

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. V. Matiyasevich, Riemann's zeta function and finite Dirichlet series,  
*Algebra i Analiz*, 2015, Volume 27, Issue 6, 174–198

<https://www.mathnet.ru/eng/aa1472>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.83

April 21, 2025, 02:26:57



Сергею Владимировичу Востокову  
к его 70-летию

## ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И КОНЕЧНЫЕ РЯДЫ ДИРИХЛЕ

© Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ

Описаны компьютерные эксперименты по вычислению нулей, а также значений дзета-функции Римана и ее первой производной в критической полосе и левее нее, посредством конечных рядов Дирихле, определенных с помощью начальных нетривиальных нулей дзета-функции.

### §1. Введение

Одним из основных объектов изучения в теории чисел являются простые числа, в частности поведение функции  $\pi(x)$ , значение которой равно количеству простых чисел, не превосходящих  $x$ .

Одним из главных средств для изучения распределения простых чисел в натуральном ряду является *дзета-функция Римана*  $\zeta(s)$ , которая может быть определена через *ряд Дирихле*:

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots \quad (1.1)$$

Этот ряд сходится только при  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , но допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость, за исключением точки  $s = 1$ , являющейся единственным полюсом функции  $\zeta(s)$ .

Леонард Эйлер изучал ряд (1.1) при вещественных значениях  $s$ , в частности, он установил, что

$$1^{-s} + 2^{-s} + \dots + n^{-s} + \dots = \prod_{p - \text{простое}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (1.2)$$

---

*Ключевые слова:* дзета-функция Римана, конечные ряды Дирихле.

Исследования были частично поддержаны Министерством образования и науки РФ (грант 14.Z50.31.0030).

Это тождество Эйлера по существу является аналитической формой основной теоремы арифметики, утверждающей существование и единственность разложения произвольного натурального числа на простые множители.

Выраженная в (1.2) тождественность суммы, взятой по всем натуральным числам, и произведения, взятого только по простым числам, объясняет, почему дзета-функция является мощным средством изучения этих чисел. Эйлер использовал тождество (1.2) для нового доказательства бесконечности множества простых чисел, которое можно выразить одной фразой: *если бы это множество было конечным, то расходящийся гармонический ряд, то есть левая часть (1.2) при  $s = 1$ , имел бы конечное значение, даваемое правой частью (1.2)*.

Бернхард Риман стал рассматривать ряд (1.1) при комплексных значениях  $s$  и установил, что

$$\pi(x) = \text{Li}(x) - \text{Li}(x^{1/2})/2 + \sum_{\zeta(\rho)=0} \text{Li}(x^\rho) + \text{малые члены}, \quad (1.3)$$

где  $\text{Li}$  — это интегральный логарифм, определяемый как

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)} dt.$$

В (1.3) суммирование ведется по нулям дзета-функции, и вопрос о том, сколь хорошо  $\text{Li}(x)$  приближает  $\pi(x)$ , оказывается тесно связанным с вопросом о том, сколь велика может быть вещественная часть нуля этой функции. Эйлер указал, что отрицательные четные числа являются ее нулями, ныне эти нули называют *тривиальными*. Риман установил, что других вещественных нулей нет, а все невещественные, *нетривиальные*, нули лежат в *критической полосе*  $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$ .

Знаменитая *гипотеза Римана* предсказывает, что эти нули лежат на *критической прямой*  $\text{Re}(s) = 1/2$ , и это утверждение эквивалентно тому, что

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2} \ln(x)).$$

Автор ([6], см. также [1]) ввел в рассмотрение конечные ряды Дирихле, коэффициенты которых определены через начальные нетривиальные нули дзета-функции. Компьютерные вычисления показали, что эти ряды дают удивительно хорошие приближения к значениям дзета-функции внутри и левее критической полосы, а также позволяют находить приближенные

значения других нетривиальных нулей, не использованных для построения самих рядов. Оказалось также, что коэффициенты этих рядов имеют теоретико-числовое содержание, дающее новые связи дзета-функции с простыми числами.

Результаты компьютерных вычислений приведены здесь в форме *численных наблюдений*, которые были сделаны, естественно, при рассмотрении ограниченного количества конечных рядов Дирихле. Тем не менее на основе этих наблюдений можно формулировать правдоподобные предположения о свойствах всех рядов рассматриваемого вида и пытаться доказывать эти свойства. До сих пор ни одно явление, обнаруженное при компьютерном вычислении, не получило теоретического объяснения/доказательства.

В [7] (см. также [1, 3]) в рассмотрение были введены несколько иные конечные ряды Дирихле, обладающие свойствами, аналогичными свойствам рядов, рассматриваемых здесь, за исключением тех, что описаны ниже в п. 5.3, 6.3 и 6.4. За продолжающимся исследованием рядов обоих типов можно следить на сайте [5].

## §2. Объекты изучения

Свою знаменитую гипотезу Риман сформулировал в [8] не как утверждение про нули дзета-функции, а как вещественность нулей функции  $\Xi(t) = \xi(1/2 + it)$ , где

$$\begin{aligned}\xi(s) &= g(s)\zeta(s), \\ g(s) &= \pi^{-s/2}(s-1)\Gamma(s/2+1).\end{aligned}$$

Про функцию  $\xi(s)$  Риман установил, что она удовлетворяет *функциональному уравнению*

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (2.1)$$

Соответственно

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(s)n^{-s} \quad (2.2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g(1-s)n^{s-1}, \quad (2.3)$$

и мы можем написать, что

$$\xi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s), \quad (2.4)$$

где

$$h_n(s) = (g(s)n^{-s} + g(1-s)n^{s-1})/2.$$

Функции  $h_n(s)$ , очевидно, удовлетворяют аналогу (2.1),

$$h_n(s) = h_n(1-s), \tag{2.5}$$

но равенство (2.4) является чисто формальным, поскольку ряд (2.2) сходится только при  $\text{Re}(s) > 1$ , а ряд (2.3) — только при  $\text{Re}(s) < 0$ .

Предполагая гипотезу Римана, а также простоту всех нулей дзета-функции, мы можем перенумеровать те из них, что лежат в верхней полуплоскости, в порядке возрастания мнимых частей:

$$\rho_1 = 1/2 + \gamma_1 i, \dots, \rho_k = 1/2 + \gamma_k i, \dots, \quad 0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_k < \dots$$

Согласно (2.1) сопряженные числа  $\rho_{-1} = 1/2 - \gamma_1 i, \dots, \rho_{-k} = 1/2 - \gamma_k i, \dots$ , и только они, будут нулями дзета-функции в нижней полуплоскости.

Рассмотрим определитель

$$\tilde{\Delta}_N(x) = \begin{vmatrix} h_1(\rho_1) & \dots & h_1(\rho_{N-1}) & h_1(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_N(\rho_1) & \dots & h_N(\rho_{N-1}) & h_N(s) \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Его можно разложить по последнему столбцу:

$$\tilde{\Delta}_N(x) = \sum_{n=1}^N \tilde{\delta}_{N,n} h_n(s). \tag{2.7}$$

Мы также проведем нормировку

$$\delta_{N,n} = \tilde{\delta}_{N,n} / \tilde{\delta}_{N,1} \tag{2.8}$$

и наряду с (2.7) будем рассматривать сумму

$$\Delta_N(s) = \sum_{n=1}^N \delta_{N,n} n^{-s}, \tag{2.9}$$

которая, однако, не является нормировкой суммы (2.7).

Конечный ряд Дирихле (2.9) и его коэффициенты и будут нашим объектом изучения.

### §3. Нули $\tilde{\Delta}_N(s)$ и $\Delta_N(s)$

Легко видеть, что  $\tilde{\Delta}_N(s)$  обращается в нуль при  $s = \rho_{\pm 1}, \dots, \rho_{\pm(N-1)}$ .

**Численное наблюдение 3.1.** Функция  $\Delta_N(s)$  имеет нули, близкие к нетривиальным нулям  $\rho_{\pm 1}, \dots, \rho_{\pm(N-1)}$ .

Таблица 3.1. Нули  $\Delta_N(s)$  вблизи начальных нетривиальных нулей дзета-функции при  $N = 503$

$$\begin{aligned}
 0 &= \Delta_N(\rho_1 - 2.889 \dots \cdot 10^{-46} - 6.420 \dots \cdot 10^{-47}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{51} + 9.585 \dots \cdot 10^{-47} + 7.702 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{101} - 2.136 \dots \cdot 10^{-46} + 3.634 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{151} - 2.813 \dots \cdot 10^{-46} + 7.467 \dots \cdot 10^{-47}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{201} + 1.218 \dots \cdot 10^{-46} - 7.894 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{251} - 1.076 \dots \cdot 10^{-46} + 5.582 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{301} + 7.911 \dots \cdot 10^{-46} + 9.647 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{351} - 2.578 \dots \cdot 10^{-46} - 2.247 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{401} - 2.090 \dots \cdot 10^{-46} + 3.744 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{451} - 2.840 \dots \cdot 10^{-46} + 1.904 \dots \cdot 10^{-47}i) \\
 0 &= \Delta_N(\rho_{501} - 2.663 \dots \cdot 10^{-46} - 1.856 \dots \cdot 10^{-46}i)
 \end{aligned}$$

Таблица 3.2. Нули  $\tilde{\Delta}_N(s)$  и  $\Delta_N(s)$  вблизи бóльших нетривиальных нулей дзета-функции при  $N = 503$

$$\begin{aligned}
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{504} + 8.032 \dots \cdot 10^{-46}i) = \Delta_N(\rho_{504} + 1.417 \dots \cdot 10^{-46} + 8.032 \dots \cdot 10^{-46}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{514} + 2.075 \dots \cdot 10^{-44}i) = \Delta_N(\rho_{514} + 8.947 \dots \cdot 10^{-44} + 2.075 \dots \cdot 10^{-44}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{524} + 3.700 \dots \cdot 10^{-39}i) = \Delta_N(\rho_{524} - 3.645 \dots \cdot 10^{-39} + 3.700 \dots \cdot 10^{-39}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{534} - 3.086 \dots \cdot 10^{-35}i) = \Delta_N(\rho_{534} - 2.593 \dots \cdot 10^{-36} - 3.086 \dots \cdot 10^{-35}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{544} + 3.016 \dots \cdot 10^{-32}i) = \Delta_N(\rho_{544} + 2.510 \dots \cdot 10^{-32} + 3.016 \dots \cdot 10^{-32}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{554} - 1.008 \dots \cdot 10^{-29}i) = \Delta_N(\rho_{554} - 1.821 \dots \cdot 10^{-29} - 1.008 \dots \cdot 10^{-29}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{564} + 2.537 \dots \cdot 10^{-27}i) = \Delta_N(\rho_{564} + 5.988 \dots \cdot 10^{-27} + 2.537 \dots \cdot 10^{-27}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{574} + 1.080 \dots \cdot 10^{-24}i) = \Delta_N(\rho_{574} - 1.418 \dots \cdot 10^{-24} + 1.080 \dots \cdot 10^{-24}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{584} - 1.608 \dots \cdot 10^{-22}i) = \Delta_N(\rho_{584} + 1.559 \dots \cdot 10^{-22} - 1.608 \dots \cdot 10^{-22}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{594} + 4.413 \dots \cdot 10^{-21}i) = \Delta_N(\rho_{594} - 7.341 \dots \cdot 10^{-21} + 4.413 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
 0 &= \tilde{\Delta}_N(\rho_{604} - 2.462 \dots \cdot 10^{-19}i) = \Delta_N(\rho_{604} + 2.157 \dots \cdot 10^{-19} - 2.462 \dots \cdot 10^{-19}i)
 \end{aligned}$$

**Численное наблюдение 3.2.** *Функции  $\tilde{\Delta}_N(s)$  и  $\Delta_N(s)$  имеют нули, близкие к  $\rho_{\pm N}, \dots, \rho_{\pm(N+L)}$ , при достаточно малых значениях  $L$ .*

Таблица 3.3. Нули  $\Delta_N(s)$  вблизи тривиальных нулей дзета-функции при  $N = 503$ 

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_N(-2 - 5.980 \dots \cdot 10^{-39}) \\
0 &= \Delta_N(-4 + 1.281 \dots \cdot 10^{-34}) \\
0 &= \Delta_N(-6 - 1.544 \dots \cdot 10^{-30}) \\
0 &= \Delta_N(-8 + 1.200 \dots \cdot 10^{-26}) \\
0 &= \Delta_N(-10 - 6.366 \dots \cdot 10^{-23}) \\
0 &= \Delta_N(-12 + 2.294 \dots \cdot 10^{-19}) \\
0 &= \Delta_N(-14 - 4.793 \dots \cdot 10^{-16})
\end{aligned}$$

Таблица 3.4. Нули  $\Delta_N(s)$  вблизи нулей дополнительного множителя при  $N = 503$ 

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta_N(1 + 20\pi i / \ln(2) - 2.997 \dots \cdot 10^{-21} + 5.866 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 50\pi i / \ln(2) - 1.238 \dots \cdot 10^{-20} + 5.088 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 80\pi i / \ln(2) - 1.305 \dots \cdot 10^{-20} - 4.309 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 110\pi i / \ln(2) - 3.869 \dots \cdot 10^{-21} - 6.406 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 140\pi i / \ln(2) - 3.921 \dots \cdot 10^{-22} + 2.350 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 170\pi i / \ln(2) - 8.513 \dots \cdot 10^{-21} + 7.125 \dots \cdot 10^{-21}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 200\pi i / \ln(2) - 1.447 \dots \cdot 10^{-20} - 1.705 \dots \cdot 10^{-22}i) \\
0 &= \Delta_N(1 + 230\pi i / \ln(2) + 5.114 \dots \cdot 10^{-11} - 1.419 \dots \cdot 10^{-10}i)
\end{aligned}$$

**Численное наблюдение 3.3.** *Функции  $\tilde{\Delta}_N(s)$  и  $\Delta_N(s)$  имеют нули, близкие к тривиальным нулям  $-2, -4, \dots, -2L$ , при достаточно малых значениях  $L$ .*

**Численное наблюдение 3.4.** *Функции  $\tilde{\Delta}_N(s)$  и  $\Delta_N(s)$  имеют нули, близкие к числам  $1 \pm 2\pi i / \ln(2), \dots, 1 \pm 2\pi i L / \ln(2)$ , при достаточно малых значениях  $L$ .*

Количество близких нулей, указанных в наблюдениях 3.2–3.4, увеличивается вместе с ростом  $N$ .

Табл. 3.1–3.4 демонстрируют наблюдения 3.1–3.4. Чтобы понять происхождение нулей из последнего наблюдения, можно посмотреть на рис. 3.1, показывающий типичное поведение чисел  $\delta_{N,n}$  при достаточно большом  $N$ .

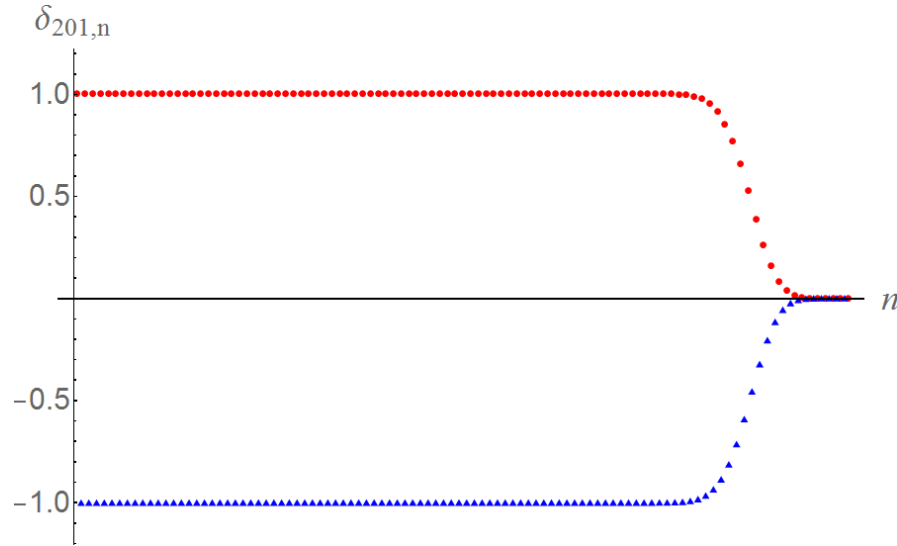


Рис. 3.1. Числа  $\delta_{N,n}$  (круги для четных  $n$  и треугольники для нечетных  $n$ ) при  $N = 201$ .

Мы видим, что начальные коэффициенты ряда Дирихле (2.9) при  $N = 201$  близки к соответствующим коэффициентам ряда

$$1^{-s} - 2^{-s} + \dots + (-1)^{n+1} n^{-s} + \dots = (1 - 2 \cdot 2^{-s}) \zeta(s), \quad (3.1)$$

задающего *знакопеременную дзета-функцию*, которая известна также как *эта-функция Дирихле*  $\eta(s)$ ; наличие такого очень слабого отношения сходимости двух рядов Дирихле мы будем символически записывать как

$$\Delta_N(s) \Leftrightarrow \eta(s). \quad (3.2)$$

Нули из наблюдения 3.4 — это нули первого сомножителя в правой части (3.1). Этот сомножитель обращается в 0 также при  $s = 1$ , но этот нуль сокращается в (3.1) с полюсом дзета-функции.

Неформально наблюдаемые явления можно описать так: *начальные нетривиальные нули дзета-функции „знают“ про другие нетривиальные нули, про начальные тривиальные нули и про существование полюса у дзета-функции.*

Понятно, что подобные эффекты не имеют места для рядов Тейлора — многочлен, нули которого являются также нулями некоторой мероморфной функции, не несет никакой информации ни о других нулях этой функции, ни о ее возможных полюсах. По-видимому, существенную роль здесь играет то обстоятельство, что дзета-функция задается рядом Дирихле.



Таблица 4.1. Числа  $\mu_{N,n}$  при  $N = 5001$

$$\begin{array}{rcl}
 \delta_{N,3} - \delta_{N,1} & = & \mu_{N,3} = -1.047 \dots \cdot 10^{-208} \\
 \delta_{N,4} - \delta_{N,2} & = & \mu_{N,4} = -3.507 \dots \cdot 10^{-479} \\
 \delta_{N,5} - \delta_{N,1} & = & \mu_{N,5} = +1.808 \dots \cdot 10^{-699} \\
 \delta_{N,6} - \delta_{N,3} - \delta_{N,2} + \delta_{N,1} & = & \mu_{N,6} = -4.322 \dots \cdot 10^{-872} \\
 \delta_{N,7} - \delta_{N,1} & = & \mu_{N,7} = +1.554 \dots \cdot 10^{-1007} \\
 \delta_{N,8} - \delta_{N,4} & = & \mu_{N,8} = -1.360 \dots \cdot 10^{-1114} \\
 \delta_{N,9} - \delta_{N,3} & = & \mu_{N,9} = -8.367 \dots \cdot 10^{-1200} \\
 \delta_{N,10} - \delta_{N,5} - \delta_{N,2} + \delta_{N,1} & = & \mu_{N,10} = +8.322 \dots \cdot 10^{-1268} \\
 \delta_{N,11} - \delta_{N,1} & = & \mu_{N,11} = +6.055 \dots \cdot 10^{-1317} \\
 \delta_{N,12} - \delta_{N,6} - \delta_{N,4} + \delta_{N,2} & = & \mu_{N,12} = -2.228 \dots \cdot 10^{-1361}
 \end{array}$$

То, что это свойство является очень сильным, демонстрирует, например, теорема Гамбургера о том, что среди всех функций, удовлетворяющих функциональному уравнению (2.1) (и еще несколькими не очень обременительным условиям) единственной функцией, задаваемой рядом Дирихле, является дзета-функция Римана.

#### §4. Почти линейные соотношения

При фиксированном значении  $N$  между числами  $\delta_{N,n}$  наблюдается много почти линейных соотношений с целыми коэффициентами или рациональными коэффициентами с небольшими знаменателями; ниже описаны две серии подобных соотношений.

Рассмотрим отношение

$$\nu_N(s) = \frac{\Delta_N(s)}{\zeta(s)} \tag{4.1}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^N \delta_{N,n} n^{-s}}{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{N,n} n^{-s}. \tag{4.2}$$

Числа  $\mu_{N,n}$  являются, как легко видеть, линейными комбинациями чисел  $\delta_{N,n}$ : при доопределении  $\delta_{N,n} = 0$  для  $n > N$

$$\mu_{N,n} = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \delta_{N,m},$$

где  $\mu(k)$  — функция Мёбиуса.

Согласно (3.2) следует ожидать, что

$$\nu_N(s) \approx 1 - 2 \cdot 2^{-s}$$

и, действительно, имеются соответствующие почти линейные соотношения между начальными числами  $\delta_{N,n}$  (см. табл. 4.1).

Таблица 4.2. Отношения  $\nu_{N,L}/(\mu_{N,L+1}/(L+1))$ 

$L$	$\nu_{N,L}(1)/(\mu_{N,L+1}/(L+1)) + 1$		
	$N = 3001$	$N = 4001$	$N = 5001$
1	$+1.335 \dots \cdot 10^{-125}$	$-3.944 \dots \cdot 10^{-168}$	$-3.492 \dots \cdot 10^{-209}$
2	$-7.059 \dots \cdot 10^{-161}$	$+6.245 \dots \cdot 10^{-216}$	$-2.510 \dots \cdot 10^{-271}$
3	$+1.803 \dots \cdot 10^{-127}$	$+1.197 \dots \cdot 10^{-174}$	$+4.125 \dots \cdot 10^{-221}$
4	$-5.663 \dots \cdot 10^{-99}$	$-2.907 \dots \cdot 10^{-136}$	$+1.991 \dots \cdot 10^{-173}$
5	$-3.823 \dots \cdot 10^{-76}$	$+9.485 \dots \cdot 10^{-106}$	$+3.082 \dots \cdot 10^{-136}$
6	$+4.778 \dots \cdot 10^{-58}$	$+1.963 \dots \cdot 10^{-83}$	$+7.657 \dots \cdot 10^{-108}$
7	$+1.065 \dots \cdot 10^{-38}$	$-1.528 \dots \cdot 10^{-63}$	$-5.467 \dots \cdot 10^{-86}$
8		$+2.608 \dots \cdot 10^{-48}$	$+8.951 \dots \cdot 10^{-69}$
9			$-1.836 \dots \cdot 10^{-48}$

Рассмотрим начальные отрезки ряда (4.2):

$$\nu_{N,L}(s) = \sum_{n=1}^L \mu_{N,n} n^{-s}.$$

Согласно (4.1)  $\nu_N(1) = 0$ , и хотя ряд (4.2), скорее всего, расходится, при не слишком больших  $L$  значения  $|\nu_{N,L}(1)|$  быстро убывают с ростом  $L$ , причем с такой же скоростью, как  $|\mu_{N,L+1}/(L+1)|$ .

**Численное наблюдение 4.1.** Для достаточно малых значений  $L$  отношение  $\nu_{N,L}(1)/(\mu_{N,L+1}/(L+1))$  близко к  $-1$ .

Табл. 4.2 демонстрирует это наблюдение, которое, очевидно, дает еще одну серию почти линейных соотношений между числами  $\delta_{N,n}$ .

### §5. Арифметические свойства чисел $\delta_{N,n}$

Числа  $\delta_{N,n}$ , определенные посредством (2.7) и (2.8), являются вещественными. Тем не менее они имеют теоретико-числовое содержание, в частности, эти числа несут информацию о простых числах, причем эта информация может быть извлечена из них разными способами.

**5.1. Решето Эратосфена.** На рис. 5.1 изображены значения  $\log_{10}(|\delta_{5001,n} - 1|)$ . Визуально точки на этом графике располагаются на четырех уровнях:

- точки самого верхнего уровня соответствуют четным значениям  $n$ ;

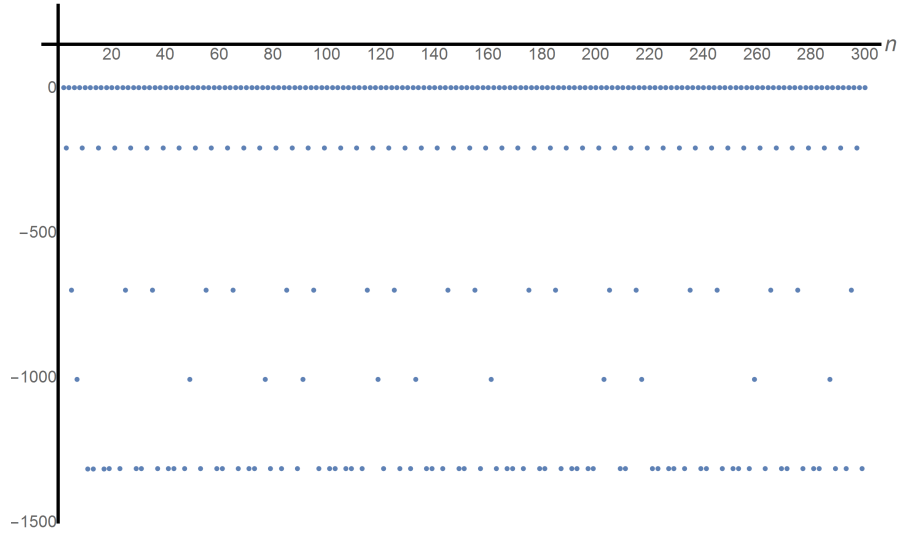


Рис. 5.1. Числа  $\log_{10}(|\delta_{N,n} - 1|)$  при  $N = 5001$ .

- точки следующего уровня соответствуют нечетным значениям  $n$ , кратным 3;
- на третьем сверху уровне расположены точки, соответствующие значениям  $n$ , которые делятся на 5, но не делятся ни на 2, ни на 3;
- на четвертом сверху уровне расположены точки, соответствующие значениям  $n$ , которые делятся на 7, но взаимно просты с  $2 \cdot 3 \cdot 5$ ;
- точки самого нижнего уровня соответствуют тем значениям  $n$ , которые больше 1 и взаимно просты с  $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ .

Иными словами, появление точки, соответствующей некоторому числу, на конкретном уровне определяется наименьшим простым делителем этого числа, т.е. имеется соответствие шагам построения решета Эратосфена. По этой причине все уровни, кроме самого нижнего, мы будем называть *эратосфеновыми*, а самый нижний — *пост-эратосфеновым*. С увеличением  $N$  количество эратосфеновых уровней растет.

На рис. 5.1 не видно различия в ординатах точек, лежащих на одном эратосфеновом уровне. В действительности каждый такой уровень в свою очередь расщепляется на подуровни. На рис. 5.2 изображены значения  $\log_{10}(|\delta_{5001,2m} - \delta_{5001,2}|)$ . Мы снова наблюдаем картину, похожую на решето Эратосфена, но при ином правиле распределения точек по уровням. Изменения затронули два первых уровня:

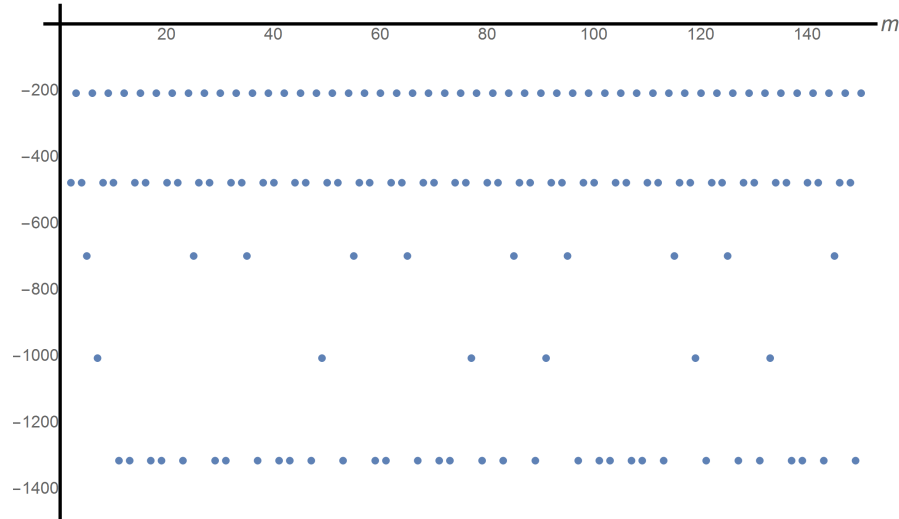


Рис. 5.2. Числа  $\log_{10}(|\delta_{N,2m} - \delta_{N,2}|)$  при  $N = 5001$ .

- точки самого верхнего уровня теперь соответствуют значениям  $m$ , кратным 3;
- точки следующего уровня соответствуют четным значениям  $m$ , не кратным 3.

Иными словами, теперь построение решета Эратосфена идет при следующем порядке простых чисел: 3, 2, 5, 7, ...

**Численное наблюдение 5.1.** Пусть  $n$  пробегает арифметическую прогрессию  $d, 2d, \dots, md, \dots$ , где  $d = 2^{k_2} 3^{k_3} 5^{k_5} \dots$ . При достаточно большом  $N$  соответствующий эратосфенов подуровень разбивается на подуровни следующего ранга в соответствии с делимостью  $m$  на  $q_1, q_2, \dots$ , где эти простые числа упорядочены так, что

$$q_1^{k_{q_1}+1} < q_2^{k_{q_2}+1} < \dots < q_j^{k_{q_j}+1} < \dots$$

Иными словами, в поведении чисел  $\delta_{N,n}$  имеется некоторая фрактальная структура.

Рис. 5.3 расширяет рис. 5.1 на большие значения  $n$ . Мы видим, что все уровни неожиданно обрываются, когда достигают некоторую загадочную кривую.

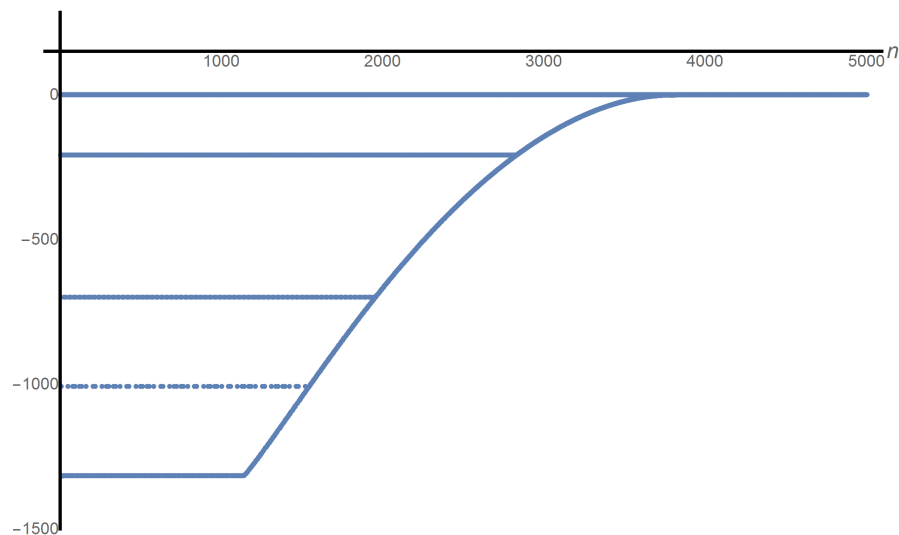


Рис. 5.3. Числа  $\log_{10}(|\delta_{N,n} - 1|)$  при  $N = 5001$ .

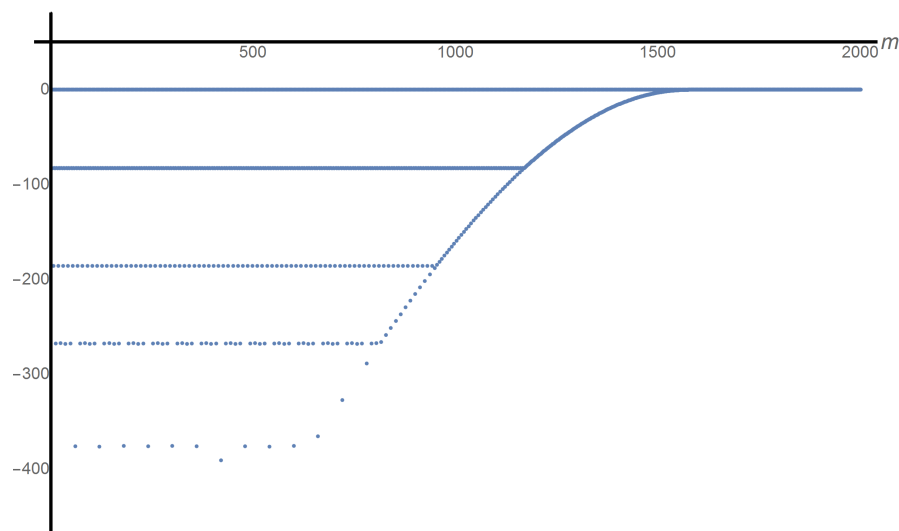


Рис. 5.4. Числа  $\log_{10}|\alpha_{N,m}|$  при  $N = 2001$ .

**5.2. Наследственные делители.** На рис. 5.4 изображены при  $N = 2001$  числа  $\log_{10}|\alpha_{N,m}|$ , где

$$\alpha_{N,m} = \sum_{n=1}^m \delta_{N,n}.$$

Мы вновь видим распределение точек по уровням, но теперь правила совсем иные:

- точки самого верхнего уровня соответствуют нечетным значениям  $m$ ;
- точки следующего уровня соответствуют четным значениям  $m$ , не кратным 3;
- на третьем уровне расположены точки, соответствующие значениям  $m$ , которые делятся на 6, но не делятся на 12;
- на четвертом уровне расположены точки, соответствующие значениям  $m$ , которые делятся на 12, но не делятся на 60;
- на пятом уровне расположены точки, соответствующие значениям  $m$ , которые делятся на 60, но не делятся на 420.

Чтобы формально описать распределение по уровням, мы введем понятие *наследственного делителя* числа  $m$  — это такой его делитель  $k$ , что и все натуральные числа, меньшие  $k$ , также делят  $m$ ; символически это отношение будем записывать как  $k \leq m$ .

**Численное наблюдение 5.2.** Числа  $\alpha_{N,m}$  распределяются по уровням в соответствии с максимальным наследственным делителем индекса  $m$ .

Аналогично числам  $\delta_{N,n}$  имеется своя фрактальная структура и у уровней чисел  $\alpha_{N,n}$ .

**5.3. Функция фон Мангольдта.** Рис. 5.5–5.7 показывают величины  $\log_{10}(|\mu_{N,n}|)$  при  $N = 5001$  и разных границах  $n$ . Если  $n$  — простое число, то  $\mu_{N,n} = \delta_{N,n} - 1$  и соответствующие точки лежат в одинаковых местах на этих рисунках и рис. 5.3 и 5.1. Все остальные точки перемещаются, и под пост-эратосфеновым уровнем образуется *постпост-эратосфеновый*.

Значения  $n$  при  $n \leq N$  можно условно разбить на 6 диапазонов.

**Диапазон 1.** В этом диапазоне значения  $|\mu_{N,n}|$  быстро уменьшаются.

**Диапазон 2.** В этом диапазоне начинается расслоение: для одних  $n$  (случай (а)) значения  $|\mu_{N,n}|$  лежат на пост-эратосфеновом уровне, для других  $n$  (случай (б)) ниже него, но еще выше постпост-эратосфенового.

**Диапазон 3.** В этом диапазоне наблюдается четкое расслоение на пост-эратосфеновый уровень (случай (а)) и постпост-эратосфеновый (случай (б)).

**Диапазон 4.** В этом диапазоне расслоение сохраняется, для одних  $n$  (случай (а)) значения  $|\mu_{N,n}|$  по-прежнему лежат на пост-эратосфеновом уровне, но для других  $n$  (случай (б)) теперь вместе с ростом  $n$  значения  $|\mu_{N,n}|$  растут до тех пор, пока не достигнут пост-эратосфенова уровня.

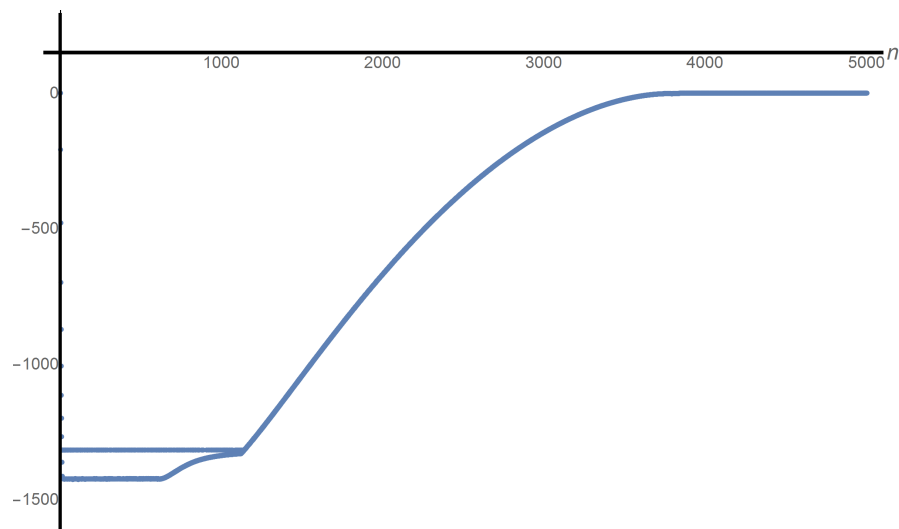


Рис. 5.5. Числа  $\log_{10}(|\mu_{N,n}|)$  при  $N = 5001$ .

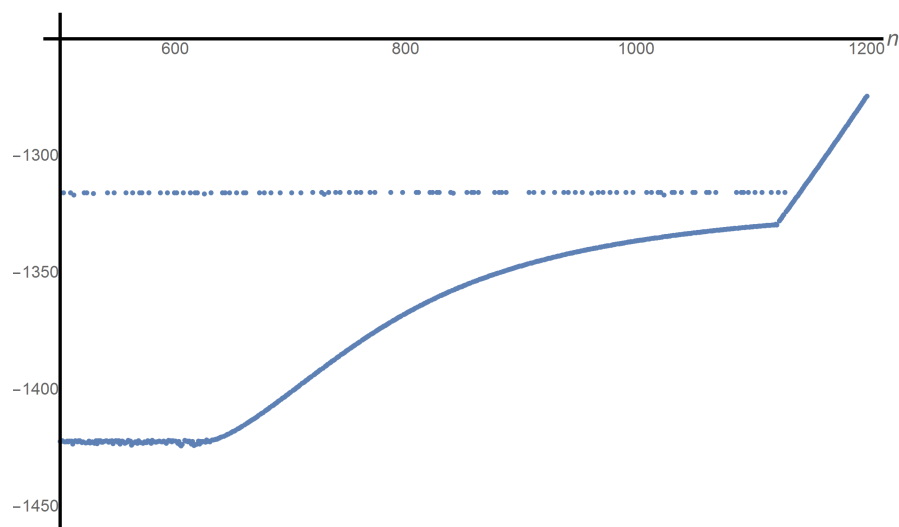


Рис. 5.6. Числа  $\log_{10}(|\mu_{N,n}|)$  при  $N = 5001$ .

**Диапазон 5.** Расслоение закончилось, возрастающие значения  $|\mu_{N,n}|$  лежат на той же загадочной кривой, которая возникла на рис. 5.3.

**Диапазон 6.** Здесь значения  $\mu_{N,n}$  близки к  $\pm 1$ .

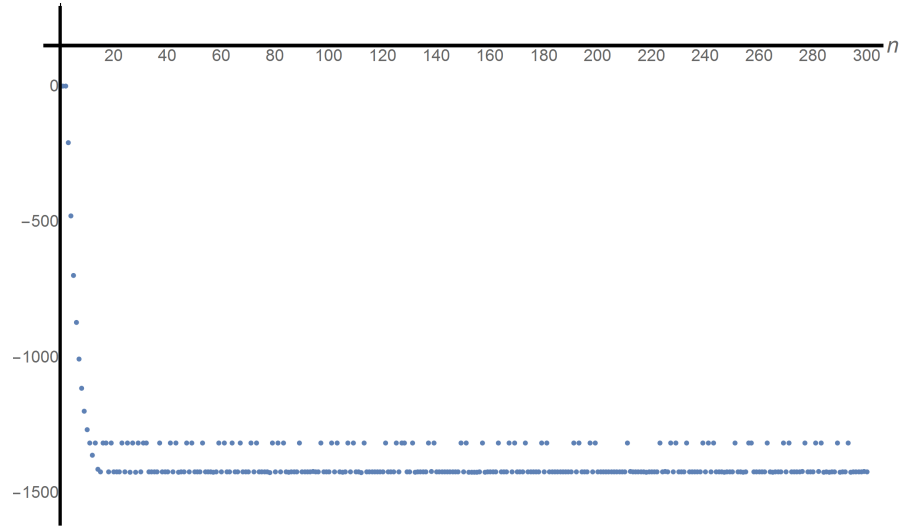


Рис. 5.7. Числа  $\log_{10}(|\mu_{N,n}|)$  при  $N = 5001$ .

Оказывается, что в диапазонах 2–4 случаи (а) имеют место тогда и только тогда, когда  $n$  является простым или степенью простого, при этом все числа  $\mu_{N,n}$  имеют одинаковый знак.

**Численное наблюдение 5.3.** Для  $n$  из диапазонов 2–4

$$\mu_{N,n} \approx \frac{\mu_{N,p}}{\ln(p)} \Lambda(n), \quad (5.1)$$

где  $\Lambda(n)$  — функция Мангольда, а  $p$  — произвольное простое число из диапазона 3.

Согласно этому наблюдению для всех простых  $p$  значения отношений  $\omega_{N,p} = \mu_{N,p}/\ln(p)$  имеют примерно одинаковую величину, и в приближенных равенствах мы будем писать просто  $\omega_N$ .

Приближенное равенство (5.1) указывает еще один способ, которым нули дзета-функции кодируют информацию о простых числах. Для  $N = 5001$  качество этого приближения в диапазоне 3 характеризуется следующими неравенствами: при  $16 \leq n \leq 634$

$$-10^{-1421} < \mu_{N,n} - \omega_N \Lambda(n) < 10^{-1421},$$

в частности, если  $n$  — степень простого числа, то

$$1 - 10^{-104} < \frac{\mu_{N,n}}{\omega_N \Lambda(n)} < 1 + 10^{-104},$$



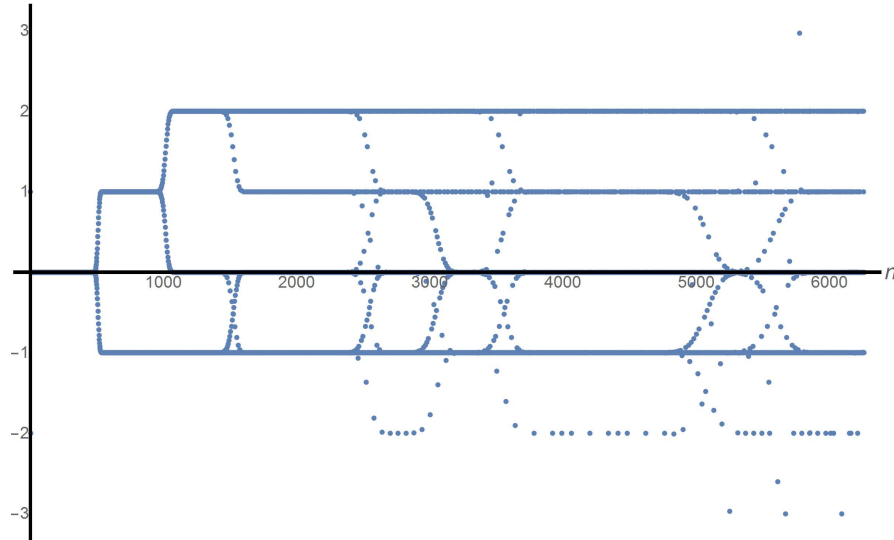


Рис. 5.8. Числа  $\mu_{N,n}$  при  $N = 626$ .

где  $\omega_{5001} \approx 2.5256.. \cdot 10^{-1317}$ .

При  $n > N$  числа  $\mu_{N,n}$  демонстрируют интересные, но пока мало понятые образцы поведения — см. рис. (5.8).

### §6. Приближения дзета-функции и ее первой производной

Отношение  $\Leftrightarrow$  приближенного почленного равенства двух рядов Дирихле, которым связаны левая и правая части в (3.2), является очень слабым. Тем не менее в некоторых случаях оно влечет приближенное равенство численных значений связываемых им выражений.

**6.1. Значения  $\eta(s)$ .** Бесконечный знакопеременный ряд для этой функции (левая часть в (3.1)) сходится только при  $\text{Re}(s) > 0$ , но конечная сумма в левой части (3.2) определена для всех  $s$ .

**Численное наблюдение 6.1.** Значения  $\eta(s)$  очень хорошо приближаются значениями  $\Delta_N(s)$  при достаточно больших  $N$  и не слишком большой величине  $|s|$  вне зависимости от того, лежит ли  $s$  правее критической полосы, внутри нее или левее; область хорошего приближения и его точность увеличиваются с ростом  $N$ .

Табл. 6.1 демонстрирует точность такого приближения.

Таблица 6.1. Приближения  $\eta(s)$ 

$s$	$ \eta(s)/\Delta_N(s) - 1 $		
	$N = 3001$	$N = 4001$	$N = 5001$
1000	$2.492 \dots \cdot 10^{-426}$	$7.361 \dots \cdot 10^{-469}$	$6.519 \dots \cdot 10^{-510}$
-101	$1.221 \dots \cdot 10^{-107}$	$3.608 \dots \cdot 10^{-150}$	$3.195 \dots \cdot 10^{-191}$
-301	$2.019 \dots \cdot 10^{-72}$	$5.963 \dots \cdot 10^{-115}$	$5.281 \dots \cdot 10^{-156}$
$1/2 + 10i$	$4.374 \dots \cdot 10^{-125}$	$1.291 \dots \cdot 10^{-167}$	$1.143 \dots \cdot 10^{-208}$
$1/2 + 100i$	$8.710 \dots \cdot 10^{-125}$	$2.572 \dots \cdot 10^{-167}$	$2.278 \dots \cdot 10^{-208}$
$1/2 + 1000i$	$2.048 \dots \cdot 10^{-125}$	$6.047 \dots \cdot 10^{-168}$	$5.356 \dots \cdot 10^{-209}$
$1/2 + 5000i$	$2.157 \dots \cdot 10^{-109}$	$4.696 \dots \cdot 10^{-168}$	$4.159 \dots \cdot 10^{-209}$
$1/4 + 10i$	$4.445 \dots \cdot 10^{-125}$	$1.312 \dots \cdot 10^{-167}$	$1.162 \dots \cdot 10^{-208}$
$1/4 + 100i$	$7.179 \dots \cdot 10^{-125}$	$2.120 \dots \cdot 10^{-167}$	$1.877 \dots \cdot 10^{-208}$
$1/4 + 1000i$	$2.304 \dots \cdot 10^{-125}$	$6.806 \dots \cdot 10^{-168}$	$6.027 \dots \cdot 10^{-209}$
$1/4 + 5000i$	$3.313 \dots \cdot 10^{-109}$	$5.325 \dots \cdot 10^{-168}$	$4.716 \dots \cdot 10^{-209}$
$-10 + 10i$	$1.163 \dots \cdot 10^{-123}$	$3.437 \dots \cdot 10^{-166}$	$3.044 \dots \cdot 10^{-207}$
$-10 + 100i$	$1.168 \dots \cdot 10^{-123}$	$3.451 \dots \cdot 10^{-166}$	$3.056 \dots \cdot 10^{-207}$
$-10 + 1000i$	$1.168 \dots \cdot 10^{-123}$	$3.449 \dots \cdot 10^{-166}$	$3.054 \dots \cdot 10^{-207}$
$-10 + 5000i$	$4.339 \dots \cdot 10^{-108}$	$3.431 \dots \cdot 10^{-166}$	$3.039 \dots \cdot 10^{-207}$
$-100 + 10i$	$8.145 \dots \cdot 10^{-108}$	$2.405 \dots \cdot 10^{-150}$	$2.130 \dots \cdot 10^{-191}$
$-100 + 100i$	$8.145 \dots \cdot 10^{-108}$	$2.405 \dots \cdot 10^{-150}$	$2.130 \dots \cdot 10^{-191}$
$-100 + 1000i$	$8.145 \dots \cdot 10^{-108}$	$2.405 \dots \cdot 10^{-150}$	$2.130 \dots \cdot 10^{-191}$
$-100 + 5000i$	$1.674 \dots \cdot 10^{-97}$	$2.405 \dots \cdot 10^{-150}$	$2.130 \dots \cdot 10^{-191}$

**6.2. Значения  $\zeta(s)$ .** Наблюдение 6.1 можно, естественно, переформулировать как утверждение о том, что значения  $\zeta(s)$  хорошо приближаются отношением  $\Delta_N(s)/(1 - 2 \cdot 2^{-s})$ . Можно, однако, получить еще более хорошее приближение, заменив знаменатель этой дроби на начальный отрезок ряда (4.2).

**Численное наблюдение 6.2.** Значения  $\zeta(s)$  хорошо приближаются отношением двух конечных рядов

$$\frac{\Delta_N(s)}{\nu_{N,L}(s)} = \frac{\sum_{n=1}^N \delta_{N,n} n^{-s}}{\sum_{n=1}^L \mu_{N,n} n^{-s}} \quad (6.1)$$

Таблица 6.2. Приближения  $\zeta(s)$  при  $s = 1/2 + 1000i$

$L$	$ \zeta(s)/(\Delta_N(s)/\nu_{N,L}(s)) - 1 $		
	$N = 3001$	$N = 4001$	$N = 5001$
2	$1.133 \dots \cdot 10^{-125}$	$3.345 \dots \cdot 10^{-168}$	$2.963 \dots \cdot 10^{-209}$
3	$9.236 \dots \cdot 10^{-286}$	$2.412 \dots \cdot 10^{-383}$	$8.589 \dots \cdot 10^{-480}$
4	$1.862 \dots \cdot 10^{-412}$	$3.231 \dots \cdot 10^{-557}$	$3.961 \dots \cdot 10^{-700}$
5	$1.155 \dots \cdot 10^{-510}$	$1.029 \dots \cdot 10^{-692}$	$8.643 \dots \cdot 10^{-873}$
6	$4.770 \dots \cdot 10^{-586}$	$1.054 \dots \cdot 10^{-797}$	$2.877 \dots \cdot 10^{-1008}$
7	$2.436 \dots \cdot 10^{-643}$	$2.213 \dots \cdot 10^{-880}$	$2.355 \dots \cdot 10^{-1115}$
8	$7.567 \dots \cdot 10^{-682}$	$3.588 \dots \cdot 10^{-943}$	$1.366 \dots \cdot 10^{-1200}$
9	$7.170 \dots \cdot 10^{-682}$	$2.332 \dots \cdot 10^{-991}$	$1.288 \dots \cdot 10^{-1268}$
10	$7.170 \dots \cdot 10^{-682}$	$2.397 \dots \cdot 10^{-991}$	$5.593 \dots \cdot 10^{-1317}$
11	$6.881 \dots \cdot 10^{-682}$	$2.300 \dots \cdot 10^{-991}$	$5.367 \dots \cdot 10^{-1317}$

при достаточно больших  $N$ , небольших  $L$  и не слишком большой величине  $|s|$  вне зависимости от того, лежит ли  $s$  правее критической полосы, внутри нее или левее; область хорошего приближения и его точность увеличиваются с ростом  $N$  и с ростом  $L$  до некоторого предела, также возрастающего с ростом  $N$ .

Это наблюдение иллюстрируется табл. 6.2. Зависимость точности приближения имеет такой же характер, как и точности приближения начальными отрезками асимптотического разложения какой-либо функции — существует оптимальное количество слагаемых. Для получения хорошего приближения в (6.1) в качестве  $L$  можно брать любое число из диапазонов 1 и 2.

**6.3. Значения  $\zeta'(s)$ .** Поскольку  $\zeta(s)$  хорошо приближается отношением (6.1), дифференцируя его, мы можем получить приближения для производных дзета-функции. В этом параграфе будет представлен еще один, весьма неожиданный, способ вычисления первой производной этой функции через числа  $\delta_{N,n}$ .

Приближение (5.1) не имеет места для  $n$  из диапазона 1 и является не слишком хорошим для  $n$  из диапазона 2. „Подправляя“ ряд (4.2) для нескольких начальных значений  $n$ , мы можем написать, что

$$\nu_N(s) - \sum_{n=1}^M (\mu_{N,m} - \omega_N \Lambda(n)) n^{-s} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \omega_N \Lambda(n) n^{-s} = -\omega_N \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}, \quad (6.2)$$

Таблица 6.3. Приближения  $\zeta'(\rho_k)$ 

$k$	$ \zeta'(\rho_k)/(\Delta_N(\rho_k)/\omega_N) + 1 $		
	$N = 3001$	$N = 4001$	$N = 5001$
1	$6.083 \dots \cdot 10^{-2}$	$3.247 \dots \cdot 10^{-2}$	$3.785 \dots \cdot 10^{-2}$
3	$3.022 \dots \cdot 10^{-4}$	$1.968 \dots \cdot 10^{-4}$	$8.142 \dots \cdot 10^{-5}$
10	$1.659 \dots \cdot 10^{-9}$	$9.476 \dots \cdot 10^{-10}$	$7.453 \dots \cdot 10^{-9}$
30	$1.565 \dots \cdot 10^{-17}$	$1.928 \dots \cdot 10^{-17}$	$7.436 \dots \cdot 10^{-17}$
100	$1.166 \dots \cdot 10^{-36}$	$7.915 \dots \cdot 10^{-38}$	$1.298 \dots \cdot 10^{-38}$
300	$1.482 \dots \cdot 10^{-69}$	$6.546 \dots \cdot 10^{-76}$	$1.982 \dots \cdot 10^{-78}$
1000	$5.494 \dots \cdot 10^{-74}$	$3.915 \dots \cdot 10^{-91}$	$1.605 \dots \cdot 10^{-106}$
1500	$2.050 \dots \cdot 10^{-74}$	$3.293 \dots \cdot 10^{-91}$	$2.153 \dots \cdot 10^{-106}$
2000	$3.008 \dots \cdot 10^{-74}$	$1.316 \dots \cdot 10^{-91}$	$8.729 \dots \cdot 10^{-107}$
2500	$2.291 \dots \cdot 10^{-63}$	$8.623 \dots \cdot 10^{-91}$	$1.064 \dots \cdot 10^{-106}$
3000		$1.599 \dots \cdot 10^{-91}$	$1.337 \dots \cdot 10^{-106}$
4000			$3.356 \dots \cdot 10^{-92}$

где  $M$  — какое-либо число из диапазона 3. Связь двух рядов Дирихле, выраженная в (6.2) символом  $\Leftrightarrow$ , является очень слабой — примерное равенство коэффициентов имеет место только для  $n$  из диапазонов 1–4, а уже в диапазоне 5 значения  $\mu_{N,n}$  стремительно возрастают (численный пример см. на рис. 5.5). Тем не менее удивительным образом эта столь слабая связь подсказывает очень хорошие численные приближения.

Домножая на  $-\zeta(s)/\omega_N$ , мы получаем, что

$$-\omega_N^{-1} \left( \Delta_N(s) - \zeta(s) \sum_{n=1}^M (\mu_{N,n} - \omega_N \Lambda(n)) n^{-s} \right) \Leftrightarrow \zeta'(s), \quad (6.3)$$

и это немедленно дает способ вычисления  $\zeta'(s)$  в нулях дзета-функции.

**Численное наблюдение 6.3.** *Отношение  $-\Delta_N(\rho_k)/\omega_N$  является хорошим приближением к  $\zeta'(\rho_k)$ , когда  $k$  находится недалеко от  $N/2$ .*

Табл. 6.3 демонстрирует точность этого приближения. Для вычисления  $\zeta'(s)$  в других точках мы должны использовать поправочную сумму из левой части (6.2).

**Численное наблюдение 6.4.** *При больших  $N$  левая часть (6.3) является хорошим приближением к  $\zeta'(s)$  для  $s$ , лежащих правее критической*

Таблица 6.4. Приближения  $\zeta'(s)$  при  $M = 19$

$s$	$ \omega_N^{-1}(\Delta_N(s) - \zeta(s) \sum_{n=1}^M (\mu_{N,n} - \omega_N \Lambda(n)) n^{-s}) / \zeta'(s) + 1 $		
	$N = 3001$	$N = 4001$	$N = 5001$
2	$6.769 \dots \cdot 10^{-4}$	$5.843 \dots \cdot 10^{-4}$	$4.656 \dots \cdot 10^{-4}$
$1/2 + 100i$	$1.206 \dots \cdot 10^{-16}$	$3.032 \dots \cdot 10^{-17}$	$1.785 \dots \cdot 10^{-16}$
$-1/2 + 100i$	$1.420 \dots \cdot 10^{-14}$	$5.150 \dots \cdot 10^{-15}$	$3.172 \dots \cdot 10^{-14}$
$1/4 + 200i$	$8.851 \dots \cdot 10^{-31}$	$1.275 \dots \cdot 10^{-32}$	$5.935 \dots \cdot 10^{-33}$
$-3/4 + 300i$	$7.955 \dots \cdot 10^{-44}$	$6.302 \dots \cdot 10^{-45}$	$6.774 \dots \cdot 10^{-46}$
$1/2 + 1000i$	$1.510 \dots \cdot 10^{-74}$	$7.345 \dots \cdot 10^{-92}$	$4.463 \dots \cdot 10^{-107}$
$-1/4 + 1000i$	$1.647 \dots \cdot 10^{-73}$	$2.041 \dots \cdot 10^{-90}$	$1.127 \dots \cdot 10^{-106}$
$-3/2 + 2000i$	$8.531 \dots \cdot 10^{-73}$	$1.504 \dots \cdot 10^{-89}$	$1.034 \dots \cdot 10^{-104}$
$-3 + 3000i$	$4.889 \dots \cdot 10^{-63}$	$3.156 \dots \cdot 10^{-88}$	$6.425 \dots \cdot 10^{-104}$
$-20 + 3000i$	$1.085 \dots \cdot 10^{-42}$	$5.065 \dots \cdot 10^{-67}$	$9.010 \dots \cdot 10^{-83}$

Таблица 6.5. Количество верных десятичных знаков у решения системы (6.4)–(6.5) при  $N_1 = 3001$ ,  $N_2 = 5001$ ,  $M = 19$

$s$	$\zeta(s)$	$\zeta'(s)$
2	994	3
$1/2 + 100i$	1006	15
$-1/2 + 100i$	1004	13
$1/4 + 200i$	1020	30
$-3/4 + 300i$	1033	43
$1/2 + 1000i$	1064	73
$-1/4 + 1000i$	1063	72
$-3/2 + 2000i$	1063	72
$-3 + 3000i$	1053	62
$-20 + 3000i$	1038	41

полосы, внутри нее или левее, и имеющих не слишком большую, но и не слишком малую абсолютную величину.

Табл. 6.4 демонстрирует точность этого приближения. Оно, однако, имеет следующий недостаток: для вычисления  $\zeta'(s)$  мы должны иметь

Таблица 6.6. Количество верных десятичных знаков у решения системы (6.6)–(6.9) при  $N = 5001$ ,  $M = 19$

$s$	$\zeta(s)$	$\zeta(1-s)$	$\zeta'(s)$	$\zeta'(1-s)$
$1/2 + 100i$	1006	1006	16	16
$-1/2 + 100i$	1005	1005	14	13
$1/4 + 200i$	1022	1022	32	31
$-3/4 + 300i$	1034	1034	44	43
$1/2 + 1000i$	1081	1081	91	91
$-1/4 + 1000i$	1080	1080	90	88
$-3/2 + 2000i$	1079	1079	89	88
$-3 + 3000i$	1078	1078	88	86
$-20 + 3000i$	1062	1062	72	65

очень точное значение  $\zeta(s)$ , поскольку в (6.3) стоит разность двух очень близких чисел. Точности, которую дает приближение (6.1), для этой цели недостаточно. Обойти эту трудность можно, вычислив  $\zeta(s)$  согласно (6.1) с бóльшим значением  $N$ .

Другой способ использования  $\delta_{N,n}$  при двух значениях  $N = N_1$  и  $N = N_2$  состоит в том, чтобы на основе (6.3) написать два приближенных равенства

$$-\omega_{N_1}^{-1} \left( \Delta_{N_1}(s) - \zeta(s) \sum_{n=1}^{M_1} (\mu_{N_1,m} - \omega_{N_1} \Lambda(n)) n^{-s} \right) \approx \zeta'(s), \quad (6.4)$$

$$-\omega_{N_2}^{-1} \left( \Delta_{N_1}(s) - \zeta(s) \sum_{n=1}^{M_2} (\mu_{N_2,m} - \omega_{N_2} \Lambda(n)) n^{-s} \right) \approx \zeta'(s), \quad (6.5)$$

и решить эту систему из двух линейных уравнений, считая  $\zeta(s)$  и  $\zeta'(s)$  неизвестными. Табл. 6.5 показывает точность таких решений.

Вместо двух разных значений  $N$  можно обойтись и одним за счет использования функционального уравнения. Оно позволяет вместо пары

Таблица 6.7. Приближения  $\nu_{N,N}(1)$

$N$	$\nu_{N,N}(1)/\Psi(-1, 1, N + 1)$
626	$+1 - 4.631 \dots \cdot 10^{-25}$
1251	$-1 + 4.144 \dots \cdot 10^{-54}$
1876	$+1 + 2.053 \dots \cdot 10^{-78}$
2501	$-1 + 4.424 \dots \cdot 10^{-105}$
3126	$+1 - 3.306 \dots \cdot 10^{-131}$
3751	$-1 - 3.680 \dots \cdot 10^{-157}$
4376	$+1 - 2.203 \dots \cdot 10^{-183}$
5001	$-1 + 1.047 \dots \cdot 10^{-208}$

уравнений (6.4)–(6.5) написать четыре уравнения

$$-\omega_N^{-1} \left( \Delta_N(s) - \zeta(s) \sum_{n=1}^M (\mu_{N,m} - \omega_N \Lambda(n)) n^{-s} \right) \approx \zeta'(s), \quad (6.6)$$

$$-\omega_N^{-1} \left( \Delta_N(1-s) - \zeta(1-s) \sum_{n=1}^M (\mu_{N,m} - \omega_N \Lambda(n)) n^{s-1} \right) \approx \zeta'(1-s), \quad (6.7)$$

$$g(s)\zeta(s) = g(1-s)\zeta(1-s), \quad (6.8)$$

$$g'(s)\zeta(s) + g(s)\zeta'(s) = -g'(1-s)\zeta(1-s) - g(1-s)\zeta'(1-s), \quad (6.9)$$

связывающих четыре „известные“  $\zeta(s)$ ,  $\zeta(1-s)$ ,  $\zeta'(s)$  и  $\zeta'(1-s)$ . Табл. 6.6 показывает точность таких решений.

**6.4. Значения  $\nu_{N,N}(1)$ .** *Функция Лерха*, определяемая равенством

$$\Psi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s},$$

при  $z = a = 1$  совпадает с дзета-функцией  $\zeta(s)$ , а при  $z = -1$ ,  $a = 1$  — со знакопеременной дзета-функцией  $\eta(s)$ . При последнем выборе значений первых двух аргументов и натуральных значениях третьего аргумента имеется еще одна связь значений функции Лерха с дзета-функцией.

**Численное наблюдение 6.5.** *При достаточно большом  $N$  отношение  $\nu_{N,N}(1)/\Psi(-1, 1, N + 1)$  очень близко к  $(-1)^N$ .*

Это наблюдение демонстрирует табл. 6.7. Мы видим, что значения  $-\nu_{N,N}(1)$ , исходно определяемые через нули „сложной“ дзета-функции, допускают приближенное вычисление с помощью „простой“ суммы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}. \quad (6.10)$$

Согласно (4.1)  $\nu_N(1) = 0$  и, следовательно, „ожидаемое“ значение суммы

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\mu_{N,n}}{n} \quad (6.11)$$

равно  $-\nu_{N,N}(1)$ , т.е. близко к (6.10). Сравнив (6.11) с (6.10), можно было бы ожидать, что при  $n > N$  числа  $\mu_{N,n}$  ведут себя примерно как  $(-1)^n$ ; это, однако, совсем не так, как показывает рис. 5.8.

### §7. Вычислительный аспект

Матрицы в (2.6) близки к вырожденным, среди чисел  $\mu_{N,n}$  и  $\nu_{N,n}$  есть такие, которые по абсолютной величине меньше чисел  $\delta_{N,n}$  на много порядков. По этим причинам для обнаружения описанных выше явлений потребовались вычисления с тысячами десятичных знаков. В частности, первые 40 000 нетривиальных нулей дзета-функции были вычислены с 40 000 десятичных знаков и доступны на [2].

Кроме того, требовалась работа с матрицами с тысячами строк и столбцов, поскольку многие эффекты имеют асимптотический характер и могут быть замечены только при достаточно больших размерах матриц, определяющих числа  $\delta_{N,n}$ .

Хотя для вычисления определителей имеется много пакетов программ, их использование не представлялось возможным. С одной стороны, большая точность вычислений и большой размер матриц делали невозможным размещать их целиком в оперативной памяти. С другой стороны, для разложения (2.7) требовалось одновременное вычисление  $N$  миноров матрицы (2.6), содержащих, очевидно, много общих подвыражений. С учетом последнего обстоятельства был разработан алгоритм для одновременного нахождения всех чисел  $\delta_{N,n}$  для  $n \leq N \leq M$ , имеющий трудоемкость того же порядка, что и решение методом Гаусса системы из  $M$  линейных уравнений с  $M$  неизвестными (детали см. в [1]).



### Благодарности

Первоначально вычисление нетривиальных нулей дзета-функции проводилось средствами систем Mathematica и Sage. Точности в 40 000 десятичных знаков удалось достичь за счет эффективного алгоритма, который реализовал Фредрик Йохансон в своей системе Arb [4].

Вычисления нулей были проведены на компьютерах Санкт-Петербургского института информатики РАН, Armenian National Grid Initiative Foundation, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Laboratoire d'Algorithmique, Complexité et Logique (Université Paris-Est Créteil), Laboratoire d'Informatique Algorithmique: Fondements et Applications (CNRS Russian и English Université Paris Diderot–Paris 7), Multi-modal Australian Sciences Imagine and Visualisation Environment, Wolfram Research.

Наиболее трудоемкая часть вычислений — нахождение чисел  $\delta_{N,n}$  — была проведена автором на суперкомпьютере „Чебышев“ МГУ и Глебом Беляковым на Multi-modal Australian Sciences Imagine and Visualisation Environment.

### Список литературы

- [1] Beliakov G., Matiyasevich Yu., *A parallel algorithm for calculation of determinants and minors using arbitrary precision arithmetic*, BIT Numerical Mathematics, doi10.1007/s10543-015-0547-z, 2015. Предварительная версия <http://arxiv.org/abs/1308.1536>.
- [2] Beliakov G., Matiyasevich Yu., *Zeroes of Riemann's zeta function on the critical line with 40000 decimal digits accuracy*, Research Data Australia, <http://hdl.handle.net/10536/DR0/DU:30056270>, 2013.
- [3] Beliakov G., Matiyasevich Yu., *Approximation of Riemann's zeta function by finite Dirichlet series: A multiprecision numerical approach*, Experimental Math. **24** (2015), no. 2, 150–161. Предварительная версия <http://arxiv.org/abs/1402.5295>.
- [4] Johansson F., Arb, <http://fredrikj.net/arb/>.
- [5] Matiyasevich Yu., *Finite Dirichlet series with prescribed zeroes*, <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/finitedirichlet>.
- [6] Matiyasevich Yu., *New conjectures about zeroes of Riemann's zeta function*, Depart. Math. Univ. Leicester, Research Reports MA12-03; <http://www2.le.ac.uk/departments/mathematics/research/research-reports-2/reports-2012/ma12-03>, [http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/leicester\\_2012/MA12\\_03Matiyasevich.pdf](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/leicester_2012/MA12_03Matiyasevich.pdf), 2012.

- [7] Matiyasevich Yu., *Calculation of Riemann's zeta function via interpolating determinants*, Max Planck Instit. Math., Bonn, Preprint 2013-18; <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preblob/5368>, [http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/bonn\\_2013/5368.pdf](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/bonn_2013/5368.pdf), 2013.
- [8] Riemann B., *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsber. Berlin. Akad. (1859), 671–680.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
191023, Санкт-Петербург  
наб. р. Фонтанки, 27  
Россия  
*E-mail*: yumat@pdmi.ras.ru

Поступило 1 июня 2015 г.