

В. Я. ГУТЛЯНСКИЙ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 III 1970)

Пусть S — класс всех голоморфных однолистных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ функций $w = f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

В настоящей работе мы приводим решение задачи о параметрическом представлении класса S , устанавливая необходимые и достаточные условия принадлежности функции $w = f(z)$ классу S . Далее указываем на одно из приложений полученного результата к решению экстремальных задач теории однолистных функций и отмечаем связь между экстремальными проблемами в классе S и классе P всех голоморфных в круге E функций $w = h(z)$, $h(0) = 1$, с положительной действительной частью.

1. Пусть \mathfrak{M} — класс всех неубывающих функций $\mu(x, y)$ двух переменных в области $x \geq 0$, $-\pi \leq y \leq \pi$, нормированных условиями $\mu(x, -\pi) = \mu(0, y) = 0$, $\mu(x, \pi) = x$.

Непосредственно из определения класса \mathfrak{M} следует, что при каждом фиксированном y , $-\pi \leq y \leq \pi$, функции $\mu(x, y)$ являются абсолютно непрерывными по x и, следовательно, почти при всех x , $x > 0$, существует производная $\mu_x'(x, y)$, представляющая собой измеримую функцию переменного x при каждом фиксированном значении y , и неубывающую функцию переменного y , $-\pi \leq y \leq \pi$, при фиксированном x , $x > 0$, нормированную условием $\mu_x'(x, -\pi) = 0$, $\mu_x'(x, \pi) = 1$.

Будем говорить, что последовательность $\mu_n(x, y)$ ($n = 1, 2, \dots$) функций класса \mathfrak{M} сходится к функции $\mu(x, y) \in \mathfrak{M}$, если во всех точках непрерывности функции $\mu(x, y)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$.

Класс \mathfrak{M} является компактным в себе относительно определенной выше сходимости последовательности функций из \mathfrak{M} .

Обозначим через Φ множество всех непрерывных функций $f(z, x, y)$ в области $E \times [0, \infty) \times [-\pi, \pi]$, аналитических по z в круге E и удовлетворяющих условию $|f(z, x, y)| \leq e^{-x}K(r)$, где $K(r)$ — постоянная, зависящая только от $r = |z| < 1$.

Пусть $f(z, x, y)$ — произвольная функция класса Φ и μ_n — произвольная последовательность функций класса \mathfrak{M} , сходящаяся к функции $\mu(x, y) \in \mathfrak{M}$. Тогда:

1) существует равномерный относительно x , $0 \leq x \leq A$, и $z \in E_r = \{z: |z| < r < 1\}$ предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \int_{-\pi}^{\pi} f(z, x, y) d\mu_n(x, y) = \int_0^x \int_{-\pi}^{\pi} f(z, x, y) d\mu(x, y);$$

2) интегралы Стильгеса

$$\int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z, x, y) d\mu(x, y), \quad \mu \in \mathfrak{M},$$

сходятся равномерно внутри E , равномерно по классу \mathfrak{M} .

Отсюда непосредственно следует существование равномерного внутри E предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z, x, y) d\mu_n(x, y) = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(z, x, y) d\mu(x, y).$$

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dx} = -w \int_{-\pi}^{\pi} g(w, y) d\mu'_x(x, y), \quad (1)$$

где $g(w, y) = (1 + e^{iy}w) / (1 - e^{iy}w)$, с начальным условием $w(x)|_{x=0} = z$, $z \in E$. Здесь функция $\mu(x, y) \in \mathfrak{M}$ и интеграл в (1) понимается в смысле Стильтьеса.

Решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию, будем обозначать через $f(z, x; \mu)$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы функция $w = f(z)$ принадлежала классу S , необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде*

$$f(z) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{xf}(z, x; \mu), \quad \mu \in \mathfrak{M}. \quad (2)$$

Наметим ход доказательства теоремы 1. Пусть $\mu(x, y)$ — произвольная функция класса \mathfrak{M} . Заменим уравнение (1) с начальным условием интегральным уравнением

$$w = z \exp \left\{ - \int_0^x \int_{-\pi}^{\pi} g(w, y) d\mu(x, y) \right\}, \quad (3)$$

которое получается из (1) делением на w и интегрированием по x от 0 до x . Решая (3) методом последовательных приближений (ср., например, (1), стр. 96—97), находим, что решение $w = f(z, x; \mu)$ уравнения (3) регулярно в круге E и непрерывно в $0 < x < \infty$, и, кроме того, $f(0, x; \mu) = 0$, $f'_z(0, x; \mu) = e^{-x}$.

В силу легко доказываемой теоремы единственности решения уравнения (1) следует, что функция $f(z, x; \mu)$ однолистка в E при каждом фиксированном значении x из $[0, \infty)$. Остается установить существование равномерного по z внутри E предела (2). Для этого подставим $f(z, x; \mu)$ в уравнение (1) и перепишем его в виде

$$[e^{xf}(z, x; \mu)]'_x = e^{xf}(z, x; \mu) [1 - g(f(z, x; \mu), y)], \quad (4)$$

заметив при этом, что функция, стоящая в правой части уравнения (4), принадлежит классу Φ^* .

Интегрируя (4) по x от 0 до x и осуществляя предельный переход при x , стремящемся к бесконечности, приходим к заключению, что функция $f(z)$, полученная по формуле (2), принадлежит классу S .

Пусть теперь $f(z)$ — произвольная функция класса S . Покажем, что она может быть получена по формуле (2) с надлежащим образом выбранной функцией $\mu(x, y)$ из класса \mathfrak{M} . Для этого обозначим через \mathfrak{M}' подкласс класса \mathfrak{M} функций $\mu(x, y)$ таких, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(w, y) d\mu'_x(x, y) = g(w, y(x)).$$

По теореме Левнера (2) (см. также (1), стр. 95) совокупность функций $f(z)$, полученных по формуле (2), когда $\mu(x, y)$ пробегает класс \mathfrak{M}' , образует подкласс S' класса S , всюду плотный в S относительно равномерной сходимости внутри круга E .

* Что следует из оценок $|f(z, x; \mu)| \leq |z|$, $|f'_z(z, x; \mu)| \leq e^{-x}|z| / (1 - |z|)^2$.

Выберем последовательность $f_n(z)$ функций класса S' , равномерно внутри E сходящуюся к функции $f(z)$. Последовательности $f_n(z)$ соответствует последовательность $\mu_n(x, y)$ функций класса \mathfrak{M}' такая, что $f_n(z) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} f(z, x; \mu_n)$.

Из $\mu_n(x, y)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в отмеченном ранее смысле к некоторой функции $\mu^*(x, y)$ класса \mathfrak{M} . Теперь, используя предложения п. 1, нетрудно показать, что сама функция $f(z)$ может быть получена по формуле (2) при $\mu = \mu^*$.

Из теоремы Рисса — Херглота (3) следует, что функция

$$h(w, x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(w, y) d\mu'_x(x, y), \quad \mu \in \mathfrak{M}, \quad (5)$$

при каждом фиксированном $x, 0 < x < \infty$, регулярна по w в круге $|w| < 1$ и имеет там положительную действительную часть. Следовательно, из известного дифференциального уравнения К. Левнера — П. П. Куфарова (4) и соотношения (2) можно получить все функции класса S .

3. Из тождества

$$dw/dx = -wh(w, x), \quad w = f(z, x; \mu), \quad (6)$$

где $h(w, x)$ вычисляется по формуле (5), с учетом (2), немедленно следуют необходимые для дальнейших рассуждений соотношения в классе S :

$$f(z) = z \exp \left\{ \int_0^{|z|} \frac{1 - F(w, \rho)}{\operatorname{Re} F(w, \rho)} \frac{d\rho}{\rho} \right\}, \quad (7)$$

$$f'(z) = \exp \left\{ \int_0^{|z|} \frac{1 - F(w, \rho) - wF'_w(w, \rho)}{\operatorname{Re} F(w, \rho)} \frac{d\rho}{\rho} \right\}. \quad (8)$$

Здесь $F(w, \rho) = h(f(z, x(\rho); \mu), x(\rho))$, $\rho = |f(z, x; \mu)|^*$.

Теорема 2. Пусть z_0 — фиксированная точка круга E и $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные вещественные числа. Тогда для функционала

$$I(f) = \alpha \ln \left| \frac{f(z_0)}{z_0} \right| + \beta \arg \frac{f(z_0)}{z_0} + \gamma \ln |f'(z_0)| + \delta \arg f'(z_0), \quad (9)$$

определенного на классе S , имеют место точные оценки

$$\int_0^{|z_0|} \varphi(\xi^-, \eta^-) \frac{d\rho}{\rho} \leq I(f) \leq \int_0^{|z_0|} \varphi(\xi^+, \eta^+) \frac{d\rho}{\rho}, \quad (10)$$

где (ξ^\pm, η^\pm) — точки окружности $\xi^2 - 2a(\rho)\xi + \eta^2 + 1 = 0$, $a = (1 + \rho^2)(1 - \rho^2)^{-1}$, в которых функция

$$\varphi(\xi, \eta) = a - \alpha - \gamma + (\alpha + \gamma) / \xi - \gamma \xi - \eta(\delta + (\beta + \delta) / \xi) \quad (11)$$

достигает своего максимального (минимального) значения.

Знак равенства в (10) реализуется, например, для функций $f(z)$ класса S , имеющих вид $f(z) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2} f(z, x)$, где $w = f(z, x)$ — решение уравнения $w_x' = -wg(w, y^\pm(x))$, $w(0) = z$, причем

$$y^\pm(x) = \arcsin \eta^\pm [\xi^\pm (a^2 - 1)^{1/2}]^{-1} + \int_0^x \eta^\pm dx - \arg z_0,$$

и $\rho = \rho(x)$ определяется из соотношения $(\ln \rho)_{x'} = -\xi^\pm$, $\rho(0) = |z_0|$.

* Из (6) следует, что $\rho(x)$ — монотонно убывающая функция, так как $(\ln \rho)_{x'} = -\operatorname{Re} h < 0$.

Из формул (7), (8) следует, что задача об оценке функционала $I(f)$ вида (9) на классе S эквивалентна нахождению экстремума действительного функционала $J(h) = \Psi(h(z), zh'(z)) / \operatorname{Re} h(z)$, $z = \rho e^{i\varphi} \in E$ и фиксировано, где $\Psi(\omega, w) = (\alpha + \gamma)(1 - \operatorname{Re} \omega) - (\beta + \delta) \operatorname{Im} \omega - \gamma \operatorname{Re} w - \delta \operatorname{Im} w$, на классе P (см. по этому вопросу работы (⁵, ⁶)) и последующего интегрирования результата по ρ от 0 до $|z_0|$. Подобная связь между экстремальными проблемами классов S и P имеет место и для других задач теории функций комплексного переменного.

Донецкий вычислительный центр
Академии наук УССР

Поступило
18 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966. ² K. Löwner, Math. Ann., 89, 103 (1923). ³ G. Herglotz, Leipz. Ber., 63 (1911). ⁴ П. П. Куфарев, Матем. сборн., 13 (55), 1, 87 (1943). ⁵ В. А. Зморевич, Укр. матем. журн., 17, № 4, 12 (1965). ⁶ И. А. Александров, В. Я. Гутлянский, ДАН, 165, № 5, 983 (1965).