МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 3 (1980)

О СХОДИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА, УПРАВЛЯЕМОГО БЫСТРЫМ ЭРГОДИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ

А. В. Чистяков

1. Рассмотрим двумерный случайный процесс $(\xi(t), \eta_\varepsilon(t))$ с непрерывным временем. Пусть первой координатой $\xi(t)$ является случайный процесс со счетным множеством состояний $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Будем предполагать, что траектории $\xi(t)$ ступенчатые с вероятностью 1 и что для любой ограниченной функции $\varphi(x)$ при $t - s \to \infty$

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t \varphi(\xi(u))\,du \xrightarrow{P} \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \varphi(k). \tag{1}$$

Здесь и ниже знаком $\xrightarrow{P}$ будем обозначать сходимость по вероятности. В частности при $t - s \to \infty$

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t \delta_{k,\xi(u)}\,du \xrightarrow{P} \pi_k, \tag{2}$$

где $\delta_{k,l} = 1$ при $k = l$ и $\delta_{k,l} = 0$ при $k \neq l$. Вторая координата $\eta_\varepsilon(t)$ при условии, что задана траектория $\xi(t)$, является цепью Маркова с множеством состояний $\mathbf{N}$ и интенсивностями вероятностей перехода $\varepsilon\lambda_{ij}(\xi(t), \varepsilon t)$, $i, j \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{P}(\eta_\varepsilon(t+h) = j \mid \eta_\varepsilon(t) = i,\ \xi(u),\ u \in [t, t+h]) = \\ = \begin{cases} \varepsilon\lambda_{ij}(\xi(t), \varepsilon t)\,h + o(h), & i \neq j, \\ 1 - \varepsilon\lambda_{ii}(\xi(t), \varepsilon t)\,h + o(h). \end{cases} \tag{3}$$

Ниже будем рассматривать поведение $\eta_\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Математические заметки», 1980

В этом случае его интенсивности перехода малы и процесс $\xi(t)$ по отношению к $\eta_\varepsilon(t)$ можно назвать быстрым.

Будем предполагать, что

A) при всех $i, k \in \mathbf{N}, t \geqslant 0$

$$\lambda_{ii}(k, t) = \Sigma_{l \neq i} \lambda_{il}(k, t); \tag{4}$$

B) функции $\lambda_{ij}(k, t)$ при любых $i, j, k \in \mathbf{N}$ интегрируемы по t на любом конечном отрезке по Риману;

C) при любых $i, l \neq i, k \in \mathbf{N}, 0 \leqslant t \leqslant T$,

$$0 \leqslant \lambda_{il}(k, t) < c_l, \quad \Sigma_{l \neq i} c_l < \infty. \tag{5}$$

Обозначим ${}_nP^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot))$ условную вероятность того, что переход от $\eta_\varepsilon(t_1) = i$ к $\eta_\varepsilon(t_2) = j$ произошел за n скачков при условии, что фиксирована траектория процесса $\xi(t)$. Тогда, также как в [1], можно показать, что

$$P^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot)) = \mathbf{P}(\eta_\varepsilon(t_2) = j \mid \eta_\varepsilon(t_1) = i; \xi(u); u \in [t_1, t_2]) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} {}_nP^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot)). \tag{6}$$

Функции

$$\Lambda_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \lambda_{ij}(k, t), \tag{7}$$

где π_k, $\lambda_{ij}(k, t)$ определены равенствами (2), (3), определяют вероятности перехода некоторого неоднородного марковского процесса. Вероятности перехода этого процесса из состояния i в состояние j на отрезке времени $[t_1, t_2]$ за n скачков и за произвольное число скачков обозначим соответственно

$${}_nP_{ij}(t_1, t_2), \; P_{ij}(t_1, t_2). \tag{8}$$

Тогда

$$P_{ij}(t_1, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_nP_{ij}(t_1, t_2). \tag{9}$$

Ниже будет показано, что при $\varepsilon \to 0$ условные конечномерные распределения процесса $\eta_\varepsilon(t)$, рассматриваемые в моменты времени $t_1/\varepsilon, \ldots, t_s/\varepsilon$, сходятся к конечномерным распределениям марковского процесса с вероятностями перехода (9). В работе Ситюка В. Н. [2] получен частный случай этого утверждения, когда $\xi(t)$ является цепью Маркова с конечным множеством состояний, а $\eta_\varepsilon(t)$ — пуассоновским процессом.

2. Докажем сначала две леммы. Пусть функция $\psi(k, v)$ $(k \in \mathbf{N},\ v \geqslant 0)$ ограничена как функция двух переменных и при любом k интегрируема по v на любом конечном отрезке. Обозначим

$$I_{\theta,\varphi}(s,\varepsilon) = \varepsilon \int_{s/\varepsilon}^{t/\varepsilon} \psi(\xi(u), \varepsilon u)\, \theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u)\, \mathrm{d}u, \qquad (10)$$

$$I_{\theta,\psi}(s) = \int_s^t \theta(u) \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \psi(k, u)\, \mathrm{d}u,$$

где $\theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u)$, $u \geqslant 0$ — функция, интегрируемая по u при любой фиксированной траектории процесса $\xi(t)$; $\theta(u)$ $(u \geqslant 0)$ — неслучайная непрерывная по u функция.

ЛЕММА 1. *Если при* $\varepsilon \to 0$

$$R^{\varepsilon}_{0,T} = \sup_{u \in [0,T]} |\theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u/\varepsilon) - \theta(u)| \xrightarrow{P} 0,$$

то при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{s \in [s_0, s_1]} |I_{\theta,\psi}(s,\varepsilon) - I_{\theta,\psi}(s)| \xrightarrow{P} 0 \qquad (11)$$

для любого интервала $[s_0, s_1] \subset [0, T]$.

Доказательство. Докажем сначала, что при $\varepsilon \to 0$ для любого фиксированного $s \in [0, T]$

$$I_{\theta,\psi}(s,\varepsilon) \xrightarrow{P} I_{\theta,\psi}(s). \qquad (12)$$

Положим

$$M_j(k) = \sup_{s_j \leqslant u \leqslant s_{j+1}} \psi(k, u), \quad m_j(k) = \inf_{s_j \leqslant u \leqslant s_{j+1}} \psi(k, u),$$

$$\Delta_j = [s_j/\varepsilon,\ s_{j+1}/\varepsilon],\ s = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = t.$$

При любой фиксированной траектории $\xi(t)$ имеем

$$I_{\theta,\psi}(s,\varepsilon) = \varepsilon \sum_j \int_{\Delta_j} \psi(\xi(u), \varepsilon u)\, \theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u)\, \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_j \int_{\Delta_j} M_k(\xi(u))\, \theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u)\, \mathrm{d}u \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_j [\theta_j + R^{\varepsilon}_{s_j, s_{j+1}}] \int_{\Delta_j} M_k(\xi(u))\, \mathrm{d}u = \bar{I}_{\theta,\psi}(s,\varepsilon),$$

где $\theta_j = \sup_{u \in [s_j, s_{j+1}]} \theta(u)$. Так как $M_j(k)$ ограничены, то из условия (1) следует, что

$$\bar{I}_{\theta,\psi}(s,\varepsilon) \xrightarrow{P} \bar{I}_{\theta,\psi}(s) = \sum_{j=0}^{n-1} (s_{j+1} - s_j)\, \theta_j \sum_k \pi_k M_j(k) \qquad (13)$$

при $\varepsilon \to 0$. Величина $\bar{I}_{\theta,\psi}(s)$ является верхней интегральной суммой для $I_{\theta,\psi}(s)$. По аналогии с $\bar{I}_{\theta,\psi}(s, \varepsilon)$ вводится величина $\underline{I}_{\theta,\psi}(s, \varepsilon)$ и проверяется, что при $\varepsilon \to 0$

$$\underline{I}_{\theta,\psi}(s, \varepsilon) \xrightarrow{P} \underline{I}_{\theta,\psi}(s), \tag{14}$$

где $\underline{I}_{\theta,\psi}(s)$ — нижняя интегральная сумма для $I_{\theta,\psi}(s)$. Пусть задано $\delta > 0$; выберем разбиение $s_0 < s_1 < \ldots < s_n$ так, чтобы

$$|I_{\theta,\psi}(s, \varepsilon) - \bar{I}_{\theta,\psi}(s)| < \delta/4 \quad \text{и} \quad |I_{\theta,\psi}(s, \varepsilon) - \underline{I}_{\theta,\psi}(s)| < \delta/4.$$

Из неравенства

$$\mathbf{P}\{|I_{\theta,\psi}(s, \varepsilon) - I_{\theta,\psi}(s)| < \delta\} \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{P}\{|\underline{I}^{(s)}_{\theta,\psi} - \underline{I}_{\theta,\psi}(s, \varepsilon)| < \delta/4 \cap |\bar{I}_{\theta,\psi}(s) - \bar{I}_{\theta,\psi}(s, \varepsilon)| < \delta/4\}$$

и из (13), (14) следует (12). Докажем теперь (11). Предположим противное. Тогда существуют такие δ_0 и последовательность (ε_n, s_n), что при $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{|I_{\theta,\psi}(s_n, \varepsilon_n) - I_{\theta,\psi}(s_n)| > \delta_0\} \to c > 0, \quad s_n \to \tilde{s} \in [s_0, s_1].$$

Представим разность, стоящую под знаком модуля, в виде

$$\Delta I = I_{\theta,\psi}(s_n, \varepsilon_n) - I_{\theta,\psi}(s_n) = (I_{\theta,\psi}(s_n, \varepsilon_n) - I_{\theta,\psi}(\tilde{s}, \varepsilon_n) +$$
$$+ (I_{\theta,\psi}(\tilde{s}) - I_{\theta,\psi}(s_n)) + (I_{\theta,\psi}(\tilde{s}, \varepsilon_n) - I_{\theta,\psi}(\tilde{s})).$$

Второе слагаемое в ΔI стремится к 0 в силу непрерывности $I_{\theta,\psi}(s)$ по s. Третье слагаемое в ΔI сходится по вероятности к 0 в силу (11). Оценим первое слагаемое. Из формулы (10), учитывая ограниченность ψ и θ_ε, получим

$$|I_{\theta,\psi}(s_n, \varepsilon_n) - I_{\theta,\psi}(\tilde{s}, \varepsilon_n)| =$$
$$= \varepsilon_n \int_{s_n/\varepsilon_n}^{\tilde{s}/\varepsilon_n} \psi(\xi(u), \varepsilon u)\, \theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u/\varepsilon)\, du \leqslant c(\tilde{s} - s_n).$$

Таким образом, $|I_{\theta,\psi}(s_n, \varepsilon_n) - I_{\theta,\psi}(s_n)| \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2. *Для любых целых n и любых $i, j \in \mathbf{N}$*

$$\sup_{s \in [s_0, s_1]} |{}_nP^{\varepsilon}_{ij}(s/\varepsilon, t/\varepsilon, \xi(\cdot)) - {}_nP_{ij}(s, t)| \xrightarrow{P} 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Так как

$${}_0P_{ii}(s/\varepsilon, t/\varepsilon, \xi(\cdot)) = \exp\{-I_{1,\lambda_{ii}(s,\varepsilon)}\},$$

где величина $I_{1,\lambda_{ii}(s,\varepsilon)}$ определена первой формулой (10) с $\psi(k, u) = \lambda_{ii}(k, u)$, $\theta_\varepsilon(\xi(\cdot), u) = 1$ и функция e^{-x} непрерывна и ограничена при $x \geqslant 0$, то утверждение леммы 2 при $n = 0$ следует из леммы 1. Пусть лемма 2 доказана для n. По формуле полной вероятности

$$
{}_{n+1}P^{\varepsilon}_{ij}(s/\varepsilon, t/\varepsilon, \xi(\cdot)) = \varepsilon \int_{s/\varepsilon}^{t/\varepsilon} {}_0P^{\varepsilon}_{ii}(s/\varepsilon, u, \xi(\cdot)) \cdot
$$

$$
\cdot \sum_{l \neq i} \lambda_{il}(\xi(u), \varepsilon u)\, {}_nP^{\varepsilon}_{lj}(u, t/\varepsilon, \xi(\cdot))\, du,
$$

$$
{}_{n+1}P_{ij}(s, t) = \int_s^t {}_0P_{ii}(s, u) \sum_{l \neq i} \Lambda_{il}(u)\, {}_nP_{lj}(u, t)\, dt. \quad (15)
$$

Из условия (C) следует, что остаток ряда в первой формуле (15) можно сделать сколь угодно малым при любой траектории $\xi(t)$; сходимость конечной части ряда в первой формуле (15) к соответствующей конечной части ряда второй формулы (15) проверяется по лемме 1. Лемма доказана.

3. ТЕОРЕМА 1. *Если выполнены условия* (1) *и* A) — C), *то при* $\varepsilon \to 0$

$$
\mathbf{P}\{\eta_{t_1/\varepsilon} = i_1 \ldots \eta_{t_k/\varepsilon} = i_k \mid \xi(\cdot), \eta_{t_0/\varepsilon} = i_0\} \xrightarrow{P}
$$

$$
\xrightarrow{P} P(t_1 i_1 \ldots t_k i_k \mid t_0 i_0),
$$

где

$$
P(t_1 i_1 \ldots t_k i_k \mid t_0 i_0) = \prod_{s=0}^{k-1} P_{i_s i_{s+1}}(t_s, t_{s+1}),
$$

$P_{ij}(t, s)$ *определяются равенствами* (7), (9).

Доказательство. Обозначим

$$
A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) = \prod_{s=0}^{k-1} {}_nP^{\varepsilon}_{i_s i_{s+1}}(t_s/\varepsilon t_{s+1}/\varepsilon \xi(\cdot)),
$$

$$
a(n, i) = \prod_{s=0}^{k-1} P_{i_s i_{s+1}}(t_{i_s}, t_{i_{s+1}}),
$$

$$
n = (n_1 \ldots n_k), \quad i = (i_1 \ldots i_k).
$$

Из соотношений (6) и (9) имеем

$$
\mathbf{P}(\eta_{t_1/\varepsilon} = i_1 \ldots \eta_{t_k/\varepsilon} = i_k \mid \eta_{t_0/\varepsilon} = i_0, \xi(\cdot)) = \sum_n A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)), \quad (16)
$$

$$
P(t_1 i_1 \ldots t_k i_k \mid t_0 i_0) = \Sigma_n a(n, i). \quad (17)
$$

Суммируя по всем возможным наборам n и i получаем, что при любой траектории $\xi(u)$

$$\Sigma_{n,i} A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) = \Sigma_{n,i} a(n, i), \tag{18}$$

так как левая и правая части равны 1. Символами $\Sigma_{n,i}^{N,I}$ и Σ_n^N будем обозначать суммирование по всем i, n и i соответственно, таким, что $i_1, \ldots, i_k < I$, $n_1, \ldots n_k < N$, а символами $\Sigma_{n,i}^*$ Σ_n^* — суммирование по дополнительным множествам. Из равенства (18) имеем

$$\sum_{n,i}^* A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) = \sum_{n,i}^{N,I} (a(n, i) - A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot))) + \\ + \sum_{n,i}^* a(n, i). \tag{19}$$

Используя (16) и (17), найдем

$$\mathsf{P}(\eta_{t_1/\varepsilon} = i_1 \ldots \eta_{t_k/\varepsilon} = i_k \mid \eta_{t_0/\varepsilon} = i_0, \xi(\cdot)) - \\ - P(t_1 i_1 \ldots t_k i_k \mid t_0 i_0) = \sum_n^N (A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) - a(n, i)) + \\ + \sum_n^* A^{\varepsilon}(n, i) - \sum_n^* a(n, i). \tag{20}$$

Пусть задано произвольное $\delta > 0$. Выберем N, I так, чтобы

$$\sum_n^* a(n, i) < \sum_{n,i}^* a(n, i) < \delta/4. \tag{21}$$

Так как по лемме 2 $A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) \xrightarrow{P} a(n, i)$, при $\varepsilon \to 0$, то при достаточно малых ε с вероятностью сколь угодно близкой к единице выполнено неравенство

$$\sum_n^N |A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) - a(n, i)| \leqslant \\ \leqslant \sum_{n,i}^{N,I} |A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) - a(n, i)| < \delta/4. \tag{22}$$

Тогда из (22), (21) и (19) следует, что $\sum_{n,i}^* A^{\varepsilon}(n, i, \xi(\cdot)) < \delta/2$. Применив эту оценку и оценки (21), (22) к (20) получим утверждение теоремы.

Из теоремы очевидно следует сходимость безусловных распределений процесса $\eta(t)$

$$\mathsf{P}(\eta_{t_1/\varepsilon} = i_1 \ldots \eta_{t_k/\varepsilon} = i_k \mid \eta_{t_0/\varepsilon} = i_0) \to \\ \to P(t_1 i_1 \ldots t_k i_k \mid t_0 i_0)$$

при $\varepsilon \to 0$.

4. Докажем, используя теорему 1, сходимость вероятности перехода с запрещениями. Пусть H — некоторое

множество состояний процесса $\eta_\varepsilon(t)$. Обозначим через ${}^H_nP^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot))$ условную вероятность перейти от $\eta_\varepsilon(t_1) = i$ к $\eta_\varepsilon(t_2) = j$, ни разу не попав в состояние H за n шагов при условии, что фиксирована траектория $\xi(u)$. Аналогичную вероятность для предельного процесса обозначим ${}^H_nP_{ij}(t_1, t_2)$. Тогда для

$$
\begin{aligned}
&{}^HP^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot)) = \\
&\quad = \mathbf{P}\{\eta_\varepsilon(t_2) = j,\ \eta_\varepsilon(u) \notin H,\ t_1 \leqslant u \leqslant t_2 \mid \eta_\varepsilon(t_1) = \\
&\qquad\qquad = i,\ \xi(\cdot)\}
\end{aligned}
$$

и для аналогичной вероятности ${}^HP_{ij}(t_1, t_2)$ предельного процесса имеем

$$
\begin{aligned}
{}^HP^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot)) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^H_nP^\varepsilon_{ij}(t_1, t_2, \xi(\cdot)), \\
{}^HP_{ij}(t_1, t_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}^H_nP_{ij}(t_1, t_2).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

ТЕОРЕМА 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то при* $\varepsilon \to 0$

$$
{}^HP^\varepsilon_{ij}(s/\varepsilon,\ t/\varepsilon,\ \xi(\cdot)) \xrightarrow{P} {}^HP_{ij}(s, t).
$$

Доказательство. Вероятности перехода за n и $n+1$ шагов с запрещениями удовлетворяют формуле (15), если суммирование в ней производить по $l \neq i$, $l \notin H$. Утверждение леммы 2 остается верным и для вероятности перехода с запрещениями. В частности при $\varepsilon \to 0$

$$
{}^H_nP^\varepsilon_{ij}(s/\varepsilon, t/\varepsilon, \xi(\cdot)) \xrightarrow{P} {}^H_nP_{ij}(s, t). \tag{24}
$$

Оценим разность вероятностей (23). Разобьем суммы рядов на две части. К конечной части применим (24). Остатки рядов можно оценить выражением

$$
\sum_{n=N}^{\infty} {}_nP^\varepsilon_{ij}(s/\varepsilon, t/\varepsilon, \xi(\cdot)) + \sum_{n=N}^{\infty} {}_nP_{ij}(s, t), \tag{25}
$$

так как вероятности перехода без запрещений больше аналогичных вероятностей с запрещениями. Второе слагаемое в (25) мало в силу сходимости ряда (9). Из теоремы 1 следует, что первое слагаемое в (25) близко ко второму и, следовательно, тоже мало. Отсюда следует утверждение леммы 2.

Автор благодарен А. Д. Соловьеву за постановку задачи и за советы, полученные при ее решении.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
25.IV.1979

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дуб Дж. Л., Вероятностные процессы, М., «Мир», 1956.
[2] Ситюк В. Н., Исследования по анализу надежности сложных систем, подверженных нестационарной нагрузке, Автореферат кандидатской диссертации, Киев, 1977.