А. А. Арутюнов, Комбинаторное описание дифференцирований в групповых алгебрах, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, номер 12, 74–81

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-12-74-81

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2020, № 12, с. 74–81 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное В.П. Максимовым

А.А. АРУТЮНОВ

КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ В ГРУППОВЫХ АЛГЕБРАХ

Аннотация. Целью исследования является дифференцирования в групповых алгебрах с использованием результатов комбинаторной теории групп. Дается обзор старых результатов, описывающий дифференцирования в групповых алгебрах как характеры на группоиде присоединенного действия. Приводятся новые утверждения, позволяющие связать дифференцирования групповых алгебр с теорией концов групп и, в частности, теоремой Столлингса. Также дается гомологическая интерпретация полученных результатов. Строится обобщение предлагаемой конструкции для случая модулей над групповым кольцом.

Ключевые слова: групповая алгебра, теорема Столлингса, дифференцирования, концы группы.

УДК: 512.552: 512.554

DOI: 10.26907/0021-3446-2020-12-74-81

Пусть G — конечнопредставленная группа, и $\mathbb{C}[G]$ — соответствующая ей групповая алгебра. Хорошо известен ([1], вопрос 5.6.B, с. 746) следующий вопрос: "При каких условиях все дифференцирования в групповой алгебре являются внутренними?". Сразу отметим, что понятие групповой алгебры, является многозначным, есть смысл различать групповые алгебры, понимаемые как алгебраическая структура, топологическая структура, и некоторые другие. В частности, для групповой алгебры $L_1(G)$ исследование дифференцирований групповых алгебр играет важную роль для теории мер и гармонического анализа, теории операторов, операторных алгебр и когомологических конструкций (см. [1]–[4]). Для случая, когда $L_1(G)$ строится по локально компактной группе G, отметим работу [5], где было отмечено, что все дифференцирования алгебры $L_1(G)$ являются внутренними. В приведенных публикациях дифференцирования рассматриваются в топологическом контексте классов алгебр и модулей, оснащенных структурой нормированного пространства или другими топологическими структурами. Также отметим алгебраический взгляд на проблему, представленный в [6] вместе с более полной библиографией. Дифференцирования групповых алгебр тесно связаны с изучением комплексов Хохшильда и других геометрических структур. Связь с комплексами Хохшильда изучалась, например, в [7]–[10].

Поступила в редакцию 24.09.2020, после доработки 24.09.2020. Принята к публикации 01.10.2020.

Благодарности. Работа (за исключением теоремы 8) выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (проект МК-2364.2020.1). Теорема 8 получена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Госзадание 075-00337-20-03, проект № 0714-2020-0005).

Для прикладных задач полезно получить описание дифференцирований в комбинаторных терминах, в частности, при исследовании алгебраических вопросов теории кодирования (см. [11], [12]). Важную роль в указанных работах играет вычисление размерности алгебры внешних дифференцирований и перечисление самих дифференцирований.

Указанные приложения делают естественной задачу описания дифференцирований групповой алгебры в терминах копредставления группы. А именно, исследование алгебры дифференцирований (в первую очередь внешних) групповой алгебры через образующие и соотношения с получением формульного (по сути комбинаторного) описания дифференцирований, а также эффективное вычисление размерности алгебры внешних дифференцирований и ее описание. Для такой задачи наличие топологической структуры в групповой алгебре не требуется, и изучать соответствующие структуры удобнее, пользуясь чисто алгебраическим подходом.

Для реализации алгебраического подхода воспользуемся результатами, полученными ранее в работах [13]–[17]. Основная идея состоит в использовании характеров на группоиде присоединенного действия. Этот подход к изучению дифференцирований групповых алгебр был предложен в [13] и [15]. Также отметим, что связь группоида присоединенного действия отмечалась и ранее (см., например, [9], предложение 1.4). В [13] было получено описание дифференцирований на групповых алгебрах при помощи локально финитных характеров ([13], теорема 1). Там же было получено описание внутренних дифференцирований через характеры ([13], теорема 2). Изучение квазивнутренних дифференцирований было начато в [16] (раздел 3.3, квазивнутренние дифференцирования названы слабыми дифференцированиями) и затем продолжено в [17]. Было доказано, что квазивнутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре дифференцирований, причем данный идеал содержит в себе внутренние дифференцирования.

Цитированные результаты нашли приложения в некоторых смежных областях. Так, в работе [17] было построено описание дифференцирований для класса полугрупповых алгебр в случае, когда полугруппа удовлетворяет условиям Мальцева (условия, гарантирующие, что полугруппа порождает группу). Кроме того, в [18] данный подход был применен к исследованию (σ, τ)-дифференцирований для некоторых классов эндоморфизмов σ, τ. Подробнее об исследовании (σ, τ)-дифференцирований см., например, [19].

В настоящей работе устанавливается связь между дифференцированиями групповых алгебр и теорией, изучающей "концы топологических пространств". Впервые понятие конца топологического пространства было предложено в [20]. Позже, при развитии комбинаторной теории групп было доказано (см. теорему Столлингса ниже), что число концов графа Кэли, понимаемого как метрическое пространство, является инвариантом группы. Была доказана классификационная теорема, устанавливающая связь между данным инвариантом и комбинаторными свойствами группы. Первые результаты были получены в работе Дж. Столлинга [21], общая классификационная теорема была доказана им же в [22] (теорема 5.5A9). Отметим интересные геометрические доказательства этой теоремы, приведенные в [23], [24]. Некоторые результаты теории концов групп можно можно найти в обзоре ([25], с. 115). Интерес представляют также результаты, посвященные связи числа концов группы с различными геометрическими объектами. Так, в работах [24], [26] исследована связь числа концов группы с т. н. кубическим комплексом (cubical complex).

Приведем формулировку теоремы Столлингса ([24], с. 61). Через $e(\Gamma)$ будем обозначать число концов графа Γ, т. е. максимальное количество бесконечных компонент связности в графах вида $\Gamma \setminus Q$, где Q — некоторый *конечный* подграф. Легко показать эквивалентность такого определения классическому понятию конца топологического пространства, понимая граф Γ как пространство, оснащенное стандартной “словарной” метрикой. Через $e(G)$ обозначим число концов графа Кэли группы G. Число концов графа Кэли не зависит от копредставления группы. Инвариант $e(G)$ называют числом концов группы G. Как будет показано ниже, аналогичное свойство выполняется не только для графов Кэли, но и для более широкого класса графов.

Теорема 1 (теорема Столлингса)**.** *Конечнопорожденная группа G имеет более одного конца $e(G) > 1$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух: либо группа G представима как свободное произведение с конечной объединенной подгруппой, либо как HNN-расширение с конечными ассоциированным подгруппами.*

Естественным представляется вопрос изучения числа концов графов, которые получаются как результат других вариантов действия группы на множестве (например, на себе). При этом, если группа действует сопряжениями на себе, то получаемая конструкция тесно связана с упомянутой выше задачей изучения дифференцирований групповой алгебры.

В настоящей работе будем изучать групповую алгебру, определяемую в алгебраическом смысле. То есть алгебру $\mathbb{C}[G]$ понимаемую как множество функций $x : G \to \mathbb{C}$, обладающих конечным носителем, и оснащенную естественными операциями сложения и умножения (операция умножения наследуется из группы G)

$$\mathbb{C}[G] = \left\{ \sum_{g\in G} x(g)g | \#(\operatorname{supp} x) < \infty \right\}.$$

Через $\#$ обозначена мощность множества, а через supp$x$ — носитель функции x.

Зафиксируем действие λ группы G на себе

$$\lambda : G \times G \to G.$$

Если из контекста понятно о каком действии λ идет речь, будем писать $\lambda(g, a) := g(a)$.

Определим группоид действия, который обозначим через Γ_λ. В качестве объектов возьмем элементы группы G, т. е. $\mathbf{Obj}(\Gamma_\lambda) := G$. В качестве морфизмов возьмем пары из множества $G \times G$, т. е. $\mathbf{Hom}\,(\Gamma_\lambda) := G \times G$. В качестве начала морфизма $\phi = (m, g), m, g \in G$ зададим объект $s(\phi) := m$, а в качестве конца морфизма зададим $t(\phi) := g(m)$. Отсюда получаем

$$\mathbf{Hom}\,(a, b) = \{(a, g)|g(a) = b\}.$$

Будем говорить, что морфизм (m, g) имеет метку g. Морфизмы, у которых совпадает начало и конец, будем называть петлями.

Для заданных морфизмов $\phi = (m, g_1), \psi = (m', g_2)$ таких, что $m' = g_1(m)$, определим композицию $\psi \circ \phi$ как

$$\psi \circ \phi := (m, g_2g_1).$$

В случае, когда λ — действие сопряжениями, т. е. имеет вид $g(a) = gag^{-1}$, мы получаем группоид присоединенного действия, который изучался в работах [13]–[15].

Дадим определение пространства характеров на группоиде Γ_λ (обобщающее соответствующие определения в [13], [15]).

Определение 1. Будем называть комплекснозначную функцию $\chi : \mathbf{Hom}\,(\Gamma_\lambda) \to \mathbb{C}$ характером, если для любых двух компонируемых морфизмов ϕ, ψ имеет место соотношение

$$\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\psi) + \chi(\phi).$$

Последняя формула эквивалентна следующей:

$$\chi(a, g_2g_1) = \chi(a, g_1) + \chi(g_1(a), g_2).$$

Определение 2. Характер χ назовем локально финитным, если для каждого $v \in G$ почти всегда $\chi(u, v) = 0$ (т. е. для всех, кроме конечного числа элементов, $u \in G$).

Пространство локально финитных характеров на группоиде обозначим через $X(\Gamma_\lambda)$.

Носителем характера назовем множество морфизмов, на которых он отличен от нуля т. е.

$$\mathrm{supp}\chi := \{\phi \in \mathbf{Hom}\ (\Gamma_\lambda) | \chi(\phi) \neq 0\}.$$

Далее нас будут интересовать два подпространства в пространстве характеров. Будем обозначать через X_0 пространство характеров тривиальных на петлях:

$$X_0 = \{\chi \in X | \chi(\phi) = 0\ \forall \phi \in L(\Gamma_\lambda)\}.$$

Через X_0^c будем обозначать пространство характеров, являющихся тривиальными на петлях и обладающих конечным носителем, т. е.

$$X_0^c = \{\chi \in X_0 | \#supp(\chi) < \infty\}.$$

По локально финитному характеру $\chi \in X(\Gamma_\lambda)$ определим линейный оператор $\alpha : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ на образующих $g \in G \subset \mathbb{C}[G]$ следующим образом:

$$\alpha(a) := \sum_{m \in G} \chi(m, a) \cdot (a^{-1}(m)). \qquad (1)$$

Формула (1) задает оператор на групповой алгебре тогда и только тогда, когда характер χ является локально финитным, т. е. $\chi \in X(\Gamma_\lambda)$. Также легко видеть, что линейная комбинация таких операторов соответствует линейной комбинации характеров, а значит, такие операторы образуют линейное пространство, изоморфное $X(\Gamma_\lambda)$. Пространство, порожденное такими операторами для всевозможных локально финитных характеров, будем обозначать $\mathcal{A}(G)$.

Теорема 2. *$\mathcal{A}(G)$ является алгеброй Ли.*

Через $sk_u, u \in G$, обозначим граф, порожденный копредставлением группы $G =< \mathbf{X} | \mathbf{R} >$, следующим образом. Множество вершин $V(Sk_u)$ совпадает с множеством элементов орбиты элемента $u \in G$ при действии λ. Из вершины $a \in V(Sk_u)$ в вершину $b \in V(Sk_u)$ ведет ребро с меткой $x \in \mathbf{X}$, если $b = x(a)$. На графе sk_u понятия характера и локальной финитности определяются дословно так же, как и на всем группоиде. Субгруппоид, множество объектов которого совпадает с $V(Sk_u)$, будем обозначать через Γ_λ^u.

Лемма. *Локально финитный характер на графе sk_u продолжается до локально финитного характера на всем группоиде.*

Рассмотрим подпространство $\mathcal{A}_0(\Gamma_\lambda^u)$ операторов, которые порождены локально финитными характерами с носителем в Γ_λ^u тривиальными на петлях, т. е.

$$\alpha \in \mathcal{A}_0(\Gamma_\lambda^u) \leftrightarrow \chi_\alpha \in X_0(\Gamma_\lambda^u).$$

Через $\mathcal{A}_0^c(\Gamma_\lambda^u)$ обозначим подпространство операторов, которые порождены характерами тривиальными на петлях с конечным носителем, т. е.

$$\alpha \in \mathcal{A}_0^c(\Gamma_\lambda^u) \leftrightarrow \chi_\alpha \in X_0^{\mathrm{loc}}(\Gamma_\lambda^u).$$

Геометрический смысл теоремы 2 и связь определенных нами подпространств с теорией концов графов раскрывает

Теорема 3. *Для конечнопредставленной группы G число $e(sk_u)$ не зависит от копредставления группы, и справедливо неравенство $e(sk_u) \leq e(G)$. Если, кроме того, $0 < e(sk_u) < \infty$, то справедливо равенство*

$$\dim \left(\mathcal{A}_0(\Gamma_\lambda^u)/\mathcal{A}_0^c(\Gamma_\lambda^u)\right) = e(sk_u) - 1. \tag{2}$$

Легко видеть, что если λ — действие группы на себе правыми сдвигами, то граф sk_u — это граф Кэли. Для такого действия первая часть утверждения последней теоремы является следствием теоремы Столлингса. Однако теорема Столлингса не может быть применена к графам, которые получаются при других вариантах действия группы на себе (в частности, при действии сопряжениями).

Важным частным случаем действия λ является внутреннее действие $\lambda : (u, g) \mapsto ugu^{-1}$. В таком случае пространство операторов $\mathcal{A}_0^c$ совпадает с идеалом внутренних дифференцирований, а пространство $\mathcal{A}_0$ образует идеал в алгебре дифференцирований групповой алгебры, названный в [16], [17] квазивнутренними дифференцированиями.

Напомним, что дифференцирование — это линейное отображение $d : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$, удовлетворяющее свойству (правило Лейбница)

$$d(uv) = d(u)v + ud(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}[G].$$

Алгебру дифференцирований групповой алгебры $\mathbb{C}[G]$ будем обозначать $\mathrm{Der}(G)$.

При этом для внутреннего действия сам группоид совпадает с группоидом, изучавшимся в работах [13], [14]. Для краткости будем обозначать его просто Γ. Через G^G обозначим множество классов сопряженности $[u] = \{gug^{-1} | g \in G\}$. Справедливо следующее разложение группоида Γ как несвязного объединения субгруппоидов:

$$\Gamma = \sqcup_{[u] \in G^G} \Gamma_{[u]}.$$

Здесь и далее $\Gamma_{[u]}, [u] \in G^G$ — субгруппоид, в котором множество объектов совпадает с множеством $[u]$, а ребра определяются так же, как для Γ.

Пространство локально финитных характеров порождает алгебру дифференцирований в смысле следующей теоремы (см. [14], теорема 1 и результаты раздела 2 в [13]).

Теорема 4. *Для любого дифференцирования d существует такой локально финитный характер χ_d, что*

$$d(a) = \sum_{g \in G} \chi_d(m, g) \quad \forall a \in G.$$

Отметим, что обозначения в настоящей работе (в частности, определение морфизмов) отличаются от использованных в цитированных работах.

Теорема 4 дает естественное отождествление дифференцирований и пространства локально финитных характеров. Это открывает возможность для конкретного описания всех дифференцирований в групповых алгебрах. Пример такого конкретного вычисления для нильпотентных групп ранга 2 и, в частности, для дискретной группы Гейзенберга приведен в [14]. С другой стороны, такое отождествление ставит естественный вопрос о наличии в пространстве характеров структуры алгебры Ли. Соответствующий результат получен в [16].

Внутренними называются дифференцирования d, для которых найдется $a \in \mathbb{C}[G]$ такое, что $d(x) \equiv [a, x]$. Внутренние дифференцирования образуют идеал в алгебре всех дифференцирований. Определение квазивнутреннего дифференцирования, введенного в [16], [17], мы дадим ниже.

Определение 3. Будем называть дифференцирование $d \in \mathrm{Der}(G)$ квазивнутренним, если характер χ, соответствующий d в смысле теоремы 4, равен нулю на всех петлях.

Конечно, любое внутреннее дифференцирование будет квазивнутренним. Однако квазивнутренние дифференцирования, вообще говоря, не являются внутренними (соответствующие примеры для нильпотентных групп и группы Гейзенберга приведены в [14]).

Введем следующие обозначения для пространств квазивнутренних дифференцирований

$$Q\mathrm{InnDer}(\Gamma_{[u]}) := \{d | \chi_d \in X_0(\Gamma_{[u]})\}, Q\mathrm{InnDer} := \bigoplus_{[u] \in G^G} Q\mathrm{InnDer}(\Gamma_{[u]}).$$

Рассмотрим бесконечную группу G такую, что $e(G) = 1$. В таком случае для нее по теореме 3 имеем $e(sk_u) = 1$, если $\#[u] = \infty$, и соответственно $e(sk_u) = 0$, если класс сопряженных элементов $[u]$ конечен. Следовательно, имеет место $Q\mathrm{InnDer} = \mathrm{Inn}$.

Далее наша цель — описание алгебры внешних дифференцирований, т. е. фактор алгебры по идеалу внутренних дифференцирований, а также описание квазивнешних дифференцирований, т. е. фактор алгебры по идеалу квазивнутренних дифференцирований.

Определим пространство $T(Z(u))$ как векторное пространство гомоморфизмов централизатора $Z(u)$ в аддитивную группу комплексных чисел, задаваемых как ограничение характеров на букет петель вокруг вершины u с естественно определенными операциями:

$$T(Z(u)) = \{\tau(z) | \exists \chi \in X(\Gamma) : \tau(z) = \chi(uz, z)\}.$$

Если $e(G) = 1$, то разницы между внешними и квазивнешними дифференцированиями нет. Справедлива

Теорема 5. *Если $e(G) = 1$, то имеется естественный изоморфизм*

$$\mathrm{OutDer}(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u] \in G^G} T(Z(u)).$$

Если же $e(G) > 1$, то справедлив аналогичный результат, но уже для квазивнешних дифференцирований.

Теорема 6. *Если $e(G) > 1$, то имеется естественный изоморфизм*

$$Q\mathrm{OutDer}(\mathbb{C}[G]) \cong \bigoplus_{[u] \in G^G} T(Z(u)).$$

Полученные результаты допускают гомологическую интерпретацию.

Теорема 7. *Следующая последовательность образовывает комплекс:*

$$0 \to \mathrm{Inn} \to Q\mathrm{InnDer} \to \mathrm{Der} \to 0.$$

При этом над фиксированным субгруппоидом $\Gamma_{[u]}$ в силу полученных выше результатов получаем следующее вычисление когомологий данного комплекса:

$$\dim Q\mathrm{InnDer}(\Gamma_{[u]})/\mathrm{Inn}(\Gamma_{[u]}) = e(\Gamma_{[u]}) - 1,$$

$$\dim \mathrm{Der}(\Gamma_{[u]})/Q\mathrm{InnDer}(\Gamma_{[u]}) = \dim T(Z(u)).$$

Последнее утверждение можно понимать следующим образом. Число $e(\Gamma) - 1$ описывает размерность фактор пространства квазивнутренних дифференцирований по внутренним.

Отметим, что сформулированные выше результаты близки к результатам, касающимся гомологий графов (см. [27]). Так, доказанную формулу (2) можно понимать как аналог предложения 11.1.3 в [27]. А последняя теорема 7 аналогична вычислению числа компонент связности в цитированной работе.

Предложенная конструкция для операторов, действующих в групповых алгебрах, в частности теорема 2, может быть обобщена для модулей над групповой алгеброй. А именно, зафиксируем действие λ группы G на некотором (вообще говоря, бесконечном) множестве M:

$$\lambda : G \times M \to M.$$

Группоид действия на множестве, который будем далее обозначать через $\Gamma_{M,\lambda}$, строится аналогично с рассмотренным выше группоидом Γ_λ. В качестве объектов группоида $\Gamma_{M,\lambda}$ берем элементы множества M, на котором действует группа G, т.е. $\mathbf{Obj}(\Gamma_{M,\lambda}) := M$. В качестве морфизмов берем пары из $M \times G$, т.е. $\mathbf{Hom}\,(\Gamma_{M,\lambda}) := M \times G$. В качестве начала морфизма $\phi = (m, g), m \in M, g \in G$, возьмем объект $s(\phi) := m$, а в качестве конца морфизма имеем $t(\phi) := g(m)$. Отсюда получаем

$$\mathbf{Hom}\,(a, b) = \{(a, g) | g(a) = b\}.$$

Формула композиции морфизмов, понятие характера и остальные необходимые определения вводятся дословно так же, как и для группоида Γ_λ выше.

Для фиксированного локально финитного характера $\chi \in X(\Gamma_{M,\lambda})$ зададим оператор, действующий в модуле над $\mathbb{C}[G]$, на образующих $a \in M$ по формуле

$$\alpha(a) := \sum_{m \in M} \chi(m, a) a \times (a^{-1}(m)). \tag{3}$$

Ясно, что формула (3) задает оператор на групповой алгебре тогда и только тогда, когда характер χ является локально финитным, т.е. $\chi \in X(\Gamma_{M,\lambda})$. Также легко видеть, что линейная комбинация таких операторов соответствует линейной комбинации характеров, а значит, такие операторы образуют линейное (вообще говоря, бесконечномерное) пространство. Пространство, порожденное такими операторами, обозначим через $\mathcal{A}_M(G)$.

Теорема 8. *$\mathcal{A}_M(G)$ является алгеброй Ли.*

Предложенные выше результаты могут быть применены не только к исследованию групповых алгебр, но и модулей над ними.

Литература

[1] Dales H.G. *Banach algebras and automatic continuity* (Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 2000).

[2] Kaplansky I. *Derivations of Banach algebras*, Seminars on anal. functions. v. II, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 254–258 (1958).

[3] Kadison R.V. *Derivations of operator algebras*, Ann. Math., **83**, 280–293 (1966).

[4] Kadison R.V., Ringrose J.R. *Derivations of operator group algebras*, Amer. J. Math., **88** (3), 562–576 (1966).

[5] Losert V. *The derivation problem for group algebras*, Ann. Math. (2), **168** (1), 221–246 (2008).

[6] Artemovych O.D., Bovdi V.A., Salim M.A. *Derivations of group rings*, arXiv:2003.01346 [math.RA] (2020).

[7] Benson D.J. *Representations and cohomology, v. I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras*, Cambridge Stud. Adv. Math., **30**, Cambridge, 1991.

[8] Benson D.J. *Representations and cohomology, v. II: Cohomology of groups and modules*, Cambridge Stud. Adv. Math., **31**.

[9] Burghelea D. *The Cyclic Homology of the group rings,* Comentarii Math. Helvetci, 354–365 (1985).

[10] Mishchenko A.S. *Correlation between the Hochschild Cohomology and the Eilenberg–MacLane Cohomology of Group Algebras from a Geometric Point of View*, Russ. J. Math. Phys. **27**, 236–250 (2020).

[11] Boucher D., Ulmer F. *Linear codes using skew polynomials with automorphisms and derivations*, Designs, Codes and Cryptography, Springer Verlag, **70** (3), 405–431 (2014).

[12] Creedon L., Hughes K. *Derivations on group algebras with coding theory applications*, Finite Fields and Their Appl., **56**, 247–265 (2019).

[13] Arutyunov A.A., Mishchenko A.S., Shtern A.I. *Derivations of group algebras*, Fundam. Prikl. Mat., **21** (6), 65–78 (2016).
[14] Арутюнов А.А. *Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах*, Тр. МИАН, **308**, 28–41 (2020).
[15] Арутюнов А.А., Мищенко А.С. *Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр*, Матем. сб., **210** (6), 3–29 (2019).
[16] Arutyunov A.A., Alekseev A.V. *Complex of n-categories and derivations in group algebras*, Topology and its Appl., 275, 107002 (2020).
[17] Alekseev A.V., Arutyunov A.A. *Derivations in semigroup algebras*, Eurasian Math. J., **11** (2) 9–18 (2020).
[18] Alekseev A.V., Arutyunov A.A., Silvestrov S. *On $(\sigma,\tau)-$derivations of group algebra as category characters*, arXiv:2008.00390, 2020.
[19] Richard L., Silvestrov S.D. *Quasi-Lie structure of σ-derivations of $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$*, J. Algebra, **319** (3), 1285–1304 (2008).
[20] Freudenthal H. *Uber die Enden topologischer Rhume und Gruppen*, Math. Zeitschrift, **33**, 692–713 (1931).
[21] Stallings J.R. *On torsion-free groups with infinitely many ends with More than One End*, Ann. Math., **88**, 312–334 (1968).
[22] Stallings J.R. *Group Theory and Three-dimensional Manifolds with More than One End*, Math. Monograph, v. 4, 1971.
[23] Dunwoody M.J. *Cutting up graphs*, Combinatorica, **2** (1), 15–23 (1982).
[24] Niblo G.A. *A Geometric Proof of Stallings' Theorem on Groups with More than One End*, Geometriae Dedicata, **105** (61), 61-76, 2004.
[25] Носков Г.А., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. *Бесконечные группы*, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 17, ВИНИТИ, М., 65–157 (1979).
[26] Sageev M. *Ends of Group Pairs and Non-Positively Curved Cube Complexes with More than One End*, Proc. London Math. Society, v. s3–71 (3), 585–617 (1995).
[27] Geoghegan R. *Topological methods in group theory* (Springer-Verlag, N. Y., 2008).

Андроник Арамович Арутюнов

Московский физико-тенхнический институт,
Институтский переулок 9, г. Долгопрудный, 141701, Россия;
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук,
ул. Профсоюзная, д. 65, г. Москва, 117997, Россия,

e-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

A.A. Arutyunov

Combinatorial description of derivations in group algebras

Abstract. The work is devoted to the study of derivations in group algebras using the results of combinatorial group theory. A survey of old results is given, describing derivations in group algebras as characters on an adjoint action groupoid. In this paper, new assertions are presented that make it possible to connect differentiations of group algebras with the theory of ends of groups and in particular Stallings theorem. A homological interpretation of the results obtained is also given. We also construct a generalization of the proposed construction for the case of modules over a group ring.

Keywords: group algebra, Stallings theorem, derivations, ends of group.

Andronick Aramovich Arutyunov

Moscow Institute of Physics and Technologies,
9 Institutskiy Ln., Dolgoprudny, 141701 Russia;
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS,
65 Profsoyuznaya str., Moscow 117997, Russia,

e-mail: andronick.arutyunov@gmail.com