V. I. Afanasyev, Functional limit theorems for the decomposable branching process with two types of particles, *Diskr. Mat.*, 2015, Volume 27, Issue 2, 22–44

https://www.mathnet.ru/eng/dm1323

Дискретная математика

том 27 выпуск 2 * 2015

УДК 519.218.23 DOI 10.4213/dm1323

Функциональные предельные теоремы для разложимого ветвящегося процесса с двумя типами частиц

 В. И. Афанасьев*

Рассматривается разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц. Предполагается, что частицы первого типа производят как частицы первого, так и второго типов, причем в одинаковых количествах, а частицы второго типа производят только частицы своего типа. Процесс рассматривается при условии, что полное число частиц первого типа равно N. Установлены функциональные предельные теоремы, в которых рассматриваются численности частиц как первого, так и второго типов в поколениях с номерами порядка $\sqrt{N}$, порядка N и промежуточного порядка.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

Ключевые слова: разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с несколькими типами частиц, функциональные предельные теоремы.

1. Рассмотрим разложимый ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с двумя типами частиц. Предполагается, что частицы первого типа производят как частицы первого типа, так и частицы второго типа, причем в одинаковых количествах, а частицы второго типа производят только частицы своего типа.

Прежде, чем дать точное определение рассматриваемого процесса, зададим вспомогательные производящие функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, $s \geqslant 0$.

Пусть $\{f_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$ – последовательность неотрицательных чисел. Положим $f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$ при $s \geqslant 0$. Предположим, что радиус сходимости r этого ряда положителен и существует такое число $\tau \in (0, r)$, что $\tau f'(\tau) = f(\tau) > 0$. Положим $p_k = \tau^k f_k / f(\tau)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ и введем производящую функцию

$$\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \frac{1}{f(\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} f_k (\tau s)^k = \frac{f(\tau s)}{f(\tau)},\ s \geqslant 0.$$

Очевидно, радиус сходимости ряда $\varphi(s)$ больше единицы и $\varphi'(1) = 1$. Положим

$$\sigma_1^2 = \frac{\tau^2 \varphi''(\tau)}{\varphi(\tau)}.$$

Если ξ – случайная величина с распределением $\{p_k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$, то, как нетрудно понять, $\mathbf{E}\xi = 1$, $\mathbf{Var}\,\xi = \sigma_1^2$.

*Место работы: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, e-mail: viafan@mi.ras.ru

Пусть $\psi(s)$, $s \geqslant 0$, – производящая функция вероятностного распределения, причем $\psi'(1) = 1$ и $\sigma_2^2 := \psi''(1) \in (0, +\infty)$. Если η – случайная величина с производящей функцией $\psi(\cdot)$, то $\mathbf{E}\eta = 1$, $\mathbf{Var}\,\eta = \sigma_2^2$.

Теперь введем производящие функции для потомства одной частицы первого и второго типов соответственно: при $s_1, s_2 \geqslant 0$

$$\left.\begin{array}{r} f_1(s_1, s_2) = \varphi(s_1 s_2), \\ f_2(s_1, s_2) = \psi(s_2). \end{array}\right\} \tag{1}$$

Обозначим ξ_n и η_n количества частиц первого и второго типов соответственно в n-м поколении рассматриваемого ветвящегося процесса. Предполагается, что $\xi_0 = 1$ и $\eta_0 = 0$. Положим $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$.

Разложимые ветвящиеся процессы Гальтона -Ватсона с несколькими типами частиц ранее изучались при условии невырождения или при условии вырождения в фиксированный момент времени (подробную библиографию см. в работе [1]). Отметим, что в теории случайных деревьев (см., например, [2]) рассматриваются ветвящиеся процессы с фиксированным общим числом частиц. В настоящей работе введенный разложимый ветвящийся процесс рассматривается при условии, что фиксировано общее число частиц первого типа. Итак, нас будут интересовать предельные теоремы для процесса $\{(\xi_n, \eta_n),\ n \in \mathbb{N}_0\}$, рассматриваемого при условии, что $\Sigma = N$, где N – некоторое фиксированное натуральное число.

Введенный посредством (1) процесс можно трактовать следующим образом. Имеется N частиц первого типа (без учета начальной), каждой из которых соответствует ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона из частиц второго типа с производящей функцией $\psi(\cdot)$. Чтобы установить это соответствие, надо разбить прямое потомство каждой частицы первого типа на пары, в каждой из которых будет одна частица первого типа и одна второго (это можно сделать, поскольку частицы первого типа порождают потомков первого и второго типов в одинаковых количествах). В каждой такой паре процесс, порожденный частицей второго типа, будем считать соответствующим частице первого типа из этой же пары. В свою очередь, сами эти N частиц первого типа порождены ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с производящей функцией $\varphi(\cdot)$ и представляют полное потомство начальной частицы.

Прежде, чем сформулировать полученные предельные теоремы, укажем, что в качестве предельных процессов фигурируют *броуновское движение* $\{W(t),\ t \geqslant 0\}$, *локальное время броуновской экскурсии* $\left\{l_0^+(t),\ t \geqslant 0\right\}$ и *феллеровская диффузия* $\{Y(t),\ t \geqslant 0\}$.

Напомним, что броуновская экскурсия $\left\{W_0^+(t),\ t \in [0,1]\right\}$ – это случайный процесс, являющийся предельным по распределению при $\varepsilon \downarrow 0$ для броуновского движения, рассматриваемого при условии, что $\sup_{t\in[0,1]} W(t) \geqslant -\varepsilon$ и $W(1) \leqslant \varepsilon$. Локальное время $l_0^+(y)$ на уровне $y \geqslant 0$ броуновской экскурсии $\left\{W_0^+(t),\ t \in [0,1]\right\}$ определяется по формуле

$$l_0^+(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^1 I_{[y, y+\varepsilon]}\left(W_0^+(t)\right) dt,$$

где $I_A(\cdot)$ – индикатор множества A.

Случайный процесс $\{Y(t),\ t \in [0, +\infty)\}$ называется *феллеровской диффузией*, если он имеет непрерывные траектории, является марковским, стартует из положительного состояния, имеет поглощающее состояние в точке 0 и переходную плотность $p(t, x, y)$ при положительных состояниях x, y, преобразование Лапласа которой при $t > 0$ равно

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda y} p(t, x, y)\, dy = \exp\left(-\frac{\lambda x}{1+\lambda t}\right) - \exp\left(-\frac{x}{t}\right),\ \lambda \in [0, +\infty).$$

Сформулируем основные полученные результаты.

Теорема 1. *При* $N \to \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{\sqrt{N}},\ t \geqslant 0 \ \middle|\ \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \frac{\sigma_1}{2} l_0^+ \left(\frac{\sigma_1}{2} t\right),\ t \geqslant 0 \right\}, \tag{2}$$

$$\left\{ \frac{\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{N},\ t \geqslant 0 \ \middle|\ \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} \left\{ \frac{\sigma_1}{2} \int\limits_0^t l_0^+ \left(\frac{\sigma_1}{2} s\right) ds,\ t \geqslant 0 \right\}, \tag{3}$$

где символ $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в функциональном пространстве* $D[0, +\infty)$ *с топологией Скорохода.*

Теорема 2. *Пусть последовательность натуральных чисел* $\{K_N\}$ *такова, что* $K_N/\sqrt{N} \to \infty$ *и* $K_N/N \to 0$ *при* $N \to \infty$. *Тогда при* $N \to \infty$

$$\left\{ \xi_{\lfloor tK_N\rfloor},\ t > 0 \ \middle|\ \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} 0, \tag{4}$$

$$\left\{ \frac{\eta_{\lfloor tK_N\rfloor} - N}{\sigma_2\sqrt{K_N N}},\ t > 0 \ \middle|\ \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} \{W(t),\ t > 0\}. \tag{5}$$

Теорема 3. *При* $N \to \infty$

$$\left\{ \xi_{\lfloor tN\rfloor},\ t > 0 \ \middle|\ \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} 0, \tag{6}$$

$$\left\{ \frac{\eta_{\lfloor tN\rfloor}}{N},\ t > 0 \ \middle|\ \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} \{Y(bt),\ t > 0\}, \tag{7}$$

где $b = \sigma^2/2$, $Y(0) = 1$.

Отметим, что символ $\xrightarrow{D}$ в соотношениях (4)–(7) означает сходимость по распределению в пространстве $D[v, +\infty)$ с топологией Скорохода при каждом $v > 0$. Сравнивая теоремы 1–3, видим, что в первой из них рассматриваются временные уровни порядка $\sqrt{N}$, в третьей – порядка N и, наконец, во второй – промежуточного порядка.

2. *Доказательство теоремы* 1. Заметим, что процесс $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с производящей функцией потомства одной частицы $\varphi(\cdot)$, причем $\xi_0 = 1$. Этот процесс при условии, что $\Sigma = N$, изучался в работе [3] в связи со случайными деревьями. Соотношение (2) является переформулировкой теоремы 1 этой работы в терминах ветвящихся процессов.

Далее, при фиксированном процессе $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ процесс частиц второго типа $\{\eta_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ представляет собою ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с ξ_n иммигрантами в n-м поколении при каждом $n \in \mathbb{N}$, причем $\eta_0 = 0$. Отметим, что производящей функцией потомства одной частицы (в том числе и каждого иммигранта) является $\psi(\cdot)$. Прежде, чем доказывать соотношение (3), приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с одной частицы. Относительно производящей функции потомства одной частицы $\psi(\cdot)$ предполагается, что $\psi'(1) = 1$. Для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}_0$ и $s_1, \ldots, s_m \geqslant 0$ положим*

$$\psi_{n_1,\ldots,n_m}(s_1, \ldots, s_m) = \mathbf{E} s_1^{Z_{n_1}} \ldots s_m^{Z_{n_m}}.$$

Тогда при $s_1, \ldots, s_m \in [0,1]$ величина $\psi_{n_1+n,\ldots,n_m+n}(s_1, \ldots, s_m)$ не убывает по $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Поскольку $\psi(1) = 1$, $\psi'(1) = 1$ и функция $\psi(s)$ выпукла вниз на отрезке $[0,1]$, то $s \leqslant \psi(s)$ при $s \in [0,1]$. Сначала покажем, что при $s \in [0,1]$ последовательность $\{\psi_n(s),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является неубывающей. Действительно, уже показано, что $\psi_0(s) \leqslant \psi_1(s)$. Предположим, что $\psi_{n-1}(s) \leqslant \psi_n(s)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\psi_n(s) = \psi_{n-1}(\psi(s)) \leqslant \psi_n(\psi(s)) = \psi_{n+1}(s).$$

Рассмотрим случай $m = 2$. Пусть для определенности $n_1 < n_2$. Заметим, что

$$\psi_{n_1,n_2}(s_1, s_2) = \mathbf{E}\left(s_1^{Z_{n_1}} \mathbf{E}\left(s_2^{Z_{n_2}} \;\middle|\; Z_{n_1}\right)\right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(s_1^{Z_{n_1}} \psi_{n_2-n_1}^{Z_{n_1}}(s_2)\right) = \psi_{n_1}(s_1 \psi_{n_2-n_1}(s_2)).$$

Следовательно,

$$\mathbf{E} s_1^{Z_{n_1+n}} s_2^{Z_{n_2+n}} = \psi_{n_1+n}(s_1 \psi_{n_2-n_1}(s_2)),$$

причем последнее выражение не убывает по n. Итак, утверждение леммы доказано при $m = 2$. При $m > 2$ рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Следующая функциональная предельная теорема установлена Ламперти и Линдваллом (см. теорему 2.3 работы [4] и теорему 1 работы [5]).

Лемма 2. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зададим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона $\left\{Z_n^{(k)},\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$, начинающийся с k частиц. Относительно производящей функции потомства одной частицы $\psi(\cdot)$ предполагается, что она не зависит от k и $\psi'(1) = 1$, $\psi''(1) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Пусть последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$ такова, что $k_n/n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$*

$$\left\{\frac{Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(k_n)} - k_n}{\sigma\sqrt{n k_n}},\ t \geqslant 0\right\} \xrightarrow{D} \{W(t),\ t \geqslant 0\}.$$

Лемма 3. *В условиях леммы 2 при любом фиксированном $u \in (0, +\infty)$ и $n \to \infty$*

$$\sup_{t \in [0,u]} \frac{\left|Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(k_n)} - k_n\right|}{k_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство. По лемме 2 при $n \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,u]} \left| \frac{Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(k_n)} - k_n}{\sigma\sqrt{nk_n}} \right| \xrightarrow{D} \sup_{t\in[0,u]} |W(t)|.$$

Следовательно, при каждом $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} \left| k_n^{-1} Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(k_n)} - 1 \right| > a\sigma\sqrt{k_n^{-1}n} \right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} |W(t)| > a \right).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} \left| k_n^{-1} Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(k_n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} \left| n^{-1} Z_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor}^{(n)} - 1 \right| > a\sigma\sqrt{k_n^{-1}n} \right)$$

и, значит, для каждого $a > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} \left| k_n^{-1} Z_{\lfloor tn \rfloor}^{(k_n)} - 1 \right| > \varepsilon \right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} |W(t)| > a \right).$$

Откуда, устремляя a к $+\infty$, получаем утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть $\{\nu_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ – последовательность положительных целочисленных случайных величин. Предположим, что эта последовательность и все ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона, описанные в лемме 2, определены на одном и том же вероятностном пространстве. Пусть при $n \to \infty$*

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{D} \nu, \tag{8}$$

где ν – положительная собственная случайная величина. Тогда при любом фиксированном $u \in (0, +\infty)$ и $n \to \infty$

$$\sup_{t\in[0,u]} \frac{\left| Z_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor}^{(\nu_n)} - \nu_n \right|}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

В частности, при $n \to \infty$

$$\left\{ n^{-1} Z_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor}^{(\nu_n)},\ t \geqslant 0 \right\} \Rightarrow \{\nu,\ t \geqslant 0\},$$

где символ $\Rightarrow$ означает сходимость в смысле конечномерных распределений.

Доказательство. Введем при $\varepsilon \in (0, 1)$ случайные события

$$A_\varepsilon = \left\{ \sup_{t\in[0,u]} \left| n^{-1} \left(Z_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor}^{(\nu_n)} - \nu_n \right) \right| \geqslant \varepsilon \right\},$$

$$B_\varepsilon = \left\{ \sup_{t\in[0,u]} Z_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor}^{(\nu_n)} \geqslant \nu_n + \varepsilon n \right\},\ C_\varepsilon = \left\{ \inf_{t\in[0,u]} Z_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor}^{(\nu_n)} \leqslant \nu_n - \varepsilon n \right\}.$$

Ясно, что

$$A_\varepsilon = B_\varepsilon \cup C_\varepsilon. \tag{9}$$

Если множество $(x,y]$, где $0 \leqslant x < y < +\infty$, является ν-непрерывным, то в силу (8)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_n}{n} \in (x,y]\right) = \mathbf{P}\left(\nu \in (x,y]\right).$$

Поскольку $\nu > 0$, то для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ существует такое ν-непрерывное множество $(a,b]$, где $0 < a < b < +\infty$, что

$$\mathbf{P}\left(\nu \notin (a,b]\right) \leqslant \varepsilon_0$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu_n}{n} \notin (a,b]\right) \leqslant \varepsilon_0. \tag{10}$$

Запишем представление

$$\mathbf{P}\left(A_\varepsilon\right) = P_1\left(n\right) + P_2\left(n\right), \tag{11}$$

где

$$P_1\left(n\right) = \mathbf{P}\left(A_\varepsilon,\ \frac{\nu_n}{n} \notin (a,b]\right),$$

$$P_2\left(n\right) = \mathbf{P}\left(A_\varepsilon,\ \frac{\nu_n}{n} \in (a,b]\right).$$

Ввиду (10)

$$\limsup_{n\to\infty} P_1\left(n\right) \leqslant \varepsilon_0. \tag{12}$$

Разделим промежуток $(a,b]$ на m частей длины δ и запишем представление

$$P_2\left(n\right) = \sum_{k=0}^{m-1} P_2\left(n,k\right), \tag{13}$$

где

$$P_2\left(n,k\right) = \mathbf{P}\left(A_\varepsilon,\ \nu_n/n \in \left(a+k\delta, a+\left(k+1\right)\delta\right]\right). \tag{14}$$

Если $\nu_n/n \in \left(a+k\delta, a+\left(k+1\right)\delta\right]$, то $\nu_n \in \left[n_1\left(k\right), n_2\left(k\right)\right]$, где

$$n_1\left(k\right) = \left\lfloor\left(a+k\delta\right)n\right\rfloor, \qquad n_2\left(k\right) = \left\lfloor\left(a+\left(k+1\right)\delta\right)n\right\rfloor.$$

Ввиду (9) при $k \in \{0,\ldots,m-1\}$

$$P_2\left(n,k\right) \leqslant P_2'\left(n,k\right) + P_2''\left(n,k\right), \tag{15}$$

где

$$P_2'\left(n,k\right) = \mathbf{P}\left(B_\varepsilon,\ \nu_n \in \left[n_1\left(k\right), n_2\left(k\right)\right]\right),$$

$$P_2''\left(n,k\right) = \mathbf{P}\left(C_\varepsilon,\ \nu_n \in \left[n_1\left(k\right), n_2\left(k\right)\right]\right).$$

При фиксированных натуральных $k_1 < k_2$

$$\mathbf{P}\left(Z_n^{(k_1)} \geqslant x\right) \leqslant \mathbf{P}\left(Z_n^{(k_2)} \geqslant x\right),$$

где $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$P_2'\left(n,k\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor}^{(\nu_n)} \geqslant \nu_n + \varepsilon n,\ \nu_n \in \left[n_1\left(k\right), n_2\left(k\right)\right]\right) =$$

$$= \sum_{l=n_1(k)}^{n_2(k)} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z^{(\nu_n)}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \geqslant \nu_n + \varepsilon n,\ \nu_n = l\right) =$$

$$= \sum_{l=n_1(k)}^{n_2(k)} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z^{(l)}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \geqslant l + \varepsilon n,\ \nu_n = l\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=n_1(k)}^{n_2(k)} \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z^{(n_2(k))}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \geqslant n_1(k) + \varepsilon n,\ \nu_n = l\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z^{(n_2(k))}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \geqslant n_1(k) + \varepsilon n\right).$$

Итак,

$$P_2'(n,k) \leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z^{(n_2(k))}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \geqslant n_1(k) + \varepsilon n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[0,u]} Z^{(n_2(k))}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \geqslant \frac{n_1(k) + \varepsilon n}{n_2(k)} n_2(k)\right).$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_1(k)+\varepsilon n}{n_2(k)} = \frac{a+k\delta+\varepsilon}{a+(k+1)\delta}.$$

Пусть $\delta \leqslant \varepsilon/2$, тогда

$$\frac{a+k\delta+\varepsilon}{a+(k+1)\delta} = 1 + \frac{\varepsilon-\delta}{a+(k+1)\delta} \geqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Применяя теперь лемму 3, находим, что при всех $k \in \{0,\ldots,m-1\}$

$$\limsup_{n\to\infty} P_2'(n,k) = 0. \tag{16}$$

Аналогично

$$P_2''(n,k) \leqslant \mathbf{P}\left(\inf_{t\in[0,u]} Z^{(n_1(k))}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \leqslant n_2(k) - \varepsilon n\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\inf_{t\in[0,u]} Z^{(n_1(k))}_{\lfloor t\sqrt{n}\rfloor} \leqslant \frac{n_2(k) - \varepsilon n}{n_1(k)} n_1(k)\right).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_2(k)-\varepsilon n}{n_1(k)} = \frac{a+(k+1)\delta-\varepsilon}{a+k\delta}$$

и при $\delta \leqslant \varepsilon/2$

$$\frac{a+(k+1)\delta-\varepsilon}{a+k\delta} = 1 - \frac{\varepsilon-\delta}{a+k\delta} \leqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2b},$$

то по лемме 3 при всех $k \in \{0,\ldots,m-1\}$

$$\limsup_{n\to\infty} P_2''(n,k) = 0. \tag{17}$$

Из соотношений (15)–(17) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} P_2(n) = 0. \tag{18}$$

В свою очередь, из соотношений (11), (12) и (18) получаем утверждение леммы.

Замечание 1. Предположим, что наряду с $\{\nu_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ на том же вероятностном пространстве задана еще одна последовательность положительных целочисленных случайных величин $\{\widetilde{\nu}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, причем при $n \to \infty$

$$\frac{\widetilde{\nu}_n}{n} \xrightarrow{D} \widetilde{\nu},$$

где $\widetilde{\nu}$ – положительная случайная величина. Из доказанной леммы следует, что при $n \to \infty$

$$\left\{ \left(n^{-1} Z^{(\nu_n)}_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor},\ n^{-1} Z^{(\widetilde{\nu}_n)}_{\lfloor t\sqrt{n} \rfloor} \right),\ t \geqslant 0 \right\} \Rightarrow \left\{ (\nu, \widetilde{\nu}),\ t \geqslant 0 \right\}.$$

Перейдем к рассмотрению исходного ветвящегося процесса. Пусть $\eta_{n,n} = \xi_n$, а при $i < n$ обозначим $\eta_{n,i}$ количество частиц второго типа в n-м поколении, порожденных иммигрантами из i-го поколения. Ясно, что $\eta_0 = 0$ и при $n \in \mathbb{N}$

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_{n,i}.$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Положим при натуральных $n \geqslant n_0$

$$\eta_n^{(n_0)} = \sum_{i=1}^{n_0} \eta_{n,i}.$$

Отметим, что $\eta_n^{(n)} = \eta_n$ при $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 5. *Пусть $u > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta = u/m$ и $t_k = k\delta$ при $k \in \{0, \ldots, m\}$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) = 0,$$

где $t_k(N) = \left\lfloor t_k \sqrt{N} \right\rfloor$ при $k \in \{0, \ldots, m\}$.

Доказательство. Будем использовать символы $\widehat{\mathbf{P}}$ и $\widehat{\mathbf{E}}$ в случае, когда фиксирован случайный процесс $\{\xi_n\}$. Поскольку критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона с иммиграцией является неотрицательным субмартингалом, то по неравенству Дуба при $k \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$\widehat{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} \right| \geqslant \varepsilon N \right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 N^2} \widehat{\mathbf{E}} \left(\eta_{t_{k+1}(N)} - \eta^{(t_k(N))}_{t_{k+1}(N)} \right)^2. \tag{19}$$

Заметим, что

$$\eta_{t_{k+1}(N)} - \eta^{(t_k(N))}_{t_{k+1}(N)} = \sum_{i=t_k(N)+1}^{t_{k+1}(N)} \eta_{t_{k+1}(N),i}. \tag{20}$$

При фиксированном процессе $\{\xi_n\}$ слагаемые в правой части независимы. Далее, при $n > i$

$$\widehat{\mathbf{E}} \eta_{n,i} = \xi_i, \qquad \widehat{\mathbf{E}} \left(\eta_{n,i} - \xi_i \right)^2 = \sigma_2^2 \left(n - i \right) \xi_i.$$

Следовательно,

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\eta_{t_{k+1}(N)}-\eta_{t_{k+1}(N)}^{(t_k(N))}\right)=\sum_{i=t_k(N)+1}^{t_{k+1}(N)}\xi_i,$$

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\eta_{t_{k+1}(N)}-\eta_{t_{k+1}(N)}^{(t_k(N))}\right)^2=A_1\left(k,N\right)+A_2\left(k,N\right), \tag{21}$$

где

$$A_1\left(k,N\right)=\sigma_2^2\sum_{i=t_k(N)+1}^{t_{k+1}(N)}\left(i-t_k\left(N\right)\right)\xi_i,\ \ A_2\left(k,N\right)=\left(\sum_{i=t_k(N)+1}^{t_{k+1}(N)}\xi_i\right)^2.$$

Если $\Sigma=N$, то

$$\sum_{k=0}^{m-1}A_1\left(k,N\right)\leqslant\sum_{k=0}^{m-1}\sigma_2^2\left(t_{k+1}\left(N\right)-t_k\left(N\right)\right)N\leqslant\sigma_2^2uN^{3/2}, \tag{22}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}A_2\left(k,N\right)\leqslant\max_{k\in\{0,\dots,m-1\}}\left(\sum_{i=t_k(N)+1}^{t_{k+1}(N)}\xi_i\right)N. \tag{23}$$

Для каждого $N\in\mathbb{N}$ введем случайные процессы

$$\mu_N\left(t\right)=\frac{\sum_{i=1}^{\left\lfloor t\sqrt{N}\right\rfloor}\xi_i}{N},\ \ t\geqslant 0.$$

В силу соотношения (2) при $N\to\infty$

$$\left\{\mu_N\left(t\right),\ t\geqslant 0\ |\ \ \Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}\left\{\mu\left(t\right),\ t\geqslant 0\right\}, \tag{24}$$

где

$$\mu\left(t\right)=\frac{\sigma_1}{2}\int\limits_0^t l_0^+\left(\frac{\sigma_1}{2}s\right)ds,\ \ t\geqslant 0.$$

Пусть $0\leqslant v<u<+\infty$. Введем для функции $x\in D\left[v,u\right]$ модуль непрерывности:

$$w_x\left(\Delta;v,u\right)=\sup_{\substack{t,s:|t-s|\leqslant\Delta,\\ t,s\in[v,u]}}\left|x\left(t\right)-x\left(s\right)\right|,\ \ \Delta>0.$$

Положим $w_x\left(\Delta;0,u\right)=w_x\left(\Delta;u\right)$. Ввиду соотношения (24) при $N\to\infty$

$$\left\{w_{\mu_N}\left(\delta;u\right)\ \ |\ \ \Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}w_\mu\left(\delta;u\right). \tag{25}$$

Перепишем соотношение (23) в виде

$$\sum_{k=0}^{m-1}A_2\left(k,N\right)\leqslant N^2w_{\mu_N}\left(\delta;u\right). \tag{26}$$

Из соотношений (21), (22) и (26) находим, что если $\Sigma=N$, то

$$\sum_{k=0}^{m-1}\widehat{\mathbf{E}}\left(\eta_{t_{k+1}(N)}-\eta_{t_{k+1}(N)}^{(t_k(N))}\right)^2\leqslant\sigma_2^2uN^{3/2}+N^2w_{\mu_N}\left(\delta;u\right).$$

Откуда, учитывая соотношение (19), получаем, что если $\Sigma = N$, то

$$\sum_{k=0}^{m-1} \widehat{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} \right| \geqslant \varepsilon N \right) \leqslant \varepsilon^{-2} \left(\frac{\sigma_2^2 u}{\sqrt{N}} + w_{\mu_N}(\delta; u) \right). \quad (27)$$

Далее,

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) =$$

$$= \mathbf{E} \left(\widehat{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} \right| \geqslant \varepsilon N \right) \;\middle|\; \Sigma = N \right). \quad (28)$$

Из соотношений (27)–(28) находим, что

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{-2} \left(\frac{\sigma_2^2 u}{\sqrt{N}} + \mathbf{E} \left(w_{\mu_N}(\delta; u) \mid \Sigma = N \right) \right).$$

Если $\Sigma = N$, то $\mu_N(t) \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$ и, следовательно, случайная величина $w_{\mu_N}(t_2 - t_1; u)$ ограничена сверху 1. По этой причине, учитывая (25), можно перейти к пределу при $N \to \infty$ под знаком последнего математического ожидания:

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor} - \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) \leqslant \frac{\mathbf{E} w_\mu(\delta; u)}{\varepsilon^2}. \quad (29)$$

Поскольку траектории процесса $\{\mu(t), t \geqslant 0\}$ непрерывны и $\mu(t) \leqslant 1$ при $t \geqslant 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbf{E} w_\mu(\delta; u) = 0. \quad (30)$$

Из соотношений (29), (30) следует утверждение леммы.

Лемма 6. *В условиях леммы* 5 *для произвольного* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) = 0.$$

Доказательство. Пусть $k \in \{0, \ldots, m-1\}$. При фиксированном процессе $\{\xi_n\}$ случайный процесс $\left\{\eta_n^{(t_k(N))},\ n \geqslant t_k(N)\right\}$ является обычным (без иммиграции) ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона, стартующим с $\eta_{t_k(N)}$ частиц, принадлежащих поколению с номером $t_k(N)$. Поскольку критический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона является неотрицательным мартингалом, то по неравенству Дуба

$$\widehat{\mathbf{P}} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right| \geqslant \varepsilon N \right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 N^2} \widehat{\mathbf{E}} \left(\eta_{t_{k+1}(N)}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right)^2. \quad (31)$$

Заметим, что

$$\widehat{\mathbf{E}} \left(\eta_{t_{k+1}(N)}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right)^2 = \sigma_2^2 \left(t_{k+1}(N) - t_k(N) \right) \widehat{\mathbf{E}} \eta_{t_k(N)} =$$

$$= \sigma_2^2 \left(t_{k+1}(N) - t_k(N)\right) \sum_{l=1}^{t_k(N)} \xi_l.$$

Если $\Sigma = N$, то $\sum_{i=1}^{t_k(N)} \xi_i \leqslant N$ и, следовательно,

$$\widehat{\mathbf{E}} \left(\eta_{t_{k+1}(N)}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right)^2 \leqslant \sigma_2^2 \left(t_{k+1}(N) - t_k(N)\right) N. \tag{32}$$

Из соотношений (31)–(32) находим, что

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) \leqslant \frac{\sigma_2^2}{\varepsilon^2 N} \left(t_{k+1}(N) - t_k(N)\right)$$

и, значит,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{P} \left(\sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \left| \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(t_k(N))} - \eta_{t_k(N)} \right| \geqslant \varepsilon N \;\middle|\; \Sigma = N \right) \leqslant \frac{\sigma_2^2 \left\lfloor u\sqrt{N} \right\rfloor}{\varepsilon^2 N},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 7. *Пусть* $t_0 > 0$. *При* $N \to \infty$

$$\left\{ N^{-1} \eta_{\lfloor t\sqrt{N} \rfloor}^{(\lfloor t_0\sqrt{N} \rfloor)},\ t \geqslant t_0 \;\middle|\; \Sigma = N \right\} \Rightarrow \left\{ \mu(t_0),\ t \geqslant t_0 \right\}.$$

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ($t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$). Положим $t_k(N) = \left\lfloor t_k\sqrt{N} \right\rfloor$ при $k \in \{0, \ldots, m\}$. Положим при $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$

$$\widehat{\Psi}_{t_1,\ldots,t_m}^{(N)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \widehat{\mathbf{E}} \exp \left(-\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \eta_{t_k(N)}^{(t_0(N))} \right),$$

$$\Psi_{t_1,\ldots,t_m}^{(N)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E} \left(\exp \left(-\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \eta_{t_k(N)}^{(t_0(N))} \right) \;\middle|\; \Sigma = N \right).$$

Заметим, что

$$\Psi_{t_1,\ldots,t_m}^{(N)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E} \left(\widehat{\Psi}_{t_1,\ldots,t_m}^{(N)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \;\middle|\; \Sigma = N \right). \tag{33}$$

Нетрудно понять, что

$$\widehat{\Psi}_{t_1,\ldots,t_m}^{(N)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{i=0}^{t_0(N)} \psi_{t_1(N)-i,\ldots,t_m(N)-i}^{\xi_i} \left(e^{-\lambda_1/N}, \ldots, e^{-\lambda_m/N} \right)$$

(определение $\psi_{n_1,\ldots,n_m}(s_1, \ldots, s_m)$ дано в лемме 1). В силу леммы 1

$$\psi_{t_1(N)-t_0(N),\ldots,t_m(N)-t_0(N)}^{\Sigma_N(t_0)} \left(e^{-\lambda_1/N}, \ldots, e^{-\lambda_m/N} \right) \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{\Psi}_{t_1,\ldots,t_m}^{(N)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \leqslant \psi_{t_1(N),\ldots,t_m(N)}^{\Sigma_N(t_0)} \left(e^{-\lambda_1/N}, \ldots, e^{-\lambda_m/N} \right),$$

где $\Sigma_N(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} \xi_i$ при $t \geqslant 0$. Следовательно, по формуле (33)

$$\mathbf{E}\left(\psi^{\Sigma_N(t_0)}_{t_1(N)-t_0(N),\ldots,t_m(N)-t_0(N)}\left(e^{-\lambda_1/N},\ldots,e^{-\lambda_m/N}\right) \;\middle|\; \Sigma = N\right) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left(\psi^{\Sigma_N(t_0)}_{t_1(N),\ldots,t_m(N)}\left(e^{-\lambda_1/N},\ldots,e^{-\lambda_m/N}\right) \;\middle|\; \Sigma = N\right). \tag{34}$$

Замечая, что

$$\frac{\Sigma_N(t)}{N} = \mu_N(t),$$

и учитывая соотношение (24), находим, что при $t \geqslant 0$ и $N \to \infty$

$$\left\{\frac{\Sigma_N(t)}{N} \;\middle|\; \Sigma = N\right\} \xrightarrow{D} \mu(t). \tag{35}$$

Ввиду (35) на основании леммы 4 заключаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left(\psi^{\Sigma_N(t_0)}_{t_1(N)-t_0(N),\ldots,t_m(N)-t_0(N)}\left(e^{-\lambda_1/N},\ldots,e^{-\lambda_m/N}\right) \;\middle|\; \Sigma = N\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\mathbf{E}\left(\psi^{\Sigma_N(t_0)}_{t_1(N),\ldots,t_m(N)}\left(e^{-\lambda_1/N},\ldots,e^{-\lambda_m/N}\right) \;\middle|\; \Sigma = N\right) =$$

$$= \mathbf{E}\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mu(t_0)\right). \tag{36}$$

Из соотношений (34) и (36) получаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \mathbf{E}\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\mu(t_0)\right). \tag{37}$$

Итак, утверждение леммы установлено в случае, когда все моменты времени $t_1,\ldots,t_m$ больше t_0.

Положим $t_0(N,\delta) = \left\lfloor (t_0+\delta)\sqrt{N}\right\rfloor$ при $\delta > 0$. Ввиду (37) при $N \to \infty$

$$N^{-1}\left\{\eta^{(t_0(N))}_{t_0(N,\delta)}, \eta^{(t_0(N))}_{t_1(N)}, \ldots, \eta^{(t_0(N))}_{t_m(N)} \;\middle|\; \Sigma = N\right\} \xrightarrow{D} \{\mu(t_0), \mu(t_0), \ldots, \mu(t_0)\}. \tag{38}$$

Из леммы 6 следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(N^{-1}\left|\eta^{(t_0(N))}_{t_0(N,\delta)} - \eta_{t_0(N)}\right| \geqslant \varepsilon \;\middle|\; \Sigma = N\right) = 0. \tag{39}$$

Из соотношений (38), (39) на основании теоремы 4.2 из [6] заключаем, что при $N \to \infty$

$$N^{-1}\left\{\eta^{(t_0(N))}_{t_0(N)}, \eta^{(t_0(N))}_{t_1(N)}, \ldots, \eta^{(t_0(N))}_{t_m(N)} \;\middle|\; \Sigma = N\right\} \xrightarrow{D} \{\mu(t_0), \mu(t_0), \ldots, \mu(t_0)\},$$

тем самым утверждение леммы установлено и в случае моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_m$. Лемма доказана.

Замечание 1. По той же схеме можно получить следующее обобщение леммы 7: пусть $0 < t_0 < s_0$, тогда при $N \to \infty$

$$\left\{ \frac{\eta^{\left(\lfloor t_0\sqrt{N}\rfloor\right)}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{N},\ t \geqslant t_0;\ \frac{\eta^{\left(\lfloor s_0\sqrt{N}\rfloor\right)}_{\lfloor s\sqrt{N}\rfloor} - \eta^{\left(\lfloor t_0\sqrt{N}\rfloor\right)}_{\lfloor s\sqrt{N}\rfloor}}{N},\ s \geqslant s_0 \,\middle|\, \Sigma = N \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\mu(t_0),\ t \geqslant t_0;\ \mu(s_0) - \mu(t_0),\ t \geqslant s_0\}.$$

При этом сначала устанавливается формула, аналогичная (34), где под каждым из двух знаков математического ожидания будут находиться произведения двух производящих функций в степенях $\Sigma_N(t_0)$ и $\Sigma_N(s_0) - \Sigma_N(t_0)$. При анализе этой формулы следует использовать замечание 1 и следующее соотношение: при $N \to \infty$

$$\left\{ \frac{\Sigma_N(t_0)}{N},\ \frac{\Sigma_N(s_0) - \Sigma_N(t_0)}{N} \,\middle|\, \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} (\mu(t_0),\ \mu(s_0) - \mu(t_0)).$$

Установим сходимость конечномерных распределений процессов, представленных в соотношении (3). Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$. Положим $t_k(N) = \left\lfloor t_k\sqrt{N}\right\rfloor$ при $k \in \{0, \ldots, m\}$. По лемме 7 при $N \to \infty$

$$\left\{ N^{-1}\eta^{(t_1(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor},\ t \geqslant t_1 \,\middle|\, \Sigma = N \right\} \Rightarrow \{\mu(t_1),\ t \geqslant t_1\}.$$

Дословно повторяя доказательство леммы 7, можно установить, что и при каждом $k \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$\left\{ \frac{\eta^{(t_{k+1}(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{N},\ t \geqslant t_{k+1} \,\middle|\, \Sigma = N \right\} \Rightarrow \{\mu(t_{k+1}) - \mu(t_k),\ t \geqslant t_{k+1}\}. \tag{40}$$

Более того, левые части соотношения (40) (всего m случайных процессов) можно объединить в m-мерный случайный процесс, который будет сходиться в смысле конечномерных распределений к m-мерному случайному процессу, составленному из правых частей соотношения (40) (см. по этому поводу замечание 2). В качестве следствия получаем, что при $N \to \infty$

$$\left\{ N^{-1}\left(\eta^{(t_{j+1}(N))}_{t_k(N)} - \eta^{(t_j(N))}_{t_k(N)}\right),\ (j,k) \in A_m \,\middle|\, \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D}$$

$$\{\mu(t_{j+1}) - \mu(t_j),\ (j,k) \in A_m\},$$

где $A_m = \{(j,k) : 0 \leqslant j < k \leqslant m\}$. Откуда, учитывая, что при $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(\eta^{(t_{j+1}(N))}_{t_k(N)} - \eta^{(t_j(N))}_{t_k(N)}\right) = \eta^{(t_k(N))}_{t_k(N)} = \eta_{t_k(N)},$$

получаем, что при $N \to \infty$

$$\left\{ \frac{\eta_{t_1(N)}}{N}, \ldots, \frac{\eta_{t_m(N)}}{N} \,\middle|\, \Sigma = N \right\} \xrightarrow{D} (\mu(t_1), \ldots, \mu(t_m)).$$

Итак, сходимость конечномерных распределений в (3) установлена.

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс U_N:

$$U_N(t) = N^{-1}\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}, \qquad t \geqslant 0.$$

Зафиксируем $u > 0$. Покажем, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty}\mathbf{P}\left(w_{U_N}(\delta; u) \geqslant 6\varepsilon \mid \Sigma = N\right) = 0. \tag{41}$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\delta = u/m$ и $t_k = k\delta$ при $k \in \{0,\ldots,m\}$. Известно (см. следствие теоремы 8.3 из [6]), что

$$\mathbf{P}\left(w_{U_N}(\delta; u) \geqslant 6\varepsilon \mid \Sigma = N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|U_N(t) - U_N(t_k)\right| \geqslant 2\varepsilon \,\middle|\, \Sigma = N\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta_{t_k(N)}\right| \geqslant 2\varepsilon N \,\middle|\, \Sigma = N\right).$$

Заметим, что $k \in \{0,\ldots,m\}$ и $t \geqslant t_k$

$$\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta_{t_k(N)} = \left(\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}\right) + \left(\eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta_{t_k(N)}\right)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta_{t_k(N)}\right| \geqslant 2\varepsilon N \,\middle|\, \Sigma = N\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}\right| \geqslant \varepsilon N \,\middle|\, \Sigma = N\right) +$$
$$+\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta_{t_k(N)}\right| \geqslant \varepsilon N \,\middle|\, \Sigma = N\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(w_{X_N}(\delta; u) \geqslant 6\varepsilon \mid \Sigma = N\right) \leqslant A_1(N,\varepsilon) + A_2(N,\varepsilon), \tag{42}$$

где

$$A_1(N,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\eta_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}\right| \geqslant \varepsilon N \,\middle|\, \Sigma = N\right),$$
$$A_2(N,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}\left(\sup_{t\in[t_k,t_{k+1}]}\left|\eta^{(t_k(N))}_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor} - \eta_{t_k(N)}\right| \geqslant \varepsilon N \,\middle|\, \Sigma = N\right).$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ по лемме 5

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty} A_1(N,\varepsilon) = 0, \tag{43}$$

а по лемме 6

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{N\to\infty} A_2(N,\varepsilon) = 0. \tag{44}$$

Из соотношений (42)–(44) следует (41). Из сходимости конечномерных распределений и (41) вытекает (см. теорему 15.5 из [6]) соотношение (3). Теорема 1 доказана.

3. *Доказательство теоремы* 2. Сначала приведем вспомогательные утверждения. Положим

$$T = \min\{n > 0 : \xi_n = 0\}, \qquad M_0^+ = \sup_{t\in[0,1]} W_0^+(t) = \inf\left\{y \geqslant 0 : l_0^+(y) = 0\right\}.$$

Ясно, что

$$\frac{T}{\sqrt{N}} = \inf\left\{t \geqslant 0 : \frac{\xi_{\lfloor t\sqrt{N}\rfloor}}{\sqrt{N}} = 0\right\}.$$

и ввиду соотношения (2) при $N \to \infty$

$$\left\{\frac{T}{\sqrt{N}} \;\middle|\; \Sigma = N\right\} \xrightarrow{D} \frac{2}{\sigma_1} M_0^+. \tag{45}$$

Нам потребуется следующее обобщение леммы 2, которое доказывается точно так же.

Лемма 8. *Для каждого набора натуральных чисел* $M = (m_1, \ldots, m_k)$ *зададим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона* $\left\{Z_i^{(M)},\ i \in \mathbb{N}_0\right\}$ *с* m_i *иммигрантами в* i*-м поколении*, $1 \leqslant i \leqslant k$. *Относительно производящей функции потомства одной частицы* $\psi(\cdot)$ *предполагается, что она не зависит от* k *и* $\psi'(1) = 1$, $\psi''(1) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$. *Пусть последовательность наборов натуральных чисел* $M_n = \left(m_1^{(n)}, \ldots, m_{i_n}^{(n)}\right)$ *такова, что при* $n \to \infty$

$$\frac{i_n}{n} \to 0, \qquad \frac{k_n}{n} \to \infty,$$

где $\sum_{i=0}^{i_n} m_i^{(n)} = k_n$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\left\{\frac{Z_{\lfloor tn\rfloor}^{(M_n)} - k_n}{\sigma\sqrt{nk_n}},\ t \geqslant 0\right\} \xrightarrow{D} \{W(t),\ t \geqslant 0\}.$$

Следующая лемма доказана в работе [5].

Лемма 9. *Для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *зададим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона* $\left\{Z_n^{(k)},\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$, *начинающийся с* k *частиц. Относительно производящей функции потомства одной частицы* $\psi(\cdot)$ *предполагается, что она не зависит от* k *и* $\psi'(1) = 1$, $\psi''(1) = \sigma^2 \in (0, +\infty)$. *Тогда при всех таких натуральных* n, n_1, n_2, *что* $n_1 < n < n_2$,

$$\mathbf{E}\left(\left|Z_{n_1}^{(k)} - Z_n^{(k)}\right|^\gamma \left|Z_{n_2}^{(k)} - Z_n^{(k)}\right|^\gamma\right) \leqslant L \cdot (n_2 - n_1)^\gamma k^{\gamma/2}\left(kn + k^2\right)^{\gamma/4},$$

где $\gamma = 4/3$, *постоянная* $L > 0$ *не зависит* k, n, n_1, n_2.

Установим соотношение (5). Для каждого $N \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс X_N:

$$X_N(t) = \frac{\eta_{\lfloor tK_N\rfloor} - N}{\sqrt{K_N N}},\ t \geqslant 0.$$

Зафиксируем $v, u > 0$ $(v < u)$. Введем при $a > 0$ случайные события

$$A\left(N, a\right) = \left\{\Sigma = N,\ T \leqslant a\sqrt{N}\right\},$$

$$B\left(N\right) = \left\{N/2 \leqslant \eta_{\lfloor vK_N \rfloor} \leqslant 2N\right\},\ B\left(N, a\right) = A\left(N, a\right) B\left(N\right).$$

Отметим, что в силу соотношения (45)

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(A\left(N, a\right) \mid \Sigma = N\right) = \mathbf{P}\left(\frac{2}{\sigma_1} M_0^+ \leqslant a\right) > 0. \tag{46}$$

Доказательство (5) разобьем на две части.

1) Сначала покажем, что при $N \to \infty$

$$\left\{X_N\left(t\right),\ t \in [v, u] \mid B\left(N, a\right)\right\} \xrightarrow{D} \left\{W\left(t\right),\ t \in [v, u]\right\}. \tag{47}$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$. Введем характеристические функции

$$\widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \widehat{\mathbf{E}} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_N\left(t_k\right)\right),$$

$$\Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_N\left(t_k\right)\right) \;\middle|\; A\left(N, a\right)\right),$$

$$\Theta^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k X_N\left(t_k\right)\right) \;\middle|\; B\left(N, a\right)\right)$$

при $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$\Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \mathbf{E}\left(\widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) \;\middle|\; A\left(N, a\right)\right). \tag{48}$$

Если процесс $\{\xi_n\}$ фиксирован и $\Sigma = N$, $T \leqslant a\sqrt{N}$, то $\sum_{i=1}^{\lfloor a\sqrt{N} \rfloor} \xi_i = N$ и, следовательно, процесс $\{\eta_i,\ i \in \mathbb{N}_0\}$ удовлетворяет условиям леммы 8 и, значит,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\left(\widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) \;\middle|\; A\left(N, a\right)\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right),$$

где

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \mathbf{E}\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k W\left(t_k\right)\right).$$

Откуда, вспоминая (48), находим, что

$$\lim_{N\to\infty} \Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right). \tag{49}$$

Покажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \Theta^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right). \tag{50}$$

Ввиду (49) при $N \to \infty$

$$\left\{\frac{\eta_{\lfloor vK_N \rfloor}}{N} \;\middle|\; A\left(N, a\right)\right\} \xrightarrow{P} 1$$

и, следовательно,
$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\left(B\left(N,a\right)\ \mid\ A\left(N,a\right)\right)=1. \tag{51}$$
Из соотношений (49) и (51) вытекает (50).

Положим при $v\leqslant t_1\leqslant t\leqslant t_2\leqslant u$
$$F_N\left(t,t_1,t_2\right)=\left|X_N\left(t\right)-X_N\left(t_1\right)\right|^{\gamma}\left|X_N\left(t_2\right)-X_N\left(t\right)\right|^{\gamma},$$
где $\gamma=4/3$. Если процесс $\{\xi_n\}$ фиксирован и $T\leqslant a\sqrt{N}$, то при достаточно больших N (таких, что $\lfloor vK_N\rfloor>a\sqrt{N}$) процесс $\{\eta_i,\ i\geqslant\lfloor vK_N\rfloor\}$ представляет собою обычный (без иммиграции) ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона и, значит, по лемме 9
$$\widehat{\mathbf{E}}\left(F_N\left(t,t_1,t_2\right)\ \mid\ \eta_{\lfloor vK_N\rfloor}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{L}{K_N^{\gamma}N^{\gamma}}\left(\lfloor t_2K_N\rfloor-\lfloor t_1K_N\rfloor\right)^{\gamma}\eta_{\lfloor vK_N\rfloor}^{\gamma/2}\left(\eta_{\lfloor vK_N\rfloor}\lfloor tK_N\rfloor+\eta_{\lfloor vK_N\rfloor}^2\right)^{\gamma/4}. \tag{52}$$
Заметим, что
$$\mathbf{E}\left(F_N\left(t,t_1,t_2\right)\ \mid\ B\left(N,a\right)\right)=$$
$$=\mathbf{E}\left(\widehat{\mathbf{E}}\left(\widehat{\mathbf{E}}\left(F_N\left(t,t_1,t_2\right)\ \mid\ \eta_{\lfloor vK_N\rfloor}\right)\ \Big|\ B\left(N\right)\right)\ \Big|\ A\left(N,a\right)\right). \tag{53}$$
Ввиду (52)
$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\widehat{\mathbf{E}}\left(F_N\left(t,t_1,t_2\right)\ \mid\ \eta_{\lfloor vK_N\rfloor}\right)\ \Big|\ B\left(N\right)\right)\leqslant L\left(\frac{\lfloor t_2K_N\rfloor-\lfloor t_1K_N\rfloor}{K_N}\right)^{\gamma}\times$$
$$\times\widehat{\mathbf{E}}\left(\left(\frac{\eta_{\lfloor vK_N\rfloor}}{N}\right)^{\gamma}\left(\frac{N}{\eta_{\lfloor vK_N\rfloor}}\frac{\lfloor uK_N\rfloor}{N}+1\right)^{\gamma/4}\ \Bigg|\ B\left(N\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant L\left(\frac{\lfloor t_2K_N\rfloor-\lfloor t_1K_N\rfloor}{K_N}\right)^{\gamma}2^{\gamma}\left(2\frac{uK_N}{N}+1\right)^{\gamma/4}\leqslant\widetilde{L}\left(t_2-t_1\right)^{\gamma},$$
где $\widetilde{L}=4^{\gamma}\left(2u+1\right)L$ (для определенности можно считать, что $K_N<N$). Откуда ввиду (53) находим, что
$$\mathbf{E}\left(F_N\left(t,t_1,t_2\right)\ \mid\ B\left(N,a\right)\right)\leqslant\widetilde{L}\left(t_2-t_1\right)^{\gamma}. \tag{54}$$
Из соотношений (50), (54) по теореме 15.6 из [6] получаем (47).

2) Покажем, что при $N\to\infty$
$$\left\{X_N\left(t\right),\ t\in[v,u]\ \mid\ \Sigma=N\right\}\xrightarrow{D}\left\{W\left(t\right),\ t\in[v,u]\right\}. \tag{55}$$
Для борелевского множества A пространства $D\left[v,u\right]$ с метрикой Скорохода введем случайное событие
$$D\left(N,A\right)=\left\{\left\{X_N\left(t\right),\ t\in[v,u]\right\}\in A\right\}.$$
Для справедливости (55) достаточно показать, что
$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\left(D\left(N,A\right)\ \mid\ \Sigma=N\right)=\mathbf{P}\left(\left\{W\left(t\right),\ t\in[v,u]\right\}\in A\right) \tag{56}$$
для произвольного W-непрерывного борелевского множества A пространства $D\left[v,u\right]$.

При $a > 0$ запишем представление

$$\mathbf{P}\left(D(N,A) \mid \Sigma = N\right) = \sum_{i=1}^{4} P_i(N,a), \tag{57}$$

где

$$P_1(N,a) = \mathbf{P}\left(D(N,A),\ T \leqslant a\sqrt{N},\ B(N) \,\Big|\, \Sigma = N\right),$$

$$P_2(N,a) = \mathbf{P}\left(D(N,A),\ T \leqslant a\sqrt{N},\ \eta_{\lfloor vK_N \rfloor} < N/2 \,\Big|\, \Sigma = N\right),$$

$$P_3(N,a) = \mathbf{P}\left(D(N,A),\ T \leqslant a\sqrt{N},\ \eta_{\lfloor vK_N \rfloor} > 2N \,\Big|\, \Sigma = N\right),$$

$$P_4(N,a) = \mathbf{P}\left(D(N,A),\ T > a\sqrt{N} \,\Big|\, \Sigma = N\right).$$

В силу соотношения (46)

$$\lim_{a\to+\infty} \limsup_{N\to\infty} P_4(N,a) = 0. \tag{58}$$

Далее, учитывая (46) и (51), находим, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(T \leqslant a\sqrt{N},\ B(N) \,\Big|\, \Sigma = N\right) = \mathbf{P}\left(\frac{2}{\sigma_1} M_0^+ \leqslant a\right), \tag{59}$$

$$\lim_{a\to+\infty} \lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(B(N,a) \mid \Sigma = N\right) = 1. \tag{60}$$

Из (59) следует, что

$$\lim_{a\to+\infty} \limsup_{N\to\infty} P_2(N,a) = 0, \tag{61}$$

$$\lim_{a\to+\infty} \limsup_{N\to\infty} P_3(N,a) = 0. \tag{62}$$

Наконец,

$$P_1(N,a) = \mathbf{P}\left(D(N,A) \mid B(N,a)\right) \mathbf{P}\left(B(N,a) \mid \Sigma = N\right).$$

Поэтому (ввиду соотношений (47) и (60))

$$\lim_{a\to+\infty} \lim_{N\to\infty} P_1(N,a) = \mathbf{P}\left(\{W(t),\ t \in [v,u]\} \in A\right). \tag{63}$$

Из соотношений (57)–(58), (61)–(63) следуют (56) и, значит, (55).

Справедливость соотношения (55) при фиксированном $v > 0$ и произвольном u, превосходящем v, означает, что при $N \to \infty$

$$\left\{\{X_N(t),\ t \in [v,+\infty)\} \mid \Sigma = N\right\} \xrightarrow{D} \{W(t),\ t \in [v,+\infty)\}.$$

Таким образом, соотношение (5) установлено.

Установим соотношение (4). Выберем произвольное $u > 0$. Обозначим через $\overline{0}$ функцию, равную нулю при всех $t \geqslant u$. Пусть A – произвольное борелевское множество пространства $D[u,+\infty)$. Сначала рассмотрим случай, когда $\overline{0} \notin A$. Запишем представление

$$\mathbf{P}\left(\left\{\xi_{\lfloor tK_N \rfloor},\ t \geqslant u\right\} \in A \,\Big|\, \Sigma = N\right) = R_1(N,a) + R_2(N,a), \tag{64}$$

где

$$R_1(N,a) = \mathbf{P}\left(\left\{\xi_{\lfloor tK_N \rfloor},\ t \geqslant u\right\} \in A,\ T \leqslant a\sqrt{N}\ \middle|\ \Sigma = N\right),$$

$$R_2(N,a) = \mathbf{P}\left(\left\{\xi_{\lfloor tK_N \rfloor},\ t \geqslant u\right\} \in A,\ T > a\sqrt{N}\ \middle|\ \Sigma = N\right).$$

Если $T \leqslant a\sqrt{N}$, то при достаточно больших N (таких, что $\lfloor uK_N \rfloor > a\sqrt{N}$) $\xi_{\lfloor tK_N \rfloor} = 0$ при всех $t \geqslant u$, поэтому для таких N

$$R_1(N,a) = 0. \tag{65}$$

Далее, ввиду (46)

$$\lim_{a\to+\infty} \limsup_{N\to\infty} R_2(N,a) = 0. \tag{66}$$

Из соотношений (64)-(66) следует, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\xi_{\lfloor tK_N \rfloor},\ t \geqslant u\right\} \in A\ \middle|\ \Sigma = N\right) = 0 = \mathbf{P}\left(\overline{0} \in A\right).$$

В случае, когда $\overline{0} \in A$, аналогично доказывается, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(\left\{\xi_{\lfloor tK_N \rfloor},\ t \geqslant u\right\} \in A\ \middle|\ \Sigma = N\right) = 1 = \mathbf{P}\left(\overline{0} \in A\right).$$

Итак, соотношение (4) установлено.

4. *Доказательство теоремы* 3. Нам потребуется следующая функциональная предельная теорема, установленная Феллером, Ламперти и Линдваллом (см. теорему 2.3 работы [4] и теорему 2 работы [5]).

Лемма 10. *В условиях леммы* 2 *при* $n \to \infty$

$$\left\{\frac{Z^{(n)}_{\lfloor nt \rfloor}}{n},\ t \geqslant 0\right\} \xrightarrow{D} \left\{Y(bt),\ t \geqslant 0\right\},$$

где $b = \sigma^2/2$, $Y(0) = 1$.

Установим соотношение (7). Для каждого $N \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс Y_N:

$$Y_N(t) = \frac{\eta_{\lfloor tN \rfloor}}{N},\ t \geqslant 0.$$

Зафиксируем $v, u > 0$ $(v < u)$. Положим, как и ранее, при $a > 0$

$$A(N,a) = \left\{\Sigma = N,\ T \leqslant a\sqrt{N}\right\}$$

и введем при $a, d > 0$ случайные события

$$B(N,d) = \left\{\eta_{\lfloor vN \rfloor} \leqslant dN\right\},\ B(N,a,d) = A(N,a)\,D(N,d).$$

Отметим, что доказательство соотношения (7) структурно напоминает доказательство соотношения (5). Разобьем его также на две части.

1) Покажем, что при $N \to \infty$

$$\left\{Y_N(t),\ t \in [v,u]\ \middle|\ B(N,a,d)\right\} \xrightarrow{D} \left\{Y(bt),\ t \in [v,u]\ \middle|\ Y(bv) \leqslant d\right\}. \tag{67}$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_m$ $(v \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$. Положим при $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$

$$\widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \widehat{\mathbf{E}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y_N(t_k)\right),$$

$$\Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y_N(t_k)\right) \;\middle|\; A(N,a)\right),$$

$$\Theta^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y_N(t_k)\right) \;\middle|\; B(N,a,d)\right).$$

Заметим, что

$$\Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E}\left(\widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \;\middle|\; A(N,a)\right). \tag{68}$$

Положим $a_N = \left\lfloor a\sqrt{N} \right\rfloor$ и $t_k(N) = \lfloor t_k N \rfloor$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. Если $\Sigma = N$ и $T \leqslant a_N$, то $\sum_{n=1}^{a_N} \xi_n = N$ и при достаточно больших N (таких, что $\lfloor vN \rfloor > a\sqrt{N}$)

$$\widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{i=0}^{a_N} \psi^{\xi_i}_{t_1(N)-i,\ldots,t_m(N)-i}\left(e^{-\lambda_1/N}, \ldots, e^{-\lambda_m/N}\right)$$

(определение $\psi_{n_1,\ldots,n_m}(s_1, \ldots, s_m)$ дано в лемме 1). Откуда, учитывая лемму 1, находим, что если $\Sigma = N$ и $T \leqslant a_N$, то

$$\psi^{N}_{t_1(N)-a_N,\ldots,t_m(N)-a_N}\left(e^{-\lambda_1/N}, \ldots, e^{-\lambda_m/N}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \leqslant \psi^{N}_{t_1(N),\ldots,t_m(N)}\left(e^{-\lambda_1/N}, \ldots, e^{-\lambda_m/N}\right). \tag{69}$$

Положим при $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geqslant 0$

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y(bt_k)\right)\right).$$

На основании леммы 10

$$\lim_{N\to\infty} \psi^{N}_{t_1(N),\ldots,t_m(N)}\left(e^{-\lambda_1 b_N}, \ldots, e^{-\lambda_m b_N}\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \tag{70}$$

и, поскольку $a_N/N \to 0$ при $N \to \infty$,

$$\lim_{N\to\infty} \psi^{N}_{t_1(N)-a_N,\ldots,t_m(N)-a_N}\left(e^{-\lambda_1 b_N}, \ldots, e^{-\lambda_m b_N}\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m). \tag{71}$$

Из соотношений (69)-(71) вытекает, что если $\Sigma = N$ и $T \leqslant a_N$, то

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{\Psi}^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m). \tag{72}$$

Применяя (72) к соотношению (68), получаем, что

$$\lim_{N\to\infty} \Psi^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m). \tag{73}$$

В качестве следствия находим, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left(B\left(N,a,d\right) \mid A\left(N,a\right)\right) = \mathbf{P}\left(Y\left(bv\right) \leqslant d\right) > 0. \tag{74}$$

Поскольку

$$\Theta^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right) = \left(\mathbf{P}\left(B\left(N,a,d\right) \mid A\left(N,a\right)\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k Y_N\left(t_k\right)\right) I_{B(N,d)} \;\middle|\; A\left(N,a\right)\right),$$

то ввиду (73) и (74)

$$\lim_{N\to\infty} \Theta^{(N)}_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_m\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k Y\left(t_k\right)\right) \;\middle|\; Y\left(bv\right) \leqslant d\right), \tag{75}$$

т.е. сходимость конечномерных распределений в (67) установлена.

Положим при $v \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant v$

$$G_N\left(t,t_1,t_2\right) = \left|Y_N\left(t\right) - Y_N\left(t_1\right)\right|^{\gamma}\left|Y_N\left(t_2\right) - Y_N\left(t\right)\right|^{\gamma},$$

где $\gamma = 4/3$. Если процесс $\{\xi_n\}$ фиксирован и $T \leqslant a\sqrt{N}$, то при достаточно больших N (таких, что $\lfloor vN\rfloor > a\sqrt{N}$) процесс $\{\eta_i,\ i \geqslant \lfloor vN\rfloor\}$ представляет собою обычный (без иммиграции) ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона и, следовательно, по лемме 9

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(G_N\left(t,t_1,t_2\right) \mid \eta_{\lfloor vN\rfloor}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{N^{2\gamma}}\left(\lfloor t_2N\rfloor - \lfloor t_1N\rfloor\right)^{\gamma} \eta^{\gamma/2}_{\lfloor vN\rfloor}\left(\eta_{\lfloor vN\rfloor}\lfloor tN\rfloor + \eta^2_{\lfloor vN\rfloor}\right)^{\gamma/4}. \tag{76}$$

Поскольку

$$\mathbf{E}\left(G_N\left(t,t_1,t_2\right) \mid B\left(N,a,d\right)\right) =$$
$$= \mathbf{E}\left(\widehat{\mathbf{E}}\left(\widehat{\mathbf{E}}\left(G_N\left(t,t_1,t_2\right) \mid \eta_{\lfloor vN\rfloor}\right) \;\middle|\; B\left(N,d\right)\right) \;\middle|\; A\left(N,a\right)\right),$$

то ввиду (76)

$$\widehat{\mathbf{E}}\left(\widehat{\mathbf{E}}\left(G_N\left(t,t_1,t_2\right) \mid \eta_{\lfloor vN\rfloor}\right) \;\middle|\; B\left(N,d\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{N^{2\gamma}}\left(\lfloor t_2N\rfloor - \lfloor t_1N\rfloor\right)^{\gamma}\left(dN\right)^{\gamma/2}\left(duN^2 + d^2N^2\right)^{\gamma/4} \leqslant$$
$$\leqslant L\left(\frac{\lfloor t_2N\rfloor - \lfloor t_1N\rfloor}{N}\right)^{\gamma} d^{\gamma/2}\left(2du + d^2\right)^{\gamma/4} \leqslant \widetilde{L}\left(t_2 - t_1\right)^{\gamma},$$

где $\widetilde{L} = 2^{\gamma}d^{\gamma/2}\left(2du + d^2\right)^{\gamma/4} L$, и, значит,

$$\mathbf{E}\left(G_N\left(t,t_1,t_2\right) \mid B\left(N,a,d\right)\right) \leqslant \widetilde{L}\left(t_2 - t_1\right)^{\gamma}. \tag{77}$$

Из соотношений (75), (77) следует (67).

2) Покажем, что при $N \to \infty$

$$\left\{\left\{Y_N\left(t\right),\ t \in [v,u]\right\} \mid \Sigma = N\right\} \stackrel{D}{\to} \left\{Y\left(bt\right),\ t \in [v,u]\right\}. \tag{78}$$

Для борелевского множества A пространства $D\,[v,u]$ с метрикой Скорохода введем случайное событие

$$D\,(N,A) = \{\{Y_N\,(t)\,,\ t\in[v,u]\}\in A\}\,.$$

Покажем, что

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\,(\,D\,(N,A)\ \mid\ \Sigma=N) = \mathbf{P}\,(\{W\,(t)\,,\ t\in[v,u]\}\in A) \tag{79}$$

для произвольного W-непрерывного борелевского множества A пространства $D\,[v,u]$.

При $a,d>0$ запишем представление

$$\mathbf{P}\,(\,D\,(N,A)\ \mid\ \Sigma=N) = P_1\,(N,a,d) + P_2\,(N,a,d) + P_3\,(N,a)\,, \tag{80}$$

где

$$P_1\,(N,a,d) = \mathbf{P}\left(D\,(N,A)\,,\ T\leqslant a\sqrt{N},\ \eta_{\lfloor vN\rfloor}\leqslant dN\ \middle|\ \Sigma=N\right),$$

$$P_2\,(N,a,d) = \mathbf{P}\left(D\,(N,A)\,,\ T\leqslant a\sqrt{N},\ \eta_{\lfloor vN\rfloor}> dN\ \middle|\ \Sigma=N\right),$$

$$P_3\,(N,a) = \mathbf{P}\left(D\,(N,A)\,,\ T> a\sqrt{N}\ \middle|\ \Sigma=N\right).$$

В силу соотношения (46)

$$\lim_{a\to+\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbf{P}\,(\,A\,(N,a)\ \mid\ \Sigma=N) = 1 \tag{81}$$

и, следовательно,

$$\lim_{a\to+\infty}\limsup_{N\to\infty}P_3\,(N,a) = 0. \tag{82}$$

Далее,

$$\mathbf{P}\,(\,B\,(N,a,d)\ \mid\ \Sigma=N) = \mathbf{P}\,(\,B\,(N,a,d)\ \mid\ A\,(N,a))\,\mathbf{P}\,(\,A\,(N,a)\ \mid\ \Sigma=N)\,.$$

Откуда, учитывая (46) и (74), находим, что

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbf{P}\,(\,B\,(N,a,d)\ \mid\ \Sigma=N) = \mathbf{P}\,(Y\,(bv)\leqslant d)\,\mathbf{P}\left(\frac{2}{\sigma_1}M_0^+\leqslant a\right) \tag{83}$$

и, следовательно,

$$\lim_{a,d\to+\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbf{P}\,(\,B\,(N,a,d)\ \mid\ \Sigma=N) = 1. \tag{84}$$

Из (81) и (84) следует, что

$$\lim_{a,d\to+\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbf{P}\left(T\leqslant a\sqrt{N},\ \eta_{\lfloor vN\rfloor}> dN\ \middle|\ \Sigma=N\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{a,d\to+\infty}\limsup_{N\to\infty}P_2\,(N,a) = 0. \tag{85}$$

Наконец, заметим, что

$$P_1\,(N,a,d) = \mathbf{P}\,(\,D\,(N,A)\ \mid\ B\,(N,a,d))\,\mathbf{P}\,(\,B\,(N,a,d)\ \mid\ \Sigma=N)\,.$$

Откуда ввиду соотношений (67) и (83)

$$\lim_{a,d\to+\infty}\lim_{N\to\infty}P_1\,(N,a,d) = \mathbf{P}\,(\{Y\,(bt)\,,\ t\in[v,u]\}\in A)\,. \tag{86}$$

Из соотношений (80), (82), (85) и (86) получаем (79) и, значит, (78).

Справедливость соотношения (78) для произвольных положительных v,u означает справедливость (7). Соотношение (6) доказывается точно так же, как и соотношение (4). Теорема доказана.

Список литературы

1. Ватутин В.А., Дьяконова Е.Е., “Разложимые ветвящиеся процессы с фиксированным моментом вырождения”, *Тр. МИАН*, **290**:3 (2015) (в печати).
2. Колчин В.Ф., *Случайные отображения*, М.: Наука, 1984.
3. Drmota M., “On the profile of random trees”, *Random Struct. Alg.*, **10**:4 (1997), 421-451.
4. Lamperti J., “Limiting distributions for branching processes”, Univ. California Press., Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab., 1967, 225-241.
5. Lindvall T., “Convergence of critical Galton-Watson branching processes”, *J. Appl. Probab.*, **9**:2 (1972), 445-450.
6. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер*, М.: Наука, 1977.

Статья поступила 28.04.2015.