



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Нецветаев, Диффеоморфность и стабильная диффеоморфность односвязных многообразий, *Алгебра и анализ*, 1990, том 2, выпуск 2, 112–120

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

23 марта 2025 г., 08:15:03



© 1990 г.

Н. Ю. Нецветаев

ДИФФЕОМОРФНОСТЬ И СТАБИЛЬНАЯ ДИФФЕОМОРФНОСТЬ ОДНОСВЯЗНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В работе доказывается, что если два односвязных многообразия размерности $4k+2$ строго стабильно диффеоморфны, то они и диффеоморфны. Это же доказывается для многообразий размерности $4k > 4$, в одно из которых вкладывается $S^n \times S^n$ с выколотой точкой.

§ 1. Введение и формулировки основных результатов

Все многообразия ниже предполагаются гладкими, связными, ориентированными.

Вопрос о том, диффеоморфны ли два многообразия, заданные тем или иным способом, является классическим для дифференциальной топологии. В ряде алгебро-геометрических и топологических ситуаций, как оказывается, весьма плодотворен подход к нему, связанный с понятием стабильной диффеоморфности.

О п р е д е л е н и е. Связную сумму $M \#_p(S^n \times S^n)$ многообразия M размерности $2n$ и p экземпляров $S^n \times S^n$ назовем его p -й стабилизацией. Многообразия M и M' называются *стабильно диффеоморфными*, если они обладают диффеоморфными стабилизациями:

$$M \#_a(S^n \times S^n) \cong M' \#_b(S^n \times S^n).$$

Назовем многообразия M и M' *строго стабильно диффеоморфными*, если порядки этих стабилизаций совпадают: $a=b$.

В отличие от диффеоморфности стабильная диффеоморфность сравниваемых многообразий часто гарантируется выполнением некоторых легко проверяемых условий, см. [1, 2, 3]. Поэтому особый интерес вызывает соотношение между диффеоморфностью и строгой стабильной диффеоморфностью.

Оказывается, что по крайней мере для односвязных многообразий эти понятия почти равносильны, как это демонстрируют главные результаты настоящей заметки. До их формулировки дадим еще одно определение.

О п р е д е л е н и е. Назовем многообразие M *стабильным*, если ему диффеоморфно всякое строго стабильно диффеоморфное ему многообразие.

1.1. Т е о р е м а. Односвязные $(4k+2)$ -мерные многообразия стабильны.

1.2. Теорема. Первые стабилизации односвязных многообразий размерности $4k > 4$ уже стабильны.

Теоремы 1.1 и 1.2 и некоторые их приложения, относящиеся к полным пересечениям в CP^N , анонсированы в заметках [4,5]. По поводу этих и других приложений см. статью автора "Diffeomorphity criteria for smooth manifolds and algebraic varieties" с изложением его доклада на Международной Мальцевской конференции по алгебре, проходившей в Новосибирске в августе 1989 г. Труды конференции публикуются Американским математическим обществом в серии "Lecture Notes in Mathematics".

Организация материала. Теоремы 1.1 и 1.2 доказываются в § 5 и 6. В § 2,3 доказываются вспомогательные алгебраические утверждения о целочисленных билинейных формах, в § 4 строятся автодиффеоморфизмы, используемые в доказательстве.

Пользуюсь возможностью поблагодарить М.Крека, любезно приславшего мне работы [2,3], а также А.С.Меркурьева, В.В.Никулина, И.А.Панина, Ю.Г.Тетерина и С.В.Чмута за полезные обсуждения.

§ 2. Кососимметрические формы, оснащенные квадратичным вычетом

Главный результат этого параграфа - предложение 2.2.

2.1. Обозначения. Пусть H - конечно порожденная свободная абелева группа - "решетка" - и $\Phi: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ - билинейная кососимметрическая форма, значения которой мы обычно будем записывать в виде произведения аргументов: $\Phi(x, y) = xy$. Пусть $q: H \rightarrow \mathbb{Z}_2$ - квадратичная \mathbb{Z}_2 -форма, ассоциированная с Φ , т.е. такое отображение, что для любых $x, y \in H$ имеет место равенство

$$q(x+y) - q(x) - q(y) = \Phi(x, y) \pmod{2}.$$

С произвольным $a \in H$ связана так называемая трансвекция $t_a: H \rightarrow H$ - это преобразование решетки H , определяемое формулой

$$t_a(x) = x - (x, a) a.$$

Нетрудно видеть, что t_a^2 , а если $q(a)=1$, то и t_a являются преобразованиями решетки H , сохраняющими формы Φ и q . Обозначим группу преобразований, порожденную квадратами трансвекций t_a^2 , через $\Gamma_{t^2}(H)$, а группу преобразований, порожденную $\Gamma_{t^2}(H)$ и трансвекциями t_a с $q(a)=1$, обозначим через $\Gamma_t(H)$.

Для доказательства теоремы 1.1 нам потребуется следующий факт, который доказывается в оставшейся части этого параграфа.

2.2. Предложение. Пусть $u_0, v_0, u_1, v_1 \in H$, причем $u_0 v_0 = u_1 v_1 = 1$ и $q(u_0) = q(u_1) = 0$. Тогда существует преобразование $g \in \Gamma_t(H)$, которое переводит u_0 в u_1 , т.е. $u_1 = g(u_0)$.

Для доказательства мы рассмотрим сначала специальный, а затем общий случай.

2.3. Случай А. Пусть $u_1 - u_0 \in 2H$, т.е. пусть u_1 и u_0 "сравнимы по модулю 2". Тогда u_0 можно перевести в u_1 посредством преобразования из $\Gamma_{t^2}(H)$. Начнем с некоторого упрощения ситуации, не влияющего на степень общности.

Во-первых, можно считать, что H совпадает с линейной оболочкой векторов u_0, v_0, u_1, v_1 (точнее, с пересечением решетки H и векторного пространства, натянутого на u_0, v_0, u_1, v_1).

Для простоты ограничимся случаем, когда $\text{rk } H = 4$ и $\det H \neq 0$.

Во-вторых, будем считать, что не только $u_1 - u_0 \in 2H$, но также $v_1 - v_0 \in 2H$. (Иначе можно заменить v_1 на $v_0 + \Phi(u_0 - u_1, v_0)v_1$.)

2.4. Перейдем к доказательству предложения 2.2 в случае А. Через $G(H)$ будем обозначать фактор-группу $\text{Hom}(H, \mathbb{Z})/2H'$, где H' - образ решетки H при естественном отображении, индуцированном спариванием Φ . Если H - невырожденная решетка, т.е. $\det H \neq 0$, то $G(H)$ - конечная абелева группа порядка $2^{\text{rk} H} \cdot \det H$ с невырожденной кососимметрической формой со значениями в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (или, если угодно, в подходящей циклической группе).

2.5. У т в е р ж д е н и е. Группа $\Gamma_2(H)$ состоит из тех и только тех преобразований решетки H , которые индуцируют тождественный автоморфизм группы $G(H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это немедленно следует из предложения 2 работы Чмутава [6]. •

Перейдем к описанию искомого преобразования.

2.6. Л е м м а. Существует автоморфизм $\varphi: H \rightarrow H$ решетки H , сохраняющий форму Φ , индуцирующий на группе $G(H)$ тождественный автоморфизм и переводящий вектор u_0 в u_1 , т.е. $\varphi(u_0) = \bar{u}_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим линейную оболочку L_i векторов u_i, v_i и ее ортогональное дополнение $N_i = L_i^\perp$; $i=0, 1$. Ранг решетки N_i равен 2, и $\det N_i = \det H$. Поэтому существует изоморфизм $N_0 \cong N_1$.

Далее, рассмотрим разложение в прямую сумму:

$$G(H) = G(L_1) \oplus G(N_1) \cong \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_d^2,$$

где $d = \sqrt{\det H}$; $i=0, 1$. Здесь

$$G(L_0) = G(L_1) \text{ и } G(N_0) = (G(L_0))^\perp = (G(L_1))^\perp = G(N_1).$$

Рассмотрим изоморфизм $\alpha: L_0 \rightarrow L_1$, при котором $u_0 \mapsto u_1, v_0 \mapsto v_1$, и изоморфизм $\beta: N_0 \rightarrow N_1$, которым индуцируется только что описанный изоморфизм $G(N_0) = G(N_1)$. (Такой изоморфизм β существует в силу эпиморфности естественного гомоморфизма $Sp(N_1) \rightarrow Sp(G(N_1))$ или, что то же, гомоморфизма редукции по модулю d , $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}_d)$.) В качестве искомого автоморфизма φ мы можем теперь взять гомоморфизм

$$\alpha \oplus \beta: H = L_0 \oplus N_0 \rightarrow L_1 \oplus N_1 = H.$$

Он, очевидно, обладает требуемыми свойствами. Лемма 2.6 доказана.

2.7. О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а в с л у ч а е А. Доказанная лемма 2.6 утверждает, что вектор u_0 переводится в u_1 автоморфизмом φ решетки H , индуцирующим тождественный автоморфизм группы $G(H)$. Но в силу

утверждения 2.5 всякий автоморфизм φ с таким свойством содержится в группе $\Gamma_{t_2}(H)$. На этом доказательство предложения 2.2 в случае А заканчивается.

2.8. *Случай В.* Пусть u_0 и u_1 - произвольные, т.е. не обязательно $u_1 - u_0 \in 2H$. Но тривиально проверяется, что $u_0 + 2H$ переводится в $u_1 + 2H$ допустимыми трансвекциями t_{a_1} , где $q(a_1) = 1$. Таким образом, случай В сводится к случаю А, рассмотренному в п. 2.3. На этом доказательство предложения 2.2 заканчивается.

2.9. *З а м е ч а н и е.* Легко видеть, что утверждение 2.2 остается верным и тогда, когда никакой формы q нет, и допустимы произвольные трансвекции. Это важно для доказательства теоремы 1.1 в случае размерностей 6 и 14.

§ 3. Симметрические формы

Главный результат настоящего параграфа - сформулированное ниже предложение 3.2. Оно нужно для доказательства теоремы 1.2.

3.1. *О б о з н а ч е н и я.* Нам потребуются обозначения, близкие к используемым в § 2, ср. п. 2.1.

В дальнейшем H - конечно порожденная свободная абелева группа и $\Phi: H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ - билинейная симметрическая четная форма (для простоты - невырожденная), значения которой будем записывать в виде произведения: $\Phi(x, y) = xy$. С каждым вектором $a \in H$ таким, что $a \cdot a = \pm 2$, связано отражение $s_a: H \rightarrow H$, определяемое формулой

$$s_a(x) = x \mp (x, a)a.$$

Легко видеть, что s_a сохраняет форму Φ .

Обозначим через $\Gamma_s(H)$ группу изометрий решетки H , порожденную отражениями s_a , где $a^2 = \pm 2$.

3.2. *П р е д л о ж е н и е.* Пусть даны векторы $u_i, v_i \in H$; $i = 0, 1, 2, 3$. Пусть при этом $u_1^2 = v_1^2 = 0$, $u_1 v_1 = 1$. Пусть, кроме того, векторы $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2$ ортогональны векторам u_3, v_3 , а векторы u_1, v_1 - векторам u_2, v_2 :

$$\langle u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2 \rangle \perp \langle u_3, v_3 \rangle, \quad \langle u_1, v_1 \rangle \perp \langle u_2, v_2 \rangle.$$

Тогда существует преобразование $g \in \Gamma_s(H)$, которое переводит u_0 в u_1 , оставляя u_3 на месте, т.е. $g(u_0) = u_1, g(u_3) = u_3$.

(Строящаяся ниже композиция отражений переводит также v_0 в v_1 , оставляя u на месте, но это нам не потребуется).

3.3. Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству.

Обозначим через G_H дискриминантную группу решетки H : пусть $G_H = \text{Hom}(H, \mathbb{Z})/H'$, где H' - образ решетки H при естественном отображении. Если решетка H невырождена, то G_H есть конечная абелева группа порядка $\det H$. На ней определена невырожденная билинейная форма со значениями в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (или, если угодно, в подходящей циклической группе).

3.4. *У т в е р ж д е н и е.* Группа $\Gamma_s(H)$ состоит в точности из тех изометрий решетки H , которые индуцируют тождественный автоморфизм дискриминантной группы G_H .

Доказательство. Это следует из теоремы 2.7 статьи Кнезера [7]. Эта теорема применима к решетке H , поскольку H четная и ее \mathbb{Z} -индекс Витта ≥ 3 . •

3.5. Утверждение. Пусть N_0, N_1 - невырожденные знаконеопределенные четные решетки одинакового ранга и сигнатуры. Если $\text{rk } N_1$ по меньшей мере на 2 превосходит число образующих группы $G_{N_i}, i=0,1$, то каждая изометрия $G_{N_0} \rightarrow G_{N_1}$ индуцируется некоторой изометрией $N_0 \rightarrow N_1$.

Доказательство. Это следует из теорем 1.13.2 и 1.14.2 работы Никулина [8]. •

Теперь мы можем описать искомую изометрию решетки H .

3.6. Лемма. Существует изометрия $g: H \rightarrow H$, переводящая u_0 в u_1 , оставляющая u_3 на месте и индуцирующая тождественный автоморфизм дискриминантной группы G_H .

Доказательство. Рассмотрим линейную оболочку L_1 векторов u_1, v_1, u_3, v_3 и ее ортогональное дополнение $N_1 = L_1^\perp; i=0,1$. Ранги и сигнатуры решеток N_0, N_1 одинаковы, а их дискриминантные группы, очевидно, изоморфны: $G_{N_0} = G_H = G_{N_1}$. Кроме того, ясно, что ранг решетки N_1 по крайней мере на 2 больше числа образующих группы G_{N_1} , а сама решетка знаконеопределенная. Из утверждения 3.5 следует, что существует изоморфизм $\beta: N_0 \rightarrow N_1$, которым индуцируется описанный выше канонический изоморфизм $G_{N_0} \rightarrow G_{N_1}$. Рассмотрим еще автоморфизм $\alpha: L_0 \rightarrow L_1$, при котором $u_0 \mapsto u_1, v_0 \mapsto v_1, u_3 \mapsto u_3, v_3 \mapsto v_3$. Теперь в качестве искомого автоморфизма g можно взять гомоморфизм

$$\alpha \circ \beta : H = L_0 \oplus N_0 \rightarrow L_1 \oplus N_1 = H.$$

Лемма 3.6 доказана.

3.7. Окончание доказательства предложения 3.2. Доказанная лемма 3.6 утверждает, что существует изометрия $g: H \rightarrow H$, при которой $u_0 \mapsto u_1, u_3 \mapsto u_3$ и которая индуцирует тождественное преобразование группы G_H . В силу утверждения 3.4 изометрия g содержится в группе $\Gamma_s(H)$, порождаемой отражениями. На этом доказательство предложения 3.2 заканчивается.

§ 4. Построение автодиффеоморфизмов

4.1. Обобщенные скручивания Ликориша - Дена. Подробное описание см., например, в статье Каса [9]. Исходными данными для скручивания - автодиффеоморфизма многообразия M - служат вложенная сфера $S^n \hookrightarrow M^{2n}$ и изоморфизм между ее касательным и нормальным расслоением. (В частности, если n четно, то индекс самопересечения этой сферы равен ± 2). Как хорошо известно, автоморфизм, индуцируемый в гомологиях скручиванием, при нечетном n есть трансвекция t_a , а при четном n - отражение s_a (t_a и s_a описаны в п.2.1 и 3.1). Здесь a - класс, реализуемый сферой, вдоль которой производится скручивание.

4.2. Двойное скручивание. Этот диффеоморфизм мы опишем более

подробно, чем предыдущий. Пусть $S^n \subset M^{2n}$ - сфера с тривиальным нормальным расслоением, реализующая гомологический класс b . Рассмотрим соответствующее вложение $S^n \times D^n \rightarrow M^{2n}$. Интересующий нас автодиффеоморфизм многообразия M - двойное скручивание имеет вид $(s, d) \mapsto (\varphi_d(s), d)$ на $S^n \times D^n$ и тождественен в дополнении. Здесь $\varphi_d \in SO(n+1)$ - некоторое семейство поворотов, параметризуемых точками шара D^n , причем если $d \in S^{n-1} = \partial D^n$, то $\varphi_d = \text{id}$. Вместо $\{\varphi_d\}$, понимаемого как отображение $D^n \rightarrow SO(n+1)$, удобнее будет явно описать соответствующий двойному скручиванию сфероид $\varphi: S^n \rightarrow SO(n+1)$.

Для единичного вектора $e \in S^n$ обозначим отражение в ортогональной ему гиперплоскости через r_e . Пусть $\varphi(e) = r_e \circ r_{e_1}$, где $e_1 \in S^n$ - отмеченная точка.

Теперь можно положить $\varphi_d = \varphi(\text{pr}(d))$, где $\text{pr}: D^n \rightarrow S^n$ - естественная факторизация, при которой $\text{pr}(\partial D^n) = \{e_1\}$.

Нетрудно проверить, что если n нечетно, то двойным скручиванием индуцируется в группе гомологий $H_n M$ квадрат трансвекции t_b^2 .

(Если n четно, то индуцируется тождественный автоморфизм. Поэтому при четном n двойное скручивание интереса для нас не представляет).

4.3. Предложение. Пусть M - односвязное $(4k+2)$ -мерное многообразие, и пусть $\Sigma_0, \Sigma'_0; \Sigma_1, \Sigma'_1$ - вложенные в $\text{int} M$ $(2k+1)$ -мерные сферы с тривиальным нормальным расслоением, причем Σ'_i, Σ_i трансверсально пересекаются в одной точке, $i=0,1$. Тогда существует диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$, неподвижный в окрестности края и бесконечности, который переводит гомологический класс $[\Sigma_0]$ в $[\Sigma_1]$, т.е. $\varphi_*([\Sigma_0]) = [\Sigma_1]$.

(Нетрудно добиться и того, чтобы сфера Σ_0 переходила непосредственно в Σ_1 , а сфера Σ'_0 - в Σ'_1 , но это нам здесь не нужно).

Доказательство. Приведа сферы $\Sigma_0, \Sigma'_0, \Sigma_1, \Sigma'_1$ в общее положение и добавив к регулярной окрестности их объединения несколько утолщенных двумерных дисков, мы можем рассматривать эти сферы лежащими в параллелизуемом $2k$ -связном теле с ручками $U \subset M$.

К этой ситуации применима теорема 2.2. В ее обозначениях положим

$$H = H_{2k+1} U, u_i = [\Sigma_i], v_i = [\Sigma'_i]; i = 0, 1.$$

Роль формы Φ играет индекс пересечения, а роль формы q - форма Кервера-Милнора. Она принимает значение 0 на классах, реализуемых сферой с тривиальным нормальным расслоением, и значение 1 - на остальных, они реализуются сферами, у которых нормальное расслоение изоморфно касательному. (Здесь мы предполагаем, что $n \neq 1, 3, 7$). В оставшихся трех случаях рассуждение еще упрощается, ср. замечание 2.9). Воспользовавшись теоремой 2.2, мы получаем, что класс $[\Sigma_0]$ переводится в $[\Sigma_1]$ преобразованием из $\Gamma_t(H)$. Теперь для доказательства предложения 4.3 достаточно воспользоваться тем, что порождающие группу $\Gamma_t(H)$ преобразования вида t_a и t_b^2 реализуются диффеоморфизмами. Соответствующие диффеоморфизмы - скручивания Дена и

двойные скручивания - описаны выше, в п. 4.1, 4.2. Предложение 4.3 доказано.

4.4. Предложение. Пусть M - односвязное $4k$ -мерное многообразие, $k \neq 1$. Пусть $\Sigma_i, \Sigma'_i \subset \text{int} M$, $i=0,1,2,3$ - вложенные $2k$ -мерные сферы с тривиальным нормальным расслоением, причем для каждого i сферы Σ_i и Σ'_i трансверсально пересекаются в одной точке. Пусть, кроме того, сферы Σ_3, Σ'_3 не имеют общих точек с Σ_i, Σ'_i при $i=0,1,2$, и Σ_1, Σ'_1 не имеют общих точек с Σ_2, Σ'_2 :

$$(\Sigma_3 \cup \Sigma'_3) \cap \bigcup_{i=0}^2 (\Sigma_i \cup \Sigma'_i) = \emptyset = (\Sigma_1 \cup \Sigma'_1) \cap (\Sigma_2 \cup \Sigma'_2).$$

Тогда существует диффеоморфизм $\varphi: M \rightarrow M$, неподвижный в окрестности края и бесконечности, который переводит гомологический класс $[\Sigma_0]$ в $[\Sigma_1]$, а класс $[\Sigma_2]$ оставляет на месте:

$$\varphi_*([\Sigma_0]) = [\Sigma_1], \quad \varphi_*([\Sigma_2]) = [\Sigma_2].$$

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего предложения 4.3 лишь вместо предложения 2.2 нужно воспользоваться предложением 3.2 и тем, что образующие группы $\Gamma_{\mathbb{S}}(H)$ - отражения s_a с $a^2 = \pm 2$ - реализуются скручиваниями Дена, см. п. 4.1. •

§ 5. Стабильность односвязных $(4k+2)$ -мерных многообразий

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1, утверждающую, что односвязные $(4k+2)$ -мерные многообразия стабильны, т.е. что если $M_0 \#_a (S^n \times S^n) \cong M_1 \#_a (S^n \times S^n)$, то и $M_0 \cong M_1$. Достаточно, очевидно, ограничиться следующим частным случаем.

5.1. Предложение. Пусть M_0 и M_1 - односвязные $(4k+2)$ -мерные многообразия. Тогда если $M_0 \# S^n \times S^n \cong M_1 \# S^n \times S^n$, где $n=2k+1$, то и $M_0 \cong M_1$, причем эти два диффеоморфизма совпадают в некоторой окрестности края и бесконечности.

5.2. Идея доказательства заключается в том, чтобы рассмотреть подходящий кобордизм между M_0 и $M_{1/2} = M_0 \# S^n \times S^n = M_1 \# S^n \times S^n$ и, далее, между $M_{1/2}$ и M_1 как результат приклеивания к $M_0 \times I$ последовательно двух ручек \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 индекса n и $n+1$, а затем проверить, что эти ручки сокращаются.

5.3. Обозначения. Введем обозначения для слоев в связных слагаемых $S^n \times S^n$ из условия предложения 5.1: пусть

$$M_0 \# (\Sigma_0 \times \Sigma'_0) \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1).$$

Будем считать сферы Σ_i, Σ'_i лежащими в $M_{1/2} \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1)$, $i=0,1$. Легко видеть, что для $i=0,1$ $M_{1/2}$ есть результат перестройки многообразия M_1 вдоль тривиально вложенной сферы S^{n-1} со стандартным оснащением. Пусть при этом комеридианными сферами соответствующих ручек \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 будут Σ_0 и Σ'_1 .

5.4. Окончание доказательства предложения 5.1. В силу предложения 4.3, которое утверждает, что класс $[\Sigma_0]$

переводится в $[\Sigma_1]$ диффеоморфизмом $M_{1/2} \rightarrow M_{1/2}$, неподвижным в окрестности края и бесконечности, достаточно будет ограничиться случаем, когда $[\Sigma_0] = [\Sigma_1]$.

Так как индекс пересечения сфер Σ_0 и Σ'_1 равен 1, то приклеиваемые ручки \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 сокращаются, и мы получаем между M_0 и M_1 тривиальный кобордизм. Таким образом, $M_0 \cong M_1$, и предложение 5.1 доказано.

§ 6. Почти стабильность односвязных $4k$ -мерных многообразий

Здесь мы докажем теорему 1.2, которая утверждает, что первая стабилизация односвязного $4k$ -мерного многообразия ($k > 1$) стабильна. Это значит, что если $M_0 \# a(S^n \times S^n) \cong M_1 \# a(S^n \times S^n)$, где $M_1 \cong M_2 \# S^n \times S^n$, то $M_0 \cong M_1$. Очевидно, что достаточно доказать следующее утверждение.

6.1. Предложение. Пусть M_0, M_1 — односвязные многообразия размерности $4k+4$, причем $M_1 \cong M_2 \# S^n \times S^n$ для некоторого M_2 , где $n=2k$. Тогда если $M_0 \# S^n \times S^n \cong M_1 \# S^n \times S^n$, то и $M_0 \cong M_1$, причем два эти диффеоморфизма совпадают в окрестности края и бесконечности.

6.2. Это предложение доказывается аналогично предложению 5.1. Мы строим подходящий кобордизм между M_0 и M_1 — он получается в результате пристройки к $M_0 \times I$ четырех ручек — $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3$, — которые попарно сокращаются: \mathcal{H}_0 с \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_3 с \mathcal{H}'_3 . Здесь вместо предложения 4.3 приходится воспользоваться предложением 4.4.

6.3. Обозначения. Прежде всего введем обозначения для сомножителей в связных слагаемых $S^n \times S^n$ из формулировки. Пусть

$$M_0 \# (\Sigma_0 \times \Sigma'_0) \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1) \quad \text{и} \quad M_1 \cong M_2 \# (\Sigma_2 \times \Sigma'_2).$$

Рассмотрим многообразие $M_{1/2} \cong M_1 \# (\Sigma_1 \times \Sigma'_1) \# (\Sigma_3 \times \Sigma'_3)$, где $i=0,1$ и $\Sigma_3, \Sigma'_3 \cong S^n$. Будем считать сферы Σ_i, Σ'_i при $i=0,1,2,3$ лежащими в $M_{1/2}$. Мы представляем кобордизм между M_0 и $M_{1/2} \cong M_0 \# 2(S^n \times S^n)$ как результат пристройки к тривиальному кобордизму $M_0 \times I$ двух тривиальных ручек \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_3 индекса n . Их комеридианными сферами будут Σ_0 и Σ_3 . Аналогично определяются ручки $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_3$, причем ручки \mathcal{H}_3 и \mathcal{H}'_3 сокращаются.

6.4. Окончание доказательства предложения 6.1. В силу предложения 4.4 можно считать, что $[\Sigma_0] = [\Sigma_1]$. В таком случае сокращаются не только ручки \mathcal{H}_3 и \mathcal{H}'_3 , но и ручки \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}'_1 , и мы получаем между M_0 и M_1 тривиальный кобордизм. Следовательно, $M_0 \cong M_1$, и предложение 6.1, а значит, и теорема 1.2 доказаны.

Примечание при корректуре. Как сообщил мне М.Крек, им совместно с И.Хэмблтоном доказана стабильность второй стабилизации всякого $2n$ -мерного многообразия, $n \geq 3$, с конечной фундаментальной группой.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] F r e e d m a n M. Uniqueness theorems for taut submanifolds // Pacific J. Math. 1976. Vol.62, N 2. P.379-387.
- [2] К р е с к М. Duality and surgery: an extension of results of Browder. Novikov and Wall about surgery on compact manifolds. Preprint. Mainz, 1985. 100 p.
- [3] Т р а в и н г К. Zur Diffeomorphieklassifikation vollständiger Durchschnitte. Diplomarbeit. Mainz. 1985. 97 S.
- [4] Н е т с в е т а е в N.Yu. Integer lattices automorphisms and classification of projective hypersurfaces with isolated singularities // Тез. докл. Междунар. конф. по алгебре, посвященной памяти А.И.Мальцева. Новосибирск, 1989. С.91.
- [5] Н е ц в е т а е в Н.Ю. О стабильной диффеоморфности односвязных многообразий // Научные математические чтения памяти М.Я.Суслина. Саратов, 1989. С.111.
- [6] Chmutov S.V. Monodromy groups of critical point of functions // Invent. Math. 1982. Vol.67, N 1. P.123-131.
- [7] К н е с е р М. Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen // Math. Ann. 1981. Bd 255, N.4. S.453-462.
- [8] Н и к у л и н В.В. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т.43, N 1. С.111-177.
- [9] К а с А. On the handlebody decomposition associated to a Lefschetz fibration // Pacific J.Math. 1980. Vol.89, N 1. P.89-104.

Ленинградский государственный университет,
 математико-механический факультет,
 198904, Ленинград, Ст.Петергоф,
 Библиотечная площадь, д.2

Поступило
 10 декабря 1989 г.