А. А. Бондаренко

РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОДГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ НЕРАЗВЕТВЛЕННЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ТОР, В ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЕ СТЕПЕНИ 2 НАД ЛОКАЛЬНЫМ ЧИСЛОВЫМ ПОЛЕМ ($p \neq 2$)

Пусть k – локальное числовое поле, т.е. конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$ p – адических чисел, $G = \mathrm{GL}(2, k)$ – полная линейная группа степени 2 над k и $T = T(K/k)$ – нерасщепимый тор в G, являющийся образом мультипликативной группы K^* квадратичного расширения K/k при его регулярном вложении в полное кольцо матриц $M(2, k)$. Настоящая работа посвящена описанию решетки $\mathrm{Lat}(T, G)$ промежуточных подгрупп H группы G, содержащих тор T, $T \leqslant H \leqslant G$ в случае, когда поле K неразветвлено над k и $p \neq 2$. В [8, 9, 5] аналогичная задача решена для случая нерасщепимого тора, соответствующего квадратичному полю, в группе $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$.

§ 1. Введение

Пусть G – группа, G_0 – ее некоторая подгруппа. Решетка

$$\mathrm{Lat}(G_0, G) = \{H : G_0 \leqslant H \leqslant G\}$$

промежуточных подгрупп группы G допускает естественное расчленение, которое было предложено З. И. Боревичем (см., например, [5]). А именно: на $\mathrm{Lat}(G_0, G)$ введем структуру графа, приняв в качестве его вершин все промежуточные подгруппы. Вершину H_1 соединяем направленным ребром с вершиной H_2, если $H_1 \trianglelefteq H_2$. Полученный граф называется <u>графом нормальности</u> решетки $\mathrm{Lat}(G_0, G)$, а его связные компоненты – ее <u>гирляндами</u>. Изучение решетки $\mathrm{Lat}(G_0, G)$, таким образом, включает в себя описание множества всех гирлянд, а затем изучение каждой отдельно взятой гирлянды.

Напомним, что промежуточная подгруппа F, $G_0 \leqslant F \leqslant G$, называется <u>полной промежуточной</u> подгруппой (относительно G_0), если нормальное замыкание

$$G_0 = \langle f^{-1} G_0 f : f \in F \rangle$$

подгруппы G_0 в F совпадает с $F : G_0^F = F$ (см.[3, 4, 6]). Подгруппа G называется полинормальной, если для любого элемента x группы G подгруппа $G_0^{(x)}$ является полной промежуточной подгруппой [3, 6]. Полинормальные подгруппы характеризуются следующим свойством: G_0 – полинормальная тогда и только тогда, когда решетка $\mathrm{Lat}(G_0, G) = \{H : G_0 \leqslant H \leqslant G\}$ является объединением гирлянд вида $\mathrm{Lat}(F, N_G(F))$, где F пробегает все полные промежуточные подгруппы (относительно G_0).

§ 2. Постановка задачи.

Пусть k – локальное числовое поле и K – его неразветвленное расширение степени n. В контексте общей постановки задачи (§3 [5]) З. И. Боревичем выдвинута гипотеза, согласно которой соответствующий указанному расширению нерасщепимый тор $T(K/k)$ является полинормальной подгруппой в группе $\mathrm{GL}(n, k)$. Мы будем называть этот тор неразветвленным. В настоящей работе рассматривается случай тора $T(K/k)$ в $\mathrm{GL}(2, k)$, соответствующего неразветвленному квадратичному расширению K локального числового поля k с полем вычетов нечетной характеристики p, и дается полное описание решетки $\mathrm{Lat}(T, G)$, которое подтверждает гипотезу в рассматриваемой ситуации.

Если $\mathfrak{O}$ – кольцо целых элементов и $\wp$ – простой идеал нормализованного нормирования ν поля k, то для группы единиц $U = \mathfrak{O}^*$ имеет место разложение

$$U = V \times U_1,$$

где $U_1 = 1 + \wp$ – группа главных единиц поля k, а V – циклическая группа корней из 1 степени $p^f - 1$ $(f = f(k/\mathbb{Q}_p)$ – абсолютная степень инерции. Пусть ω – образующая группы V. Тогда неразветвленное квадратичное расширение K поля k может быть записано в виде $k(\sqrt{\omega})$, а нерасщепимый тор $T = T(K/k)$ в базисе $1, \sqrt{\omega}$ представляется как множество матриц

$$T = T(\omega) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y\omega \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in k, \, (x, y) \neq (0, 0) \right\}.$$

§ 3. Нижняя и верхняя гирлянды.

Среди гирлянд решетки

$$\mathrm{Lat}(T, G) = \{H : T \leqslant H \leqslant G\}$$

могут быть выделены две особые: ниижняя и верхняя. Нижней называетсяя гирлянда Γ_*, содержащая тор $T : T \in \Gamma_*$, а верхней – гирлянда Γ^*, содержащая самую группу $G : G \in \Gamma^*$.

Приступая к их описанию, заметим, что из теоремы [1] вытекает

Теорема 1. *Нормализатор тора $T = T(\omega)$ в группе $G = \mathrm{GL}(2,k)$ есть полупрямое произведение тора $T(\omega)$ с группой 2-го порядка, порожденной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$:*

$$N_G(T) = T\lambda \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Поскольку $N_G(T)$ является самонормализуемой подгруппой в G, то справедливо

Следствие 1. *Нижняя гирлянда Γ_* решетки $\mathrm{Lat}(T,G)$ состоит из 2 подгрупп: тора $T = (\omega)$ и его нормализатора $N_G(T)$, -*

$$\Gamma_* = \{T, N_G(T)\}.$$

Теорема 2. *Нормальное замыкание T^G тора $T = T(\omega)$ в группе $G = G(2,k)$ совпадает с полупрямым произведением групп $SL(2,k)$ на группу*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & NK^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} : \delta \in NK^* \right\}$$

где $NK^* = \{u^2 - \omega v^2 : u, v \in k, \quad (u,v) \neq (0,0)\}$ – группа норм квадратичного расширения $K = k(\sqrt{\omega})$, т.е.

$$T^G = SL(2,k)\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & NK^* \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Нам достаточно заметить, что подгруппа T^G, являясь нормальным делителем группы $\mathrm{GL}(2,k)$, по теореме Жордана-Диксона содержит специальную линейную группу $SL(2,k)$ и что образ $\det(T^G)$ при гомоморфизме $\det : \mathrm{GL}(2,k) \to k^*$ совпадает с группой норм NK^*.

Кроме того, так как $T^G = SL(2,k)\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & NK^* \end{pmatrix}$ – наименьшая промежуточная подгруппа, содержащая $SL(2,k)$, то T^G является полной промежуточной подгруппой. Поэтому имеет место

Следствие 2. *Верхняя гирлянда* Γ^* *решетки* $\mathrm{Lat}(T(\omega), G)$ *совпадает с интервалом* $\mathrm{Lat}(T^G, G)$, *а именно:*

$$\Gamma^* = \{T^G, G\}.$$

Детальное описание гирлянд Γ_* и Γ^* в общем случае приводится в [2]. Здесь же лишь отметим, что нижняя гирлянда Γ_* решетки $\mathrm{Lat}(T(\omega), \mathrm{GL}(2,k))$ состоит из всех промежуточных подгрупп, не содержащих нетривиальных трансвекций, а верхняя гирлянда Γ^* образована всеми промежуточными подгруппами, содержащими все элементарные трансвекции группы $\mathrm{GL}(2,k)$.

§ 4. Параметры промежуточных подгрупп.

Группа $G = \mathrm{GL}(2,k)$ допускает факторизацию

$$G = T(\omega)G_\phi, \quad T(\omega) \cap G_\phi = \{e\}, \tag{1}$$

где

$$G_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & k^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} : \beta \in k, \quad \gamma \in k^* \right\}.$$

В соответствии с этим для любых $t \in T = T(\omega)$ и $g \in G_\phi$ произведение gt имеет единственное представление в виде $t_1 g_1$, где $t_1 \in T, g_1 \in G_\phi$. Поскольку в качестве элемента t тора T мы можем, не ограничивая общности, брать матрицы вида $\begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in k$, то окончательно мы имеем правило перемещения в виде равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где, согласно вычислениям,

$$\beta_1 = \beta + \frac{x}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} + \frac{2\omega}{x^2 - \omega}\beta, \tag{3}$$

$$\gamma_1 = \frac{(\omega\beta + \gamma x)^2 - \omega}{\gamma(x^2 - \omega)} = \gamma + \frac{\omega}{x^2 - \omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} + \frac{2x\omega}{x^2 - \omega}\beta. \tag{4}$$

Для произвольной промежуточной подгруппы H в силу (1) также имеет место факторизация

$$H = T(\omega) \cdot H_\phi, \quad H_\phi = H \cap G_\phi,$$

поэтому, следуя [5], мы можем сопоставить ей ряд параметров. Прежде всего это ее модуль трансвекций

$$A = A(H) = \left\{ \alpha \in k : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in H \right\},$$

и кольцо множителей

$$R = R(H) = \{\xi \in k : \xi A \subseteq A\},$$

а также мультипликативную группу

$$\Delta = \Delta(H) = \left\{\delta \in k^* : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in H\right\}.$$

Ясно, что $A \leqslant k^+$ и $\Delta \leqslant R^*$. Следующая теорема дает нам некоторую информацию о кольце множителей $R(H)$ промежуточной подгруппы $H, T(\omega) \leqslant H \leqslant G$.

Теорема. *Пусть H – промежуточная подгруппа, $T \leqslant H \leqslant G$. Тогда при любом $x \in k$ ее кольцо множителей $R = R(H)$ содержит элементы $\frac{8\omega}{x^2-\omega}$ и $\frac{8x^2}{x^2-\omega}$.*

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$. Аналогично [10], с.31, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} \in H$. Согласно правилу перемещения (2) для любого $x \in k$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad t_2 \in T,$$

где ввиду (3)

$$\beta_1 = \beta + \frac{x}{x^2-\omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} + \frac{2\omega}{x^2-\omega}\beta,$$

$$\beta_2 = -\beta + \frac{x}{x^2-\omega} \cdot \frac{\gamma^2 - 1 + \omega\beta^2}{\gamma} - \frac{2\omega}{x^2-\omega}\beta.$$

Так как по аналогии с [10], с.31, $2\beta_1 \in A$ и $2\beta_2 \in A$, то $\frac{8\omega}{x^2-\omega}\beta = 2\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta \in A$. В частности, мы имеем включения $\frac{8\omega}{x^2-\omega} \in R$ и $\frac{8x^2}{x^2-\omega} = 8 + \frac{8\omega}{x^2-\omega} \in R$.

§ 5. Допустимые модули и подкольца.

В § 4 были даны определения модуля трансвекций $A(H)$ и кольца множителей $R(H)$ промежуточной подгруппы $H, T(\omega) \leqslant H \leqslant G$. Унитальное подкольцо R поля k и R – модуль A в поле k называются допустимыми [5], если они допускают реализацию в виде кольца множителей $R(H) = R$ и модуля трансвекций $A(H) = A$ для некоторой промежуточной подгруппы H, т.е. являются для нее кольцом множителей и модулем трансвекций соответственно.

Теорема 1. *Пусть H – промежуточная подгруппа с модулем трансвекций $A(H) = A$ и кольцом множителей $R(H) = R$, отличным от k. Тогда $R = \mathfrak{O}$ и модуль A является его целым идеалом.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \mathfrak{O}$. Рассмотрим равенство

$$\frac{8\omega}{x^2-\omega} = \frac{8\omega}{1-\omega} + \pi\xi \quad (\nu(\pi) = 1).$$

Нетрудно заметить, что оно выполняется, если элемент

$$\gamma = 1 - \frac{(1-\omega)^2\pi\xi}{8\omega + (1-\omega)\pi\xi}$$

является квадратом. Но это очевидно, ибо $\gamma \in U_1 = U_1^2$. Таким образом, в силу теоремы § 4, при любом $\xi \in \mathfrak{O}$ $\pi\xi \in R$, т.е. $\wp \subseteq R$. Последнее включение означает, что кольцо R является полным в топологии нормирования ν поля k, а потому содержит кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. Поэтому $8 \in \mathbb{Z}_p^* \leqslant R^*$ и ввиду теоремы § 4 кольцо R содержит элементы $\frac{\omega}{x^2-\omega}$ и $\frac{x^2}{x^2-\omega}$ при всех $x \in k$. В частности, при $x = 1$ получаем включение $\frac{1}{1-\omega} \in R$. С другой стороны, $1-\omega \in \mathfrak{O}^* = U$. Так что $\frac{1}{1-\omega} \in R \cap U = R^*$, $\omega \in R$. Итак, кроме включения $\wp \subseteq R$ мы имеем включения $U_1 = 1 + \wp \subseteq R$ и $V = \langle\omega\rangle \subseteq R$, что в совокупности дает включение $\mathfrak{O} = \wp \cup U_1 \cup V \subseteq R$, а поэтому равенство $\mathfrak{O} = R$ (ибо $R \neq k$).

Пусть теперь $\alpha \in A$. Тогда $1 - \omega\alpha^2 \in R$, ибо

$$\begin{pmatrix} -\omega\alpha & \omega \\ 1 & -\omega\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1-\omega\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Если теперь мы предположим, что $\alpha \notin \mathfrak{O}$,т.е. $\nu(\alpha) = -l < 0$, то получим, что кольцо R содержит элемент с отрицательным значением нормирования: $\nu(1-\omega\alpha^2) = -2l < 0$. Это значит, что $\nu(R) = -\infty$, иначе говоря, $R = k$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанной теоремы следует, что для любой промежуточной подгруппы $H, T(\omega) \leqslant H \leqslant G$. Ее кольцо множителей R есть либо k, либо $\mathfrak{O}$. В любом случае $2 \in R^*$ и по утверждению, аналогичному теореме 5 [10], с. 42, группа H имеет факторизацию вида

$$H = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & \Delta \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где A – некоторый целый идеал кольца $R, \Delta \leqslant R^*$.

Тееорема 2. *Для любого целого $i \geqslant 0$ множество*

$$H = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}, \tag{6}$$

является промежуточной подгруппой.

Доказательство. Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}$$

и $x \in k$. Нам достаточно показать, что в равенстве

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T(\omega),$$

$\beta_1 \in \wp^i$ и $\gamma_1 \in U_i$, где $U_i = 1 + \wp^i$ при $i \geqslant 1$ и $U_0 = U$, а элементы β_1 и γ_1 определяются из формул (3) и (4). Вычисление значений нормирования на элементах:

$$\frac{x}{x^2-\omega}, \quad \frac{x^2}{x^2-\omega}, \quad \frac{x\omega}{x^2-\omega}, \quad \frac{\omega^2}{x^2-\omega}, \quad \frac{\omega}{x^2-\omega}$$

показывает, что при любом x все они принадлежат кольцу $\mathfrak{O}$. Поэтому $\beta_1 \in \wp^i$ и $\gamma_1\gamma^{-1} - 1 \in \wp^i$, $\quad \gamma_1 \in 1 + \wp^i$. Положим $y = \omega\beta + \gamma x$, тогда легко проверить, что

$$\gamma_1^{-1} = \frac{(y-\omega\beta)^2 - \omega\gamma^2}{\gamma(y^2-\omega)} = \gamma^{-1}(1 - \frac{2y\omega}{y^2-\omega}\beta + \frac{\omega}{y^2-\omega}\frac{1-\gamma^2+\omega\beta^2}{1}).$$

Так что и γ_1^{-1} принадлежит $1+\wp^i$, значит, $\gamma_1 \in U_i$. Таким образом, группа $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}$ перестановочна с тором $T = T(\omega)$, и, следовательно, $T(\omega) \leqslant H \leqslant G$. Теорема доказана.

Следствие. *$\mathfrak{O}$-модуль A является допустимым тогда и только тогда, когда A есть целый идеал в $\mathfrak{O}$, т.е. $A = \wp^i$, где $i \geqslant 0$.*

Доказательство. Если a – допустимый $\mathfrak{O}$-модуль; то по теореме 1 A есть целый идеал кольца $\mathfrak{O}$. Обратно, если $A = \wp^i (i \geqslant 0)$, то он допустим по теореме 2.

Для допустимого модуля A положим

$$\mathrm{Lat}(A) = \{H : T \leqslant H \leqslant G, \quad A(H) = A\}.$$

Тогда мы имеем разложение решетки $\mathrm{Lat}(T(\omega), G)$ в дизъюнктное объединение множеств $\mathrm{Lat}(A)$ по всем допустимым модулям A

$$\mathrm{Lat}(T(\omega), G) = \cup^{\varnothing} \mathrm{Lat}(A),$$

которое в силу следствия выше и замечания в конце §3 принимает вид:

$$\mathrm{Lat}(T(\omega), G) = \mathrm{Lat}(k) \cup (\bigcup_{i\geqslant 0} \mathrm{Lat}(\wp^i)) \cup \mathrm{Lat}(0), \tag{7}$$

где, очевидно, $\mathrm{Lat}(k) = \Gamma^*$ и $\mathrm{Lat}(0) = \Gamma_*$.

§ 6. Множество $\mathrm{Lat}(\wp^i)$.

Пусть $\wp^i$ – допустимый модуль, т.е. $i \geqslant 0$. Положим

$$F(\wp^i) = \left\langle T, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} : \quad \alpha \in \wp^i \right\rangle.$$

Ясно, что $F(\wp^i)$ – наименьшая подгруппа с модулем трансвекций $\wp^i$, т.е. $F(\wp^i) = \inf \mathrm{Lat}(\wp^i)$. Согласно правилу перемещения для любых $x \in k, \alpha \in \wp^i$ имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in T, \tag{2'}$$

где ввиду формулы (4)

$$\gamma_1 = \frac{(\omega\alpha + x)^2 - \omega}{x^2 - \omega} = \varphi(x, \alpha).$$

Обозначим подгруппу в U, порожденную всеми значениями $\varphi(x, \alpha)$, через $\Omega_0(\wp^i)$:

$$\Omega_0(\wp^i) = \langle \varphi(x, \alpha) : \quad x \in k, \quad \alpha \in \wp^i \rangle.$$

Пользуясь индукцией нетрудно показать, что $\Delta(F(\wp^i)) = \Omega_0(\wp^i)$, так что (см. (5))

$$F(\wp^i) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & \Omega_0(\wp^i) \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Мультипликативная группа $\Omega_0(\wp^i)$ $(i \geqslant 0)$ совпадает с группой*

$$\left\{u^2 - \omega v^2 \in U : u \equiv 1(\mod \wp^i), \quad v \equiv 0(\mod \wp^i)\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \wp^i, x \in k$. Как показывает вычисление,

$$\varphi(x, \alpha) = (1 + \frac{x}{x^2 - \omega}\omega\alpha) - \omega(\frac{\omega}{x^2 - \omega}\alpha)^2,$$

так что $\varphi(x,\alpha)$ принадлежит указанному в формулировке множеству. Это доказывает включение в одну сторону. Если теперь $u^2-\omega v^2\in U$ с $u\equiv 1(\mod \wp^i)$ и $v\equiv 0(\mod \wp^i)$, то получаем

$$u^2-\omega v^2=u^2(1-\omega(u^{-1}v)^2)=u^2\varphi(0,u^{-1}v),$$

где $u^{-1}v\in\wp^i$. Поэтому $\varphi(0,u^{-1}v)\in\Omega_0(\wp^i)$. Кроме того, $u^2\in\Omega_0(\wp^i)$, так как для элемента u, который мы можем представить в виде $u=1+\omega\alpha,\alpha\in\wp^i$, справедливо тождество

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&u^2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\\omega\alpha&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega&\omega\\1&\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\u^{-1}(1-\omega)\alpha&1\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}-1&\omega\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-\alpha&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\omega\\1&0\end{pmatrix}\frac{u}{\omega(\omega-1)}.$$

Таким образом, $u^2-\omega v^2\in\Omega_0(\wp^i)$ и, значит,

$$\Omega_0(\wp^i)=\left\{u^2-\omega v^2:\quad u\equiv 1(\mod \wp^i),\quad v\equiv 0(\mod \wp^i)\right\}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $i\geqslant 0$. Тогда $\Delta(F\wp^i))=U_i$ и, следовательно,*

$$F(\wp^i)=T(\omega)\begin{pmatrix}1&0\\\wp^i&U_i\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку согласно теореме 2 §5 $T\begin{pmatrix}1&0\\\wp^i&U_i\end{pmatrix}$ – промежуточная подгруппа, а модуль трансвекций ее, очевидно, равен $\wp^i$, то она содержит $F(\wp^i)$, и поэтому

$$U_i\geqslant\Delta(F(\wp^i))=\Omega_0(\wp^i).$$

Обратно, ввиду формулы (8) для $i\geqslant 1$ имеем $U_i=U_i^2\leqslant\Omega_0(\wp^i)$, так что $U_i=\Omega_0(\wp^i)$. Чтобы доказать равенство $\Omega_0(\mathfrak{O})=U$, нам достаточно показать, что при некоторых целых элементах u и v $\omega=u^2-\omega v^2$, т.е. $\omega\in\Omega_0(\mathfrak{O})$. В силу свойств квадратичного символа Гильберта $(\omega,\omega)=(-1,\omega)$. Если $-1\in {k^*}^2$, то $(-1,\omega)=1$. Предположим, что $-1\in k^*/{k^*}^2$. Поскольку $-1\in V$, то при некотором натуральном s $-1=\omega^{2s+1}$, и тогда

$$(-1,\omega)=(-1,\omega)(-1,\omega^{2s})=(-1,\omega^{2s+1})=(-1,-1)=1,$$

что следует из теоремы 7 на стр.66 [7]. Таким образом, всегда $(\omega,\omega)=1$. Последнее означает, что при некоторых $u,v\in k$ $\omega=$

$u^2-\omega v^2$. Выражая $\nu(u^2-\omega v^2)$ через $\nu(u)$ и $\nu(v)$, легко получить, что $\nu(u)\geqslant 0$ и $\nu(v)\geqslant 0$, т.е. u и v – целы. Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Введем в рассмотрение группы

$$\Omega^0(\wp^i)=\{\theta\in U:\quad \theta^2-1\in\wp^i\}\quad (i\geqslant 0).$$

Так как $U_i^2=U_i$ при $i\geqslant 1$, то $U_i\leqslant\Omega^0(\wp^i)$. Равенство $U_0=U=\Omega^0(\mathfrak{O})$ очевидно по определению.

Теорема 2. *Пусть $i\geqslant 0$. Множество*

$$N(\wp^i)=T\begin{pmatrix}1 & 0\\ \wp^i & \Omega^0(\wp^i)\end{pmatrix}$$

является наибольшей промежуточной подгруппой с модулем трансвекций $\wp^i$, т.е. $N(\wp^i)=\sup\mathrm{Lat}(\wp^i)$.

Доказательство. Как мы знаем, для любой $H\in\mathrm{Lat}(\wp^i)$ $\quad A(H)=\wp^i$. Поэтому при любом $\delta\in\Delta(H)$ в равенстве

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & \omega\\ 1 & x\end{pmatrix}=t_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & \gamma_1\end{pmatrix},\quad t_1\in T,$$

элемент $\beta_1=\frac{x}{x^2-\omega}\cdot\frac{\delta^2-1}{\delta}$ принадлежит $\wp^i$ при всех $x\in k$. В частности, при $x=1$ $\frac{1}{1-\omega}\cdot\frac{\delta^2-1}{\delta}\in\wp^i,\delta^2-1\in\wp^i$, т.е. $\delta\in\Omega^0(\wp^i)$. Так что $H\subseteq N(\wp^i)$.

Докажем теперь, что $N(\wp^i)$ – группа. Пусть тогда при любом $x\in k$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & \omega\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & \omega\\ 1 & x\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta & 1\end{pmatrix}t_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & \gamma_1\end{pmatrix}=t_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & \gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & \gamma_1\end{pmatrix},$$

где в силу $(2')$ $\beta_2\in\wp^i$ и $\gamma_2=\varphi(x_1,\beta)\in\Omega_0(\wp^i)\leqslant\Omega^0(\wp^i)$, а элементы β_1 и γ_1 задаются формулами

$$\beta_1=\frac{x}{x^2-\omega}\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma},\qquad \gamma_1=\gamma\left(1+\frac{\omega}{x^2-\omega}\cdot\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right).$$

Поскольку $\gamma\in\Omega^0(\wp^i)$, то $\gamma^2-1\in\wp^i$ и $\beta_1\in\wp^i$. Точно так же $\gamma_1\gamma^{-1}-1\in\wp^i$, т.е. $\gamma_1\in U_i\leqslant\Omega^0(\wp^i)$. Теорема доказана.

Заметим, что при $i\geqslant 1$ мультипликативная группа $\Omega^0(\wp^i)$ состоит из всех тех единиц θ, квадраты θ^2 которых содержатся в U_i, т.е. $\theta=\pm(1+\pi^i\xi)$, $\quad\xi\in\mathfrak{O}$. Тем самым мы имеем равенство

$$\Omega^0(\wp^i)=<-1>\times U_i.$$

Учитывая очевидное равенство

$$\Omega^0(\mathfrak{O}) = U,$$

мы получаем полное описание множества $\mathrm{Lat}(\wp^i)$, $i \geqslant 0$.

Теорема 3. *Имеют место равенства*

$$\mathrm{Lat}(\mathfrak{O}) = \left\{T \cdot \mathrm{GL}(2, \mathfrak{O}) = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{O} & U \end{pmatrix}\right\}$$

и

$$\mathrm{Lat}(\wp^i) = \left\{T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & U_i \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \wp^i & < -1 > \times U_i \end{pmatrix}\right\}, \quad i \geqslant 1.$$

§ 7. Гирлянды решетки $\mathrm{Lat}(T(\omega), \mathrm{GL}(2,k))$.

Пусть H_1 и H_2 – две промежуточные подгруппы с модулем трансвекций $A(H_1) = A_1$ и $A(H_2) = A_2$ и кольцами множителей $R(H_1) = R_1$ и $R(H_2) = R_2$. Предположим, что $H_1 \trianglelefteq H_2$ (в частности, H_1 и H_2 принадлежат одной гирлянде Γ). Будем считать, что $\Gamma \neq \Gamma_*$ и $\Gamma \neq \Gamma^*$, т.е. кольца R_1 и R_2 отличны от k, и, следовательно, $R_1 = R_2 = \mathfrak{O}$ (теорема 1 § 5). Группы H_1 и H_2 имеют факторизации

$$H_1 = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_1 & \Delta_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H_2 = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A_2 & \Delta_2 \end{pmatrix}$$

соответственно (см.(5)), и потому $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема. *Если H_1 и H_2 – промежуточные подгруппы с $A(H_1) = A_1$ и $A(H_2) = A_2$, причем $H_1 \trianglelefteq H_2$, то $A_1 = A_2$.*

Доказательство. Нам достаточно рассмотреть случай, когда гирлянда Γ, содержащая H_1 и H_2, отлична от Γ_* и Γ^*. Пусть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in H_2$. Тогда для любой матрицы $t \in T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H_1.$$

Учитывая это, мы имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} tt^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= t_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} t^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1} \in H_1,$$

где

$$t = \begin{pmatrix} x & \omega \\ 1 & x \end{pmatrix}, \quad x = \frac{1-\gamma^2-\omega\beta^2}{2\gamma\beta}.$$

Таким образом, $2\beta \in A_1$, т.е. $2A_2 \leqslant A_1 \leqslant A_2$. Но поскольку $2 \in \mathfrak{O}^*$, то $A_1 = A_2$.

Из теоремы 1 следует, что если $H_1 \trianglelefteq H_2$, то $A(H_1) = A(H_2) = \wp^i$ при некотором $i \geqslant 0$, т.е. H_1 и H_2 принадлежат $\mathrm{Lat}(\wp^i)$. Так что очевидно

Следствие 1. *Гирляндами решетки* $\mathrm{Lat}(T(\omega), G)$ *являются множества* $\mathrm{Lat}(0)$, $\mathrm{Lat}(k)$ *и* $\mathrm{Lat}(\wp^i)$ *по всем* $i \geqslant 0$, *– и только они.*

Из вышеперечисленных гирлянд лишь одна $\mathrm{Lat}(\mathfrak{O})$ - состоит из единственной подгруппы $T \cdot \mathrm{GL}(2, \mathfrak{O})$, которая одновременно полна и самонормализуема. Остальные состоят из двух подгрупп: полной и самонормализуемой. Поэтому в силу сказанного в конце § 1 имеет место

Следствие 2. *Неразветвленный тор* $T(\omega)$ *является полинормальной подгруппой группы* $\mathrm{GL}(2, k)$.

В заключение автор выражает благодарность З. И. Боревичу за постановку задачи и внимание к работе и В. А. Койбаеву за полезные обсуждения.

Литература

1. А. Х. Аль Хамад, А. А. Бондаренко, З. И. Боревич, *Нормализатор группы "диагональных" автоморфизмов в алгебрах над коммутативным кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **191** (1991), 5–8.
2. А. Х. Аль Хамад, *Гирлянды в линейных группах, связанные с кольцами нормирования.* Канд. дисс., СПб., 1992. с.159.
3. М. С. Ба, З. И. Боревич, *О расположении промежуточных подгрупп.* — Кольца и линейные группы. Сб. науч. трудов., Краснодар (1988), 14–41.
4. З. И. Боревич, *О расположении подгрупп.* — Зап.науч. семин. ЛОМИ **94** (1979), 5–12.
5. З. И. Боревич, В. А. Койбаев, Чан Нгок Хой, *Решетки подгрупп в* $\mathrm{GL}(2, Q)$, *содержащих нерасщепимый тор.* — Зап. науч. семин. ЛОМИ **191** (1991), 24–43.
6. З. И. Боревич, О. Н. Мацедонская, *О решетке подгрупп.* — Зап.науч. семин. ЛОМИ **103** (1980), 13–19.
7. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* М., 1985, с. 503.
8. В. А. Койбаев, *О подгруппах группы* $\mathrm{GL}(2, Q)$, *содержащих нерасщепимый максимальный тор.* Международная конференция по алгебре. Тезисы докл. по теории групп. Новосибирск 1989, 61.
9. В. А. Койбаев, *Подгруппы группы* $\mathrm{GL}(2, Q)$, *содержащие нерасщепимый максимальный тор.* — Док. АН СССР **312 №1** (1990), 36–38.

10. Чан Нгок Хой, *Расположение подгрупп в* GL(2, Q), *содержащих нерасщепимый тор*. Канд. дисс. Л., 1990, 182 с.
11. H. Hasse, *Number theory*. Berlin: Akademic–Verlag, 1979.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 18 июня 1993 г.