big)d\tau = a\sum_{l=1}^{\infty}\langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \overset{(3)}{\leqslant} 2a|K|/3,$$

то существует точка $\tau \in [-\pi, \pi]$, для которой

$$\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_q \gg N^{-\gamma}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, $(1/p^i, r^i) \in (0,1)^n \times \mathbf{R}^n$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\widetilde{W}^{\bar r}_{\bar p} = \bigcap_{i=1}^m \widetilde{W}^{r^i}_{p^i}$, $G = \operatorname{conv}\{(1/p^i, r^i),\ i = 1, \ldots, m\} + \operatorname{cone}\{(e_j, 0), (-e_j, -e_j),\ j = 1, \ldots, n\}$, $e_1, \ldots, e_n$ — *канонический базис в* $\mathbf{R}^n$, $G_q = \{r \in \mathbf{R}^n \mid (1/q, r) \in G\}$, $G_q \cap \overset{0}{\mathbf{R}}{}^n_+ \neq \varnothing$. *Тогда*

$$\mathfrak{R}_N(\widetilde{W}^{\bar r}_{\bar p}, \widetilde{L}_q) \asymp (N^{-1}\log^\nu N)^{1/\omega},$$

где ω — *значение, а* ν — *размерность аффинной оболочки множества решений задачи*

$$(s, 1) \to \sup;\ s \geqslant 0,\ (r, s) \leqslant 1 \quad \forall r \in G_q.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из приближения класса периодических функций многих переменных $\widetilde{W}^{\bar r}_{\bar p}$ оператором Фурье $S^{G_q}_\mu$, построенным в работе [2]. Оператор $S^{G_q}_\mu$ сопоставляет каждой функции $x(t) = \sum x_k e^{i(k,t)}$ ее частную сумму $\sum_{s \in \mu S_q} \delta_s x(t)$, где $\mu S_q = \{s \in \mathbf{N}^n \mid (r, s) \leqslant \mu\ \forall r \in G_q\}$. Величина μ выбирается из условия $\mu^\nu 2^{\mu\omega} = N$, тогда (см. [9]) число гармоник в операторе Фурье будет порядка N и, значит,

$$\mathfrak{R}_N(\widetilde{W}^{\bar r}_{\bar p}, \widetilde{L}_q) \leqslant \sup_{x \in \widetilde{W}^{\bar r}_{\bar p}} \| x - S^{G_q}_\mu \|_q \overset{[1]}{\asymp} 2^{-\mu} \asymp (N^{-1}\log^\nu N)^{1/\omega}.$$

Оценка снизу. Возьмем произвольный оператор $P \in \mathcal{P}(N, \widetilde{L}_q)$. Положим $S = \{s \in \mathbf{N}^n \mid (r, s) \leqslant \mu\ \forall r \in G_q\}$, $\mathcal{K} = \bigcup_{s \in S} \square_s$. Выберем величину μ так, чтобы $|\mathcal{K}| = \sum_{s \in S} 2^{(s,1)} \geqslant C'\mu^\nu 2^{\mu\omega} > 2C_qN$ (C_q — константа из леммы 1) и $N \asymp \mu^\nu 2^{\mu\omega}$. Тогда

$$\sum_{l=1}^\infty \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\mathcal{K}, \cdot)\rangle \leqslant C_qN \leqslant |\mathcal{K}|/2.$$

Отсюда вытекает, что существует $s \in S$, для которого

$$\sum_{l=1}^\infty \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\square_s, \cdot)\rangle \leqslant |\square_s|/2. \tag{4}$$

Предположим, что $\max\limits_{r \in G_q}(r, s) = (\gamma, s)$, $\gamma \in G_q$. Это означает, что функционал $s \in \mathbf{R}^n$ разделяет точку γ и выпуклое замкнутое множество G_q, при этом γ принадлежит границе множества G_q и $(\gamma, s) \leqslant \mu$. Достроим функционал s до функционала $(b, s) \in \mathbf{R}^{2n}$, разделяющего точку $(1/q, \gamma)$ и выпуклое замкнутое множество G. Имеем

$$\langle (b, s), (1/p, r)\rangle \leqslant \langle (b, s), (1/q, \gamma)\rangle \quad \forall\ (1/p, r) \in G. \tag{5}$$

Так как направления $(e_j, 0)$, $(-e_j, -e_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ являются рецессивными для множества G, то $b + s \geqslant 0$, $b \leqslant 0$ $(b = b(s))$. Из неравенства (4) следует, что существует множество

$$K = \{k \in \overset{0}{\mathbf{Z}}{}^n \mid 2^{s_j - 1} + \bar k \leqslant |k_j| < 2^{s_j - 1} + \bar k + 2^{-b_j - 1},$$

$$\operatorname{sign} k_j = \operatorname{const}(j),\ j = 1, \ldots, n\},\ |K| \asymp 2^{-(b, 1)},$$

такое, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \leqslant 2|K|/3 \tag{6}$$

при некотором $\bar{k} \in \mathbf{Z}^n$, $0 \leqslant \bar{k}_j \leqslant 2^{s_j-1} - 2^{-b_j-1}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим функцию $x(\cdot) = a\sum_{k\in K} e^{i(k,t)}$. По лемме 3 работы [2] для точек $(1/p, r) \in \{(1/p^i, r^i),\ i = 1, \ldots, m\}$ имеем

$$\|x^{(r)}\|_p \asymp a2^{(r,s)-(b,1-1/p)} \overset{(5)}{\leqslant} a2^{(\gamma,s)-(b,1-1/q)} \leqslant a2^{\mu-(b,1-1/q)}.$$

Значит, $x(\cdot) \in \bar{W}_{\bar{p}}^{\bar{r}}$ при $a \asymp 2^{-\mu+(b,1-1/q)}$. С другой стороны, как и при доказательстве теоремы 1, используя теорему Марцинкевича и неравенство С. М. Никольского, получим

$$\begin{aligned}
&\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_{q,t} = \\
&\quad = \|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(t)\|_{q,t} \geqslant \\
&\quad \geqslant \|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\|_{q,t} \geqslant \\
&\quad \geqslant 2^{(b,1/q)}\|x(t-\tau) - \sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,t)\|_{\infty,t} \geqslant \\
&\quad \geqslant 2^{(b,1/q)}\left(a|K| - \sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right)
\end{aligned}$$

(при последнем переходе положили $t = \tau$ и отбросили знак модуля). Поскольку

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(K,\tau)\right)d\tau = \\
&\qquad = a\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), f_l(K,\cdot)\rangle \overset{(6)}{\leqslant} \frac{2a}{3}|K|,
\end{aligned}$$

то существует точка $\tau \in \mathbf{T}^n$, для которой

$$\begin{aligned}
\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_q &\geqslant 2^{(b,1/q)}a|K| \asymp 2^{-\mu+(b,1-1/q)+(b,1/q)-(b,1)} \asymp \\
&\asymp 2^{-\mu} \asymp (N^{-1}\log^{\nu} N)^{1/\omega}.
\end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $1 < q \leqslant p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$, $r \in \mathbf{R}^n$, $0 < r_1 = \ldots = r_{\nu+1} < r_{\nu+2} \leqslant \ldots \leqslant r_n$. *Тогда*

$$\mathfrak{R}_N(B_{p,\theta}^r, \tilde{L}_q) \asymp (\log^{\nu} N)^{(1/p-1/\theta)_+}(N^{-1}\log^{\nu} N)^{r_1}.$$

Доказательство. Оценка сверху следует из приближения класса функций $B_{p,\theta}^r$ оператором Фурье $S_{\mu}^{r'}$ с $\bar{N}$ гармониками. Вектор $r' \in \mathbf{R}^n$ выбирается следующим образом: $r'_i = r_i$, $i = 1, \ldots, \nu+1$; $r_{\nu+1} < r'_i < r_i$, $i = \nu+2, \ldots, n$. Величина $\mu > 0$ определяется таким образом, чтобы $N = \mu^{\nu}2^{\mu/r_1}$. Тогда $\bar{N} = \sum_{(s,r')<\mu} 2^{(s,1)} \asymp N$.

Возьмем функцию $x(\cdot) \in B^r_{p,\theta}$. Тогда [2, лемма 1; 3, теорема 1.1]

$$\|x - S^{r'}_\mu x\|_q = \|\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \delta_s x\|_q \leqslant \|\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \delta_s x\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} 2^{-(s,r)p} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^p\right)^{1/p}. \qquad (7)$$

Продолжим оценку сверху при $p \geqslant \theta$. Имеем

$$\|x - S^{r'}_\mu x\|_q \leqslant \sup_{(s,r')\geqslant\mu} 2^{-(s,r)} \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^p\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-\mu} \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^p\right)^{1/p} \leqslant 2^{-\mu} \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{-\mu} \asymp (N^{-1}\log^\nu N)^{r_1}. \qquad (8)$$

Если $p < \theta$, то по неравенству Гёльдера при $z = \theta/p$ $(1/z' = 1 - 1/z = (\theta - p)/\theta)$ из (7)

$$\|x - S^{r'}_\mu x\|_q \leqslant \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} 2^{-(s,r)pz'}\right)^{1/pz'} \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^{pz}\right)^{1/pz} \leqslant$$
$$\leqslant \mu^{\nu/p-\nu/\theta} 2^{-\mu} \left(\sum\nolimits_{(s,r')\geqslant\mu} \|\delta_s x^{(r)}\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \leqslant$$
$$\leqslant \mu^{\nu/p-\nu/\theta} 2^{-\mu} \asymp (\log^\nu N)^{1/p-1/\theta} (N^{-1}\log^\nu N)^{r_1}. \qquad (9)$$

Из (8) и (9) вытекает искомая оценка сверху.

Оценка снизу. Возьмем произвольный оператор $P \in \mathscr{P}(N, \tilde{L}_q)$. Положим $S = \{s \in \mathbf{N}^n \mid (r, s) \leqslant \mu,\ s_j \geqslant \mu/(2n),\ j = 1, \ldots, \nu + 1\}$, $\mathscr{K} = \bigcup_{s\in S} \square_s$. Выберем величину μ так, чтобы $|\mathscr{K}| = \sum_{s\in S} 2^{(s,1)} \geqslant C'_\mu \nu 2^{\mu/r_1} > 2C_q N$ (C_q константа из леммы 1) и $\mu^\nu 2^{\mu/r_1} \asymp N$. Тогда

$$\sum\nolimits_{l=1}^\infty \langle \lambda_l(\cdot), f_l(\mathscr{K}, \cdot)\rangle \leqslant C_q N \leqslant |\mathscr{K}|/2. \qquad (10)$$

Разобьем куб $[-\pi, \pi]^{\nu+1}$ на $(2m+1)^{\nu+1}$ равных кубов I_ξ с ребром длины $2\pi/(2m+1)$, где $m^{\nu+1} \asymp |S|$, $(2m+1)^{\nu+1} \geqslant |S| \asymp \mu^\nu$, $m \in \mathbf{N}$, и центром куба I_ξ в точке $\bar{t}_\xi$, $(\bar{t}_\xi)_j = \xi_j 2\pi/(2m+1)$, $j = 1, \ldots, \nu+1$, $\xi_j = 0, \pm 1, \ldots, \pm m$. Обозначим $t_\xi = (\bar{t}_\xi, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{T}^n$. Сопоставим каждому вектору $s \in S$ куб $I_{\xi(s)}$ с центром $\bar{t}_{\xi(s)}$ так, чтобы при $s \neq s'$ $\xi(s) \neq \xi(s')$. Такое сопоставление возможно, поскольку $|S| \leqslant (2m+1)^{\nu+1}$; сопоставление может быть проведено различным образом, нам годится любое.

Из неравенства (10) следует, что существует множество $K = \bigcup_{s\in S} \Delta_s$,

$$\Delta_s \subset \square_s,\ \Delta_s = \{\bar{k}_s + k \mid k \in \mathbf{Z}^n,\ |k_j| \leqslant m,\ j = 1, \ldots, \nu+1,\ k_j = 0,\ j = \nu+2, \ldots, n\},$$

$\bar{k}_s \in \mathbf{Z}^n$, $s \in S$, для которого

$$\sum\nolimits_{l=1}^\infty \langle \lambda_l(\cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \leqslant |K|/2. \qquad (11)$$

Возьмем функцию $x(t) = a\sum_{s\in S} x_s(t - t_{\xi(s)})$, где $x_s(t) = \sum_{k\in\Delta_s} e^{i(k,t)} = e^{i(\bar{k}_s,t)} D_m(t)$, $D_m(t) = \sum_{\substack{|k_j|\leqslant m\\ j=1,\ldots,\nu+1}} e^{i\sum_{j=1}^{\nu+1} k_j t_j}$. Функция $\sum_{s\in S} x_s(t)$ была построена В. Н. Темляковым. Нам же потребуется функция $\sum_{s\in S} x_s(t - t_{\xi(s)})$, чтобы при использовании аналога неравенства С. М. Никольского, с одной стороны, норма функции $\sum_{s\in S} x_s(t)$ в пространстве $\tilde{L}_\infty$ была бы большой, а с другой стороны, норма функции $\sum_{s\in S} x_s(t + t_{\xi(s)})$ в пространстве $\tilde{L}_{q'}$ $(q^{-1} + (q')^{-1} = 1)$ была бы достаточно мала. Это будет реализовано в лемме 3.

Поскольку $\delta_s x(t) = a x_s(t - t_{\xi(s)})$, то

$$\|x(\cdot)\|_{B^r_{p,\theta}} \asymp a\left(\sum_{s\in S} \|2^{(s,r)} x_s(\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \leqslant$$

$$\leqslant a 2^\mu |S|^{(1/\theta)} m^{(\nu+1)(1-1/p)} \asymp a 2^\mu |S|^{1+1/\theta-1/p}.$$

Значит, $x(\cdot)\in B^r_{p,\theta}$ при $a \asymp |S|^{1/p-1/\theta-1} 2^{-\mu}$. Далее нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $D(t) = \sum_{s\in S} x_s(t + t_{\xi(s)})$, $1 < q < \infty$. *Тогда* $\|D(\cdot)\|_q \asymp |S|$.

Доказательство. Оценка сверху. По теореме Литлвуда — Пэли

$$\|D(\cdot)\|_q \asymp \left\|\left(\sum_{s\in S} |x_s(\cdot + t_{\xi(s)})|^2\right)^{1/2}\right\|_q =$$

$$= \left\|\left(\sum_{s\in S} |D_m(\cdot + \bar{t}_{\xi(s)})|^2\right)^{1/2}\right\|_q. \quad (12)$$

Оценим величину $A = A(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{s\in S} |D_m(\cdot + \bar{t}_{\xi(s)})|^2$ сверху. Имеем

$$A \leqslant \sum_{\substack{|\xi_j|\leqslant m,\\ j=1,\ldots,\nu+1}} |D_m(t + \bar{t}_\xi)|^2 \leqslant \sum_{\substack{|\xi_j|\leqslant m,\\ j=1,\ldots,\nu+1}} \max_{t\in I_\xi} |D_m(t)|^2.$$

В силу неравенства (для одномерных величин t, ξ)

$$|D_m(t)| = \left|\frac{\sin((m+1/2)t)}{\sin(t/2)}\right| \leqslant \begin{cases} m, & t\in I_0,\\ |t|^{-1}, & t\notin I_0,\end{cases}$$

получим, что

$$|D_m(t)| \leqslant m/(|\xi| + 1) \quad \forall t\in I_\xi$$

и, следовательно,

$$A \leqslant \sum_{\substack{|\xi_j|\leqslant m,\\ j=1,\ldots,\nu+1}} \prod_{j=1}^{\nu+1} \frac{m^2}{(|\xi_j|+1)^2} \leqslant m^{2(\nu+1)} \sum_{\xi\in \overset{0}{Z}{}^{\nu+1}} \frac{1}{\xi^2} \leqslant$$

$$\leqslant m^{2(\nu+1)} \asymp |S|^2.$$

Подставляя оценку для A в неравенство (12), легко выводим искомую оценку сверху $\| D(\cdot)\|_q \leqslant |S|$.

Оценка снизу. По теореме Литлвуда — Пэли

$$\|D(\cdot)\|_q^q \asymp \int_{\mathbf{T}^n} \Big(\sum\nolimits_{s\in S} |x_s(t+t_{\xi(s)})|^2\Big)^{q/2} \mathrm{d}t \geqslant$$

$$\geqslant \sum\nolimits_{s\in S} \int_{t+t_{\xi(s)}\in I_0} |x_s(t+t_{\xi(s)})|^q \,\mathrm{d}t = |S| \int_{I_0} |x_s(t)|^q\,\mathrm{d}t =$$

$$= |S| \prod\nolimits_{j=1}^{\nu+1} \int_{-\pi/(2m+1)}^{\pi/(2m+1)} \left| \frac{\sin((m+1/2)t_j)}{\sin(t_j/2)} \right|^q \mathrm{d}t_j \asymp$$

$$\asymp |S|\, m^{(\nu+1)(q-1)} \asymp |S|^q.$$

Извлекая корень q-й степени из обеих частей последнего неравенства, получаем нужную оценку снизу. Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть* $z_s(t) = \sum_{k\in\Delta_s} z_k e^{i(k,t)}$, $s\in S$, $1<q<\infty$. *Тогда*

$$\Big\|\sum\nolimits_{s\in S} z_s(\cdot)\Big\|_q \geqslant |S|^{-1} \Big\|\sum\nolimits_{s\in S} z_s(\cdot+t_{\xi(s)})\Big\|_\infty.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\sum_{s\in S} z_s(t+t_{\xi(s)}) = \sum_{s\in S} z_s(t) * D(t)$, где $D(t) = \sum_{s\in S} x_s(t+t_{\xi(s)})$. По неравенству Юнга (см. [1, с. 25]) и лемме 2

$$\Big\|\sum\nolimits_{s\in S} z_s(\cdot+t_{\xi(s)})\Big\|_\infty \leqslant \Big\|\sum\nolimits_{s\in S} z_s(\cdot)\Big\|_q \|D(\cdot)\|_{q'} \leqslant \Big\|\sum\nolimits_{s\in S} z_s(\cdot)\Big\|_q |S|,$$

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

Отсюда сразу вытекает утверждение леммы 3.

По теореме Марцинкевича

$$\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_{q,t} =$$

$$= \Big\| x(t-\tau) - \sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(t) \Big\|_{q,t} \geqslant$$

$$\geqslant \Big\| x(t-\tau) - \sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(k,t) \Big\|_{q,t} =$$

$$= \Big\| \sum\nolimits_{s\in S} \Big(x(\Delta_s, t-\tau) - \sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s, t)\Big) \Big\|_{q,t};$$

по лемме 3

$$\|x(t-\tau) - Px(t-\tau)\|_{q,t} \geqslant |S|^{-1} \Big\| \sum\nolimits_{s\in S} \Big(x(\Delta_s, t-\tau+t_{\xi(s)}) -$$

$$- \sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s, t+t_{\xi(s)})\Big) \Big\|_{\infty,t} \geqslant$$

$$\geqslant |S|^{-1} \Big(a|K| - \sum\nolimits_{l=1}^{\infty} \langle \lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle f_l(\Delta_s, \tau+t_{\xi(s)})\Big)$$

(при последнем переходе положили $t=\tau$ и отбросили модуль).

Поскольку

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(\cdot), x(\cdot-\tau)\rangle\sum_{s\in S} f_l(\Delta_s, \tau+t_{\xi(s)})\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$=\frac{a}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s\in S}\sum_{s'\in S}\lambda_l(\Delta_{s'}, \tau+t_{\xi(s')}) f_l(\Delta_s, \tau+t_{\xi(s)})\right)\mathrm{d}t =$$

$$= a\sum_{l=1}^{\infty}\langle\lambda_l(K, \cdot), f_l(K, \cdot)\rangle \leqslant \frac{a}{2}|K|,$$

то существует точка $\tau\in\mathbf{T}^n$, для которой

$$\|x(t-\tau)-Px(t-\tau)\|_q \gg a\,|S|^{-1}|K| \asymp a|S| \asymp$$
$$\asymp |S|^{1/p-1/\theta}2^{-\mu} \asymp (\log^{\nu} N)^{1/p-1/\theta}(N^{-1}\log^{\nu} N)^{r_1}.$$

Получили требуемую оценку снизу при $p\leqslant\theta$.

Если $\theta\leqslant p\leqslant 2$, то оценка снизу является тривиальной и сводится к одной гармонике.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 20.05.87

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
[2] Галеев Э. М. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Математические заметки. 1978. Т. 23, вып. 2. С. 197—211.
[3] Галеев Э. М. Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\overline{\alpha}}$ и $\widetilde{H}_p^{\overline{\alpha}}$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 5. С. 916—934.
[4] Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. М.: Наука, 1986. Т. 178. С. 3—112.
[5] Динь-Зунг. Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 251—271.
[6] Темляков В. Н. О линейных ограниченных методах приближения функций // Доклады расширенных заседаний семинара института прикладной математики им. И. Н. Векуа. Тбилиси, 1985. Т. 1, № 2.
[7] Темляков В. Н. Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных // ДАН СССР. 1982. Т. 267, № 3. С. 314—317.
[8] Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
[9] Динь-Зунг. Приближение классов гладких функций многих переменных // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. М.: Наука, 1984. № 10. С. 207—226.