Б.М.Соломяк

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ. БЕСКООРДИНАТНЫЙ ПОДХОД

§ I. Простейшие свойства диссипативных операторов.
§ 2. Дефектные подпространства. Характеристическая функция.
§ 3. Самосопряженная дилатация.
§ 4. Функциональные вложения. Модель.
§ 5. Пример. Оператор Шредингера.

Предлагаемая статья основана на нескольких докладах, прочитанных весной 1988 г. на семинаре по функциональной модели. Она носит, в основном, методический характер. Сделана попытка последовательно реализовать подход к диссипативным операторам как к преобразованиям Кэли сжатий на основе "бескоординатной модели", развитой В.И.Васюниным и Н.К.Никольским [I] .

В § I собраны хорошо известные свойства диссипативных операторов. В § 2 вводится понятие граничных пространств и вычисляется характеристическая функция, "привязанная" к этим пространствам. Этот подход, навеянный работами А.В.Штрауса, удобен для анализа операторов с конечными индексами дефекта. В § 3 строится самосопряженная дилатация как преобразование Кэли стандартной унитарной дилатации сжатия. Отсюда, как частные случаи, выводятся различные виды дилатации, имеющиеся в литературе (Б.С.Павлова [2], [3], С.Н.Набоко [4] , А.В.Кужеля, Ю.Л.Кудряшова [5], [6], [7]). Отметим, что в упомянутых работах дилатации как бы "угадываются". По-видимому, новой является форма дилатации, обобщающая дилатацию Б.С.Павлова [2] оператора Шредингера на полуоси с вещественнозначным потенциалом и диссипативным краевым условием. В § 4 строится бескоординатная модель для диссипативных операторов на основе построенных дилатаций. Выводятся формулы для собственных функций непрерывного спектра, обобщающие случай вышеупомянутого оператора Шредингера. В § 5 на примере этого оператора (методом, отличным от работы [2]) показано, как строится дилатация, вычисляется характеристическая функция и собственные функции дилатации.

Я хочу поблагодарить Н.К.Никольского за стимулирующие обсуждения и В.И.Васюнина за многочисленные консультации и большую помощь в освоении модели.

<u>Обозначения и терминология</u> $\mathbb{R}_{\pm} = \{ x \in \mathbb{R} : \pm x > 0 \}$,

$\mathbb{C}_\pm = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}_\pm \}$, $\mathbb{D}$ – единичный круг. Будут рассматриваться линейные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H , не обязательно ограниченные и не обязательно плотно определенные. Если L – такой оператор, то $\mathcal{D}(L)$ – его область определения, $\operatorname{Ran} L = L\mathcal{D}(L)$ – образ оператора, $\sigma(L)$ – спектр, т.е. дополнение множества λ таких, что $(L-\lambda I)^{-1}$ продолжается до непрерывного оператора в H . Говорят, что оператор L_2 есть расширение L_1 , и пишут $L_1 \subset L_2$, если $\mathcal{D}(L_1) \subset \mathcal{D}(L_2)$, $L_2 | \mathcal{D}(L_1) = L_1$. Через $H^2(\mathbb{D}, \varepsilon)$, $H^2(\mathbb{C}_\pm, \varepsilon)$ будем обозначать векторные пространства Харди (со значениями в гильбертовом пространстве ε) соответственно в круге и в полуплоскости. Будут использоваться (гильбертовы) соболевские пространства $W_2^1(a,b)$, $W_2^2(a,b)$. Жирными буквами, например, $\mathbf{z}$, будем обозначать операторы умножения на соответствующую функцию. Знак clos обозначает замыкание, а Span – замкнутую линейную оболочку.

§ I. Простейшие свойства диссипативных операторов

I.I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор L_0 в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $\mathcal{D}(L_0)$ называется диссипативным, если

$$\operatorname{Im}(L_0 x, x) \geq 0, \quad x \in \mathcal{D}(L_0). \tag{I.I}$$

Сложность состоит в том, что оператор L_0 может быть неограничен. Хотелось бы внести знак Im в скалярное произведение и написать $\operatorname{Im} L_0 \geq 0$. Но оператор $\operatorname{Im} L_0 = (L_0 - L_0^*)/2i$ может не существовать, т.к. вообще говоря $\mathcal{D}(L_0) \neq \mathcal{D}(L_0^*)$ (см. пример ниже).

I.2. ПРИМЕР. Пусть $H = L^2(0,1)$,

$$Ly = -y'', \quad \mathcal{D}(L) = \{ y \in W_2^2(0,1) : y'(0) = h_0 y(0), \ y'(1) = h_1 y(1) \} .$$

Имеем

$$\operatorname{Im}(Ly, y) = -\operatorname{Im} \int_0^1 y''(t) \bar{y}(t)\, dt = -\operatorname{Im} y' \bar{y} \Big|_0^1 = -\operatorname{Im} h_1 \cdot |y(1)|^2 + \operatorname{Im} h_0 \cdot |y(0)|^2 .$$

Если $\operatorname{Im} h_0 \geq 0$, $\operatorname{Im} h_1 \leq 0$, то оператор L диссипативен. Вычисляя сопряженный оператор (см., например, [8]), находим

$$L^* y = -y'',$$

$$\mathcal{D}(L^*) = \{ y \in W_2^2(0,1) : y'(0) = \bar{h}_0 y(0), \ y'(1) = \bar{h}_1 y(1) \} .$$

Если $h_0, h_1 \in \mathbb{R}$, то оператор L самосопряжен. Если хотя бы одно из чисел h_0, h_1 не вещественно, $\operatorname{Im} h_0 \geq 0$, $\operatorname{Im} h_1 \leq 0$, то L – замкнутый диссипативный оператор. Пространства $\mathcal{D}(L)$ и $\mathcal{D}(L^*)$ различны. При этом на $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$, очевидно, $L = L^*$, так что говорить о мнимой части оператора затруднительно.

Заметим, что обычно при анализе дифференциальных операторов вначале задается оператор L_0 на гладких функциях, а L определяется, как его замыкание. Точное нахождение области определения $\mathcal{D}(L)$ не всегда просто.

I.3. <u>Частный случай</u>. Пусть $L = A + iB$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, $A = A^*$, $(Bx, x) \geq 0$, $x \in \mathcal{D}(A)$; $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(A)$. Тогда оператор L диссипативен.

I.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Диссипативный оператор называется максимальным диссипативным, если он не имеет собственных диссипативных расширений.

I.5. ЛЕММА (свойства диссипативных операторов) [9, § IУ.4]

(i) Пусть оператор L_0 диссипативен. Тогда оператор $T_0 = \mathcal{K}(L_0) \overset{def}{=\!=} (L_0 - iI)(L_0 + iI)^{-1}$ является сжатием из $(L_0 + iI)\mathcal{D}(L_0)$ на $(L_0 - iI)\mathcal{D}(L_0)$, и $L_0 = \mathcal{K}^{-1}(T_0) = i(I + T_0)(I - T_0)^{-1}$. Для всякого сжатия T_0 такого, что $1 \notin \sigma_p(T_0)$ ($\sigma_p(\cdot)$ – точечный спектр оператора) оператор $L_0 = \mathcal{K}^{-1}(T_0)$, $\mathcal{D}(L_0) = (I - T_0)\mathcal{D}(T_0)$, является диссипативным.

(ii) Всякий диссипативный оператор L_0 обладает максимальным диссипативным расширением L. Максимальный диссипативный оператор замкнут.

(iii) Диссипативный оператор является максимальным диссипативным в том и только том случае, если $T = \mathcal{K}(L)$ – такое сжатие, что $\mathcal{D}(T) = H$ и $1 \notin \sigma_p(T)$.

(iv) Если L – максимальный диссипативный оператор, $L = \mathcal{K}^{-1}(T)$, то $-L^*$ также максимальный диссипативный, $L^* = -\mathcal{K}^{-1}(T^*)$.

(v) Если L – максимальный диссипативный оператор, то $\sigma(L) \subset \operatorname{clos} \mathbb{C}_+$ $\|(L - \lambda I)^{-1}\| \leq |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}_-$.

<u>Терминология</u>. Преобразование $\mathcal{K}$ называется преобразованием Кэли.

I.6. ПРИМЕР. Пусть $H = L^2(0, a)$,

$$Ly = iy', \quad \mathcal{D}(L) = \{ y \in W_2^1(0,a) : y(0) = 0 \}.$$

Имеем

$$(Ly, y) = \int_0^a iy'\bar{y} = -\int_0^a iy\bar{y}' + i|y(a)|^2 = (y, Ly) + i|y(a)|^2. \qquad (I.2)$$

Таким образом, оператор L диссипативен. Нетрудно проверить, что преобразование Кэли оператора L есть оператор усеченного сдвига $M_\theta = P_\theta S | K_\theta$, $\theta = exp\left(a\frac{z+1}{z-1}\right)$. (Здесь $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$, P_θ – проектор на K_θ, $Sf = zf$). Точнее, если $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R})$, P_a – проектор из $L^2(\mathbb{R})$ на $L^2(0,a)$, а W – унитарный оператор, переводящий $L^2(\mathbb{T})$ в $L^2(\mathbb{R})$, $(Wf)(x) = \pi^{-1/2}(x+i)^{-1} f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)$, то

$$M_\theta = W^{-1}\mathcal{F}P_a^*(L - iI)(L + iI)^{-1}P_a\mathcal{F}^{-1}W.$$

Аналогичный оператор в $L^2(0,\infty)$ имеет преобразование Кэли, унитарно эквивалентное оператору сдвига S.

I.7. <u>Функциональное исчисление. Полугруппа сжатий</u>. Положим $\omega(\lambda) = i(1+\lambda)(1-\lambda)^{-1}$, $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$. Пусть L – максимальный диссипативный оператор, T – его преобразование Кэли. Если оператор $(g \circ \omega)(T)$ определен в исчислении С.-Надя-Фойаша, можно положить $g(L) \overset{def}{=\!=} (g \circ \omega)(T)$. Поскольку $1 \notin \sigma_p(T)$, к оператору T можно применять любую функцию $\varphi \in H^\infty$ такую, что φ непрерывна в $clos\,\mathbb{D} \setminus \{1\}$ (здесь используется предложение [9, § II.6], согласно которому $1 \notin \sigma_p(T) \Longrightarrow 1 \notin \sigma_p(U)$, где U – минимальная унитарная дилатация). Таким образом, к максимальному диссипативному оператору можно применять любые функции, ограниченные аналитические в $\mathbb{C}_+$ и непрерывные в $clos\,\mathbb{C}_+$. В частности, можно взять $g(z) = e^{itz}$. В результате получим полугруппу сжатий

$$\{e^{itL}\}_{t \geq 0} = \{\theta_t(T)\}_{t \geq 0}, \quad \theta_t = exp\left(t\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Нетрудно проверить, что эта полугруппа сильно непрерывна.

I.8. ЛЕММА (см. [9, § III.8]). Пусть $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ – сильно непрерывная полугруппа сжатий, $T(0) = I$. Тогда $T(t) = e^{itL}$ для некоторого максимального диссипативного оператора L.

Оператор L называется <u>генератором</u>, а $T = \mathcal{K}(L)$ – <u>когенератором</u> полугруппы $\{T(t)\}$.

В заключение этого параграфа приведем элементарные формулы, связывающие диссипативный оператор L и его преобразование Кэли T. Положим $\zeta = (\lambda - i)(\lambda + i)^{-1}$. Тогда

$$(L - \lambda I)^{-1} = \frac{\xi - 1}{2i}(I - T)(\zeta I - T)^{-1},$$
$$(L^* - \lambda I)^{-1} = \frac{\xi - 1}{2i}(I - T^*)(I - \zeta T^*)^{-1}. \qquad (I.3)$$

§ 2. Дефектные подпространства. Характеристическая функция

Существует много различных способов определения характеристической функции (х.-ф.). Все они более или менее эквивалентны, но специфика исходного оператора может привести к определенным предпочтениям в форме записи х.ф. Обычно х.ф. – это аналитическая оператор-функция, действующая из одного "дефектного пространства" в другое, а эти последние измеряют отклонение оператора от унитарного или самосопряженного. Если L – максимальный диссипативный оператор, то в качестве дефектных подпространств для него можно взять $\mathcal{D}_T = clos(I - T^*T)^{1/2}H$, $\mathcal{D}_{T^*} = clos(I - TT^*)^{1/2}H$, где $T = \mathcal{K}(L)$. Этим пространствам можно дать и более явное описание в терминах оператора L.

2.I. <u>Дефектные подпространства эрмитова оператора</u>. Оператор A с областью определения $\mathcal{D}(A) \subset H$ (не обязательно плотной) называется эрмитовым, если

$$(Ax, x) \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}(A).$$

Если $clos\,\mathcal{D}(A) = H$, эрмитов оператор называется <u>симметрическим</u>. Дефектные подпространства эрмитова оператора определяются формулой

$$N_{\mp}(A) = H \ominus Ran(A \pm iI).$$

Отметим, что образ $Ran(A \pm iI)$ замкнут, если оператор A замкнут, поскольку для эрмитова оператора $\|(A - \lambda I)x\| \geq |Im\lambda| \cdot \|x\|$.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – максимальный диссипативный оператор. <u>Областью эрмитовости</u> L назовем подпространство $G_L = \{x \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*) : Lx = L^*x\}$. <u>Эрмитовой частью</u> оператора L назовем сужение $L_H = L|G_L$

Ясно, что оператор L_H замкнут, т.к. его график есть пересечение графиков операторов L и L^*.

Пусть T – сжатие. Напомним, что операторы $D_T=(I-T^*T)^{1/2}$, $D_{T^*}=(I-TT^*)^{1/2}$ называют дефектными операторами сжатия T, а подпространства $\mathcal{D}_T = clos D_T H$, $\mathcal{D}_{T^*} = clos D_{T^*} H$ – дефектными подпространствами.

2.3. ЛЕММА. Пусть L – максимальный диссипативный оператор, $T = \mathcal{K}(L) = (L-iI)(L+iI)^{-1}$. Тогда $N_-(L_H) = \mathcal{D}_T$, $N_+(L_H) = \mathcal{D}_{T^*}$. Имеют место равенства

$$1/2\, D_T^2 = i(L+iI)^{-1} - i(L^*-iI)^{-1} - 2(L^*-iI)^{-1}(L+iI)^{-1},$$
$$1/2\, D_{T^*}^2 = i(L+iI)^{-1} - i(L^*-iI)^{-1} - 2(L+iI)^{-1}(L^*-iI)^{-1}. \qquad (2.I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (2.I) легко проверяются непосредственно. Докажем, что $\mathcal{D}_T = N_-(L_H)$; второе равенство получается заменой $L \to -L^*$. Имеем $\mathcal{D}_T = H \ominus Ker\, D_T$. Покажем, что $(L+iI)G_L = Ker\, D_T = Ker\, D_T^2$. Из (2.I) следует, что

$$1/2\, D_T^2 = i\left[I-(L^*-iI)^{-1}(L-iI)\right](L+iI)^{-1}.$$

Следовательно, если $x=(L+iI)y$, $y\in G_L$, то $D_T^2 x = 2i\left[I-(L^*-iI)^{-1}(L-iI)\right]y = 2i\left[y-(L^*-iI)^{-1}(L^*-iI)y\right] = 0$.

Обратно, если $x\in Ker\, D_T^2$, и $y=(L+iI)^{-1}x$, то $y = (L^*-iI)^{-1}(L-iI)y$. Но тогда $y\in\mathcal{D}(L)\cap\mathcal{D}(L^*)$, $L^*y = Ly$. Лемма доказана. ●

ЗАМЕЧАНИЕ. В ряде работ [10], [5], [6] подпространства $N_-(L_H)$, $N_+(L_H)$ и правые части формул (2.I) рассматриваются вне связи с оператором $T = \mathcal{K}(L)$. Нам представляется, что их связь с преобразованием Кэли проясняет ситуацию.

2.4. <u>Определение "граничных пространств"</u>. Пусть L – максимальный диссипативный оператор, G_L – его эрмитова часть. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{D}(L)/G_L$ и естественную проекцию $\mathcal{P}: \mathcal{D}(L) \to \mathcal{D}(L)/G_L$. Определим на фактор-пространстве скалярное произведение:

$$\langle \mathcal{P}x, \mathcal{P}y\rangle = \frac{i}{2}((x,Ly)-(Lx,y)); \quad x, y\in\mathcal{D}(L).$$

Корректность определения и невырожденность формы следуют из определения подпространства G_L, а ее положительность – из диссипативности оператора L. Через $F(L)$ обозначим пополнение фактор-пространства $\mathcal{D}(L)/G_L$ по соответствующей норме. Аналогично определим пространство $F_*(L) \overset{def}{=} F(-L^*)$. Через $\mathcal{P}_*$ обозначим проекцию из $\mathcal{D}(L^*)$ на $\mathcal{D}(L^*)/G_L$. Имеем

$$\| \mathcal{P}x \|_F^2 = Im(Lx, x), \quad \| \mathcal{P}^* x \|_{F_*}^2 = -Im(L^* x, x) .$$

Гильбертовы пространства $F(L)$, $F_*(L)$ будем называть <u>граничными пространствами</u> оператора L.

Такие пространства и близкие к ним объекты (пространства граничных значений) многократно рассматривались в литературе [II], [I2], [I3], [I4]. В этих работах, как правило, принято абстрактное аксиоматическое определение пространств граничных значений. В [I4] отмечается, что "канонический" выбор этих пространств, приведенный выше, не всегда удобен. Мы, однако, им ограничимся.

Введенные пространства $F(L)$, $F_*(L)$ особенно удобны, если оператор L имеет конечные дефекты; в этом случае пополнение излишне. Термин "граничные пространства" связан с тем, что для дифференциальных операторов они могут быть реализованы, как настоящие пространства граничных значений. Это иллюстрирует следующий пример.

2.5. ПРИМЕР. Рассмотрим оператор L из примера I.6

$$Ly = iy', \quad \mathcal{D}(L) = \{ y \in W_2^1(0, a) : y(0) = 0 \}$$

Из (I.2) следует, что

$$L^* y = iy', \quad \mathcal{D}(L^*) = \{ y \in W_2^1(0, a) : y(a) = 0 \} ,$$

$$G_L = \{ y \in W_2^1(0, a) : y(0) = y(a) = 0 \} .$$

Ясно, что $F(L) \cong \mathbb{C}$, $F_*(L) \cong \mathbb{C}$. Из (I.2) имеем

$$\| \mathcal{P}y \|_F^2 = \frac{1}{2} | y(a) |^2 .$$

Стождествляя $F(L)$ с $\mathbb{C}$, получаем, что проекция $\mathcal{P}$ есть с точностью до константы) вычисление значения в точке a. Аналогично, $\mathcal{P}_*$ – вычисление значения в нуле (с точностью до константы)

2.6. ЛЕММА. Пусть L – максимальный диссипативный оператор, $T = \mathcal{K}(L)$. Тогда существуют изометрические изоморфизмы

$\rho : F(L) \to \mathcal{D}_T$, $\rho_* : F_*(L) \longrightarrow \mathcal{D}_{T*}$, которые определяются из равенств:

$$\rho \mathcal{P}(I - T) = D_T \quad , \quad \rho_* \mathcal{P}_*(I - T^*) = D_{T*} \ . \qquad (2.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем, учитывая, что $L = i(I+T)(I-T)^{-1}$:

$$\|\mathcal{P}(I-T)x\|_F^2 = Im(L(I-T)x, \ (I-T)x) =$$

$$= Im\, i((I+T)x, (I-T)x) = Re((I+T)x, (I-T)x) =$$

$$= ([(I-T)^*(I+T) + (I+T)^*(I-T)]x, x)/2 =$$

$$= ((I - T^*T)x, x) = \|D_T x\|^2 .$$

Следовательно, равенство (2.2) задает изометрию ρ . Поскольку $\mathcal{P}(I-T)H = \mathcal{P}\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L)/G_L$ плотно в $F(L)$, а $D_T H$ плотно в $\mathcal{D}_T$, получаем требуемое. Переходя к оператору T^* , получаем утверждение о ρ_* . ●

2.7. СЛЕДСТВИЕ.

$$\dim \mathcal{D}_T = \dim[(L - L^*)(\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*))] + \dim(\mathcal{D}(L)/\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)),$$

$$\dim \mathcal{D}_{T*} = \dim[(L - L^*)(\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*))] + \dim(\mathcal{D}(L^*)/\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим первое равенство. Имеем

$$\dim \mathcal{D}_T = \dim F(L) = \dim(\mathcal{D}(L)/\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)) + \dim(\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)/G_L).$$

Остается воспользоваться тем, что $\dim Ran(L - L^*) = \dim(\mathcal{D}(L - L^*)/Ker(L - L^*))$. ●

2.8. <u>Обсуждение</u>. Следствие наглядно показывает двоякую причину появления дефектов у диссипативных операторов. Естественно рассмотреть "крайние" случаи, т.е. операторы, для которых одно из слагаемых обращается в нуль. Первый класс операторов - это такие, для которых $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$, у них обязательно равные индексы дефекта. "Дефект" определяется мнимой частью. Модельный пример - оператор Шредингера с комплекснозначным потенциалом и вещественным краевым условием. Второй класс операторов - это такие, для которых $G_L = \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$. У них "дефект" определяется различием областей определения оператора и сопряженного. Модельный пример - оператор Шредингера с вещественнозначным потенциалом и комплексным краевым условием. Заметим еще, что в этот класс попадают все диссипативные расширения симметрических операторов.

Действительно, для них G_L плотно в H. Если $y \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$, то $(Ly, x) = (y, L^* x) = (y, Lx) = (L^* y, x)$ для x из плотного множества G_L. Значит, $Ly = L^* y$, т.е. $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*) = G_L$.

2.9. Характеристическая функция. Мощным инструментом исследования диссипативного оператора является характеристическая функция (х.ф.). При бескоординатном подходе к модели х.ф. определяется исходя из функциональных вложений [I], [I5]. Это будет сделано в § 4, а здесь мы хотим лишь вывести некоторые формулы для х.ф.

Как известно, вполне неунитарное сжатие T определяется с точностью до унитарной эквивалентности х.ф. $\theta_T \in H^\infty(\mathbb{D} : E \to E_*)$ [I5], где E, E_* – вспомогательные гильбертовы пространства, изоморфные $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_{T*}$ соответственно. В свою очередь, х.ф. θ_T также определяется не однозначно, а с точностью до умножения справа и слева на изометрии из E на E' и из E_* на E'_* соответственно. Зафиксируем произвольные изометрические изоморфизмы $\Omega : E \to \mathcal{D}_T$, $\Omega_* : E_* \to \mathcal{D}_{T*}$. Тогда [9]:

$$\theta_T(\zeta) = \Omega_*^*(-T + \zeta \mathcal{D}_{T*}(I - \zeta T^*)\mathcal{D}_T)\Omega, \tag{2.3}$$

$$\theta_T(\zeta)\Omega^* \mathcal{D}_T = \Omega_*^* \mathcal{D}_{T*}(I - \zeta T^*)^{-1}(\zeta I - T). \tag{2.3'}$$

Характеристическая функция диссипативного оператора есть конформная пересадка из круга в полуплоскость х.ф. его преобразования Кэли. Оказывается, что различные формы х.ф., о которых говорилось в начале параграфа, получаются из "абстрактной" х.ф., если специальным образом выбрать E, E_*. Но сначала необходимо выделить самосопряженную часть диссипативного оператора.

2.I0. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – максимальный диссипативный оператор в H, $H_0 \subset H$ – замкнутое подпространство. Оно называется приводящим, если $P_{H_0} L \subset L P_{H_0}$. Оператор L называется вполне несамосопряженным, если ни для какого нетривиального приводящего подпространства H_0 сужение $L|H_0$ не является самосопряженным оператором в H_0.

Из разложения сжатия на унитарную и вполне неунитарную части немедленно вытекает следующее утверждение.

2.II. ЛЕММА [9, § IУ.4]. Пусть L – максимальный диссипативный оператор в H. Тогда существует и единственно такое разложение $H = H_0 \oplus H_1$ пространства H на приводящие подпространства, что $L_0 = L|H_0$ самосопряжен, а $L_1 = L|H_1$ – вполне несамосопряженный максимальный диссипативный оператор.

2.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [15]. Пусть L – вполне несамосопряженный максимальный диссипативный оператор, $T = \mathcal{K}(L)$. Характеристической функцией оператора L называется оператор-функция

$$S_L(\lambda) = \theta_T\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right), \qquad S_L \in H^\infty(\mathbb{C}_+, E \to E_*).$$

Ввиду леммы 2.6 можно положить $\Omega = \rho$, $\Omega_* = \rho_*$, $E = F(L)$, $E_* = F_*(L)$.

2.13. ЛЕММА. Пусть L – вполне несамосопряженный максимальный диссипативный оператор. Тогда характеристическая функция $S_L \in H^\infty(\mathbb{C}_+, F(L) \to F_*(L))$ на плотном множестве $\mathcal{D}(L)/G_L$ задается равенством

$$S_L(\lambda) = \mathcal{P}_*(L^* - \lambda I)^{-1}(L - \lambda I)\mathcal{P}^{-1}. \tag{2.4}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Если оператор L имеет конечные дефекты, то формула (2.4) действует на всем пространстве $F(L)$; в общем случае $S_L(\lambda)$ есть замыкание оператора, задаваемого формулой (2.4). 2) Выражение (2.4) корректно определено на $\mathcal{D}(L)/G_L$, хотя $\mathcal{P}^{-1}$ – "взятие представителя" не есть оператор (см. начало доказательства ниже). По существу, это запись фактор-оператора. При обращении с такими формулами нужна осторожность. В частности,

$$S_L^*(\lambda) = \mathcal{P}(L - \bar{\lambda} I)^{-1}(L^* - \bar{\lambda} I)\mathcal{P}_*^{-1} \tag{2.4'}$$

3) Граничные пространства $F(L), F_*(L)$ и х.ф. (2.4) были введены в работе А.В.Штрауса [11]. Формула (2.4) удобна для вычисления х.ф. дифференциальных операторов с конечными дефектами [16]. Пример такого вычисления приведен в § 5 (пп.5.6, 5.7), который можно читать независимо от последующего.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Сначала заметим, что оператор $\mathcal{P}_*(L^* - \lambda I)^{-1}(L - \lambda I)\mathcal{P}^{-1}$ корректно определен на $\mathcal{D}(L)/G_L$. Действительно, если $\mathcal{P}x = 0$, то $x \in G_L$, $Lx = L^*x$,

$$(L^* - \lambda I)^{-1}(L - \lambda I)x = (L^* - \lambda I)^{-1}(L^* - \lambda I)x = x, \qquad \mathcal{P}_* x = 0.$$

Далее имеем на $\mathcal{D}(L)/G_L$ пользуясь (2.3′) и полагая $\zeta = (\lambda - i)(\lambda + i)^{-1}$:

$$S_L(\lambda)\mathcal{P} = \theta_T(\zeta)\Omega^*\rho\mathcal{P} = \theta_T(\zeta)\Omega^*\mathbb{D}_T(I - T)^{-1} =$$

$$= \Omega_*^*\mathbb{D}_{T^*}(I - \zeta T^*)^{-1}(\zeta I - T)(I - T)^{-1} =$$

$$= \Omega_*^* \rho_* \mathcal{P}_*(I-T^*)(I-\zeta T^*)^{-1}(\zeta I-T)(I-T)^{-1}.$$

Отсюда, учитывая (I.3), получим равенство (2.4). ●

2.I4. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ. $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$. В этом случае можно рассмотреть оператор $Q = (L-L^*)/2i$. Он выражается через преобразование Кэли $T = \mathcal{K}(L)$ следующим образом [9, § IX.4]:

$$Q = (I-T)^{-1}(I-TT^*)(I-T^*)^{-1},$$

$$Q = (I-T^*)^{-1}(I-T^*T)(I-T)^{-1}. \tag{2.5}$$

Поскольку $(Qx,x) \geqslant 0$, $x \in \mathcal{D}(Q)$, Q допускает положительное расширение (например, расширение по Фридрихсу). Мы зафиксируем такое расширение и обозначим его также через Q. Тогда определен оператор $Q^{1/2}$. Положим $\mathcal{B}_Q = clos\, Q^{1/2}\mathcal{D}(L)$.

2.I5. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$. Тогда существуют изометрические изоморфизмы $\mu : \mathcal{B}_Q \to \mathcal{D}_T$, $\mu_* : \mathcal{B}_Q \to \mathcal{D}_{T^*}$, которые определяются равенствами:

$$\mu Q^{1/2}(I-T) = \mathcal{D}_T, \quad \mu_* Q^{1/2}(I-T^*) = \mathcal{D}_{T^*}. \tag{2.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.5) получаем, что $(I-T^*)Q(I-T) = \mathcal{D}_T^2$, откуда $\|Q^{1/2}(I-T)x\|^2 = \|\mathcal{D}_T x\|^2$. Это значит, что равенство (2.6) задает изометрию μ. Аналогично поступаем с μ_*. ●

Следующее очевидное утверждение устанавливает связь между $\mathcal{B}_Q$ и граничными пространствами.

2.I6. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$. Тогда $F(L) = F(L^*)$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_*$, $Q^{1/2}|\mathcal{D}(L) = \mu^*\rho\mathcal{P} = \mu_*^*\rho_*\mathcal{P}_*$. ●

Лемма 2.I5 показывает, что для характеристической функции можно положить $E = E_* = \mathcal{B}_Q$, $\Omega = \mu$, $\Omega_* = \mu_*$.

2.I7. ЛЕММА. Пусть L – вполне несамосопряженный максимальный диссипативный оператор такой, что $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$. Тогда х.ф. $S_L \in H^\infty(\mathbb{C}_+ : \mathcal{B}_Q \to \mathcal{B}_Q)$ задается на плотном множестве $Q^{1/2}\mathcal{D}(L)$ равенством:

$$S_L(\lambda) = I + 2iQ^{1/2}(L^*-\lambda I)^{-1}Q^{1/2}. \tag{2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\zeta=(\lambda-i)(\lambda+i)^{-1}$. Имеем из (2.6), (2.3′),(I.3):

$$S_L(\lambda)Q^{1/2}(I-T)=S_L(\lambda)\mu^*D_T=\theta_T(\zeta)\Omega^*D_T=$$
$$=\Omega_*^*D_{T*}(I-\zeta T^*)^{-1}(\zeta I-T)=\mu_*^*D_{T*}(I-\zeta T^*)^{-1}(\zeta I-T)=$$
$$=Q^{1/2}(I-T^*)(I-\zeta T^*)^{-1}(\zeta I-T)=Q^{1/2}(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I)(I-T)=$$
$$=Q^{1/2}(L^*-\lambda I)^{-1}(L^*-\lambda I+2iQ)(I-T)=$$
$$=[I+2iQ^{1/2}(L^*-\lambda I)^{-1}Q^{1/2}]Q^{1/2}(I-T).$$

Отсюда следует (2.7). ●

Характеристическая функция в форме (2.7) впервые появилась в работе М.С.Лившица [I7], см.также [9, § IX.4].

§ 3. Самосопряженная дилатация

3.I. ЛЕММА. Пусть L – максимальный диссипативный оператор в H, $\mathcal{L}$ – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}\supset H$. Следующие утверждения равносильны:

(a) $(L-\lambda I)^{-1}=P_H(\mathcal{L}-\lambda I)^{-1}|H,\quad \lambda\in\mathbb{C}_-$;

(b) $(L+iI)^{-n}=P_H(\mathcal{L}+iI)^{-n}|H,\quad n\geq 0$;

(c) $e^{iLt}=P_H e^{i\mathcal{L}t}|H,\quad t>0$;

(d) Оператор $U=\mathcal{K}(\mathcal{L})$ есть унитарная дилатация сжатия $T=\mathcal{K}(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\sigma(L)\subset clos\,\mathbb{C}_+$, условия (a), (в),(d) очевидно, равносильны. Условие (c) следует из (d),т.к. $e^{iLt}=\theta_t(T)$, $e^{i\mathcal{L}t}=\theta_t(U)$. Импликация (c) $\Longrightarrow$ (a) вытекает из известной формулы

$$i(L-\lambda I)^{-1}=\int_0^\infty e^{-it\lambda}e^{itL}dt,\quad \lambda\in\mathbb{C}_-. \quad ●$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{L}$, удовлетворяющий условиям леммы, называется <u>самосопряженной дилатацией</u> оператора L. Дилатация <u>минимальна</u>, если $Span((\mathcal{L}-\lambda I)^{-1}H,\ \lambda\in\mathbb{C}_-)=\mathcal{H}$. Ясно, что минимальность также можно формулировать, используя вместо резольвенты $(\mathcal{L}-\lambda I)^{-1}$ операторы из утверждений (в)-(d) леммы 3.I.

3.2. <u>Обсуждение</u>. Из существования унитарной дилатации сжатия и условия (d) леммы 3.I следует, что самосопряженная дилатация существует. Хотелось бы, однако, иметь выражение для дилата-

ции в терминах диссипативного оператора. Сложность (по сравнению с унитарной дилатацией) состоит в том, что сужение $\mathcal{X}|H$, вообще говоря, не равно оператору L. Часто бывает даже, что $\mathcal{D}(\mathcal{X}) \cap H = \{0\}$. Тем не менее имеются довольно простые и красивые формулы для самосопряженной дилатации, особенно в частных случаях. Они найдены в работах Б.С.Павлова [2], [3], см.также [4]. Общий случай рассматривался в работах А.В.Кужеля и Ю.Л.Кудряшова [5], [6], [7]. Во всех упомянутых работах сразу предъявляется некоторый оператор, а затем проверяется, что он и есть самосопряженная дилатация. Мы получим эти формулы, а также некоторые их обобщения естественным образом, именно, из преобразования Кэли унитарной дилатации.

3.3. <u>Какую дилатацию мы ищем</u>? Пусть L – максимальный диссипативный оператор, $T = \mathcal{K}(L)$ – его преобразование Кэли. Тогда минимальная унитарная дилатация U сжатия T действует в пространстве $\mathcal{H}_T = G_* \oplus H \oplus G$, где G, G_* соответственно U, U^* – инвариантны [15]. Можно выбрать следующую реализацию

$$\mathcal{H}_T = H^2_-(\mathbb{D}, E_*) \oplus H \oplus H^2(\mathbb{D}, E); \quad U|G = z, \quad U^*|G_* = \bar{z},$$

где E, E_* изоморфны $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_{T^*}$ соответственно. Мы хотим получить самосопряженную дилатацию $\mathcal{X}$ в пространстве

$$\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R}_-, E_*) \oplus H \oplus L^2(\mathbb{R}_+, E); \quad e^{it\mathcal{X}}|L^2 \text{ – сдвиг на } t.$$

Для этого нужно проделать

1) переход из круга в полуплоскость дробно-линейным преобразованием;

2) преобразование Фурье-переход в трансляционное представление полугруппы;

3) преобразование Кэли.

Можно, конечно, сделать это в другом порядке.

Исходной является следующая формула для минимальной унитарной дилатации в $\mathcal{H}_T$ [1], [15]:

$$U = \begin{bmatrix} P_- z & 0 & 0 \\ A & T & 0 \\ C & B & z \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

Здесь $V: H \to G$, $V_*: H \to G_*$ – частичные изометрии с начальными пространствами $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_{T^*}$ и конечными $G \ominus UG$, $G_* \ominus U^* G_*$ соответственно.

Выберем в качестве свободных параметров дилатации изометрии

$$\Omega : E \to \mathcal{D}_T \ , \quad \Omega_* : E_* \to \mathcal{D}_{T*} \ .$$

Тогда $V = P_0^* \Omega^*$, $V_* = P_{-1}^* \Omega_*^*$, где $P_0 : H^2(\mathbb{D}, \varepsilon) \to \varepsilon$, $P_{-1} : H_-^2(\mathbb{D}, \varepsilon) \to \varepsilon$ сопоставляют ряду Фурье соответственно нулевой и (-1)-ый коэффициент. Положим

$$(Wf)(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x+i} f\left(\frac{x-i}{x+i}\right) \ . \tag{3.2}$$

Оператор W есть изометрический изоморфизм $L^2(\mathbb{D}, \varepsilon)$ на $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ для любого пространства ε. При этом $WH^2(\mathbb{D}, \varepsilon) = H^2(\mathbb{C}_+, \varepsilon)$, $WH_-^2(\mathbb{D}, \varepsilon) = H^2(\mathbb{C}_-, \varepsilon)$. Обозначим через $\mathcal{F}$ преобразование Фурье:

$$(\mathcal{F}h)(z) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{ixz} dx \ . \tag{3.3}$$

Оператор $\mathcal{F}$ действует унитарно во всех $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ и переводит $L^2(\mathbb{R}_\pm, \varepsilon)$ в $H^2(\mathbb{C}_\pm, \varepsilon)$. Нашей целью является вычисление оператора $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z} = i(I + \tau^{-1} U \tau)(I - \tau^{-1} U \tau), \quad \tau \overset{def}{=\!=} \begin{bmatrix} W^{-1}\mathcal{F} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & W^{-1}\mathcal{F} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

3.4. ЛЕММА (об унитарной дилатации в полуплоскости).

Оператор $U_1 \overset{def}{=\!=} \begin{bmatrix} W & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & W \end{bmatrix} \cdot U \cdot \begin{bmatrix} W^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & W^{-1} \end{bmatrix}$ в пространстве $H^2(\mathbb{C}_-, E_*) \oplus H \oplus H^2(\mathbb{C}_+, E)$ имеет вид:

$$U_1 = \begin{bmatrix} I - 2i\Gamma_{-i} & 0 & 0 \\ -2i\sqrt{\pi}\, \mathcal{D}_{T*} \Omega_* h_{-i} & T & 0 \\ 2i(z+iI)^{-1} \Omega^* T^* \Omega_* h_{-i} & \pi^{-1/2}(z+iI)^{-1} \Omega^* \mathcal{D}_T & (z-iI)(z+iI)^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$(\Gamma_{-i} f)(z) \overset{def}{=\!=} (z+i)^{-1}(f(z) - f(-i)) \ .$$

Здесь h_{-i} обозначает функционал вычисления значения в точке $(-i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $U_1(k,\ell)$ будем обозначать соответствующий матричный элемент. Из (3.I) и последующих формул имеем

$$U_1=\begin{bmatrix} WP_-\varkappa W^{-1} & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_{T^*}\Omega_* P_{-1}W^{-1} & T & 0 \\ -WP_0^*\Omega^* T^*\Omega_* P_{-1}W^{-1} & WP_0^*\Omega^*\mathcal{D}_T & W\varkappa W^{-1} \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что $W\varkappa W^{-1}=(\varkappa-iI)(\varkappa+iI)^{-1}$ (оператор умножения). Имеем

$$(W^{-1}f)(\varkappa)=f\left(i\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}\right)\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\,i}{1-\varkappa}\,;\quad P_{-1}g=\varkappa g(\varkappa)\big|_{\varkappa=\infty},\quad g\in H_-^2(\mathbb{D},E_*).$$

Таким образом, $P_{-1}W^{-1}=-2\sqrt{\pi}\,i\,h_{-i}$. Далее, ясно, что $WP_0^*: e\mapsto \pi^{-1/2}(\varkappa+i)^{-1}e$. Наконец,

$$WP_-\varkappa W^{-1}=W\varkappa W^{-1}-WP_0^*P_{-1}W^{-1}=(\varkappa-iI)(\varkappa+iI)^{-1}+WP_0^*2\sqrt{\pi}\,i\,h_{-i}\,,$$

$$WP_0^*2\sqrt{\pi}\,i\,h_{-i}f=2i(\varkappa+i)^{-1}f(-i)\,.$$

Подставляя все эти формулы, получим (3.5). ●

3.5. ЛЕММА (об унитарной дилатации в трансляционном представлении на прямой). Оператор $U_2=\begin{bmatrix}\mathcal{F}^{-1}&0&0\\0&I&0\\0&0&\mathcal{F}^{-1}\end{bmatrix}U_1\begin{bmatrix}\mathcal{F}&0&0\\0&I&0\\0&0&\mathcal{F}\end{bmatrix}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_-,E_*)\oplus H\oplus L^2(\mathbb{R}_+,E)$ имеет вид:

$$U_2=\begin{bmatrix} I-2K_- & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}\,i\,\mathcal{D}_{T^*}\Omega_*(\cdot,e^{\times}_{\mathbb{R}_-}) & T & 0 \\ 2e^{-\times}_{\mathbb{R}_+}\Omega^*T^*\Omega_*(\cdot,e^{\times}_{\mathbb{R}_-}) & -\sqrt{2}\,i\,e^{-\times}_{\mathbb{R}_+}\Omega^*\mathcal{D}_T & I-2K_+ \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

где

$$(K_-g_-)(x)=\int_{-\infty}^{x} g_-(t)e^{t-x}dt,\qquad g_-\in L^2(\mathbb{R}_-,E_*),$$

$$(K_+g_+)(x)=\int_{0}^{x} g_+(t)e^{t-x}dt,\qquad g_+\in L^2(\mathbb{R}_+,E).$$

Операторы $K_\pm$ суть операторы свертки на $\mathbb{R}$ с функцией $e^{-\times}_{\mathbb{R}_+}\overset{def}{=}e^{-x}|\mathbb{R}_+$. Через $(\cdot,f)$ обозначаем скалярное произведение в

соответствующем пространстве L^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Из (3.3) находим, что $h_{-i}\mathcal{F}|L^2(\mathbb{R}_-,E_*) = (2\pi)^{-1/2}(\cdot, e^x_{\mathbb{R}_-})$. Это вычисляет, исходя из (3.5), матричный элемент $U_2(2,1)$.

2) Имеем

$$\mathcal{F}^{-1}(z+i)^{-1} = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}(z+i)^{-1}e^{-ixz}dz = \begin{cases} -(2\pi)^{1/2}ie^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x<0 \end{cases}.$$

Отсюда находим U_2 (3.2) , а также U_2 (3,1):

$$\mathcal{F}^{-1}2i(z+iI)^{-1}\Omega^*T^*\Omega_* h_{-i}\mathcal{F} = 2e^{-x}_{\mathbb{R}_+}\Omega^*T^*\Omega_*(\cdot, e^x_{\mathbb{R}_-}).$$

3) Имеем $\mathcal{F}^{-1}(g_1g_2) = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}^{-1}(g_1)*\mathcal{F}^{-1}(g_2)$, откуда

$$\mathcal{F}^{-1}2i(z+iI)^{-1}\mathcal{F} = 2K, \quad (Kg)(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)e^{t-x}\,dt .$$

Если $g = g_+ \in L^2(\mathbb{R}_+, E)$, отсюда сразу получается формула для матричного элемента $U_2(3,3)$. Остается вычислить $U_2(1,1) = I - 2(K - i\mathcal{F}^{-1}(z+i)^{-1}h_{-i}\mathcal{F})$. Пусть $g_- \in L^2(\mathbb{R}_-, E_*)$. Имеем

$$(Kg_-)(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} g_-(t)e^{t-x}\,dt, & x<0, \\ e^{-x}(g_-(t), e^t_{\mathbb{R}_-}), & x>0 . \end{cases}$$

Учитывая, что $i\mathcal{F}^{-1}(z+i)^{-1}h_{-i}\mathcal{F} = e^{-x}_{\mathbb{R}_+}(\cdot, e^x_{\mathbb{R}_-})$, получим требуемую формулу. ●

Остается сделать преобразование Кэли, и получится формула для самосопряженной дилатации. Заметим, что ее уже нельзя записывать в виде матрицы, т.к. разложение в прямую сумму может быть не согласовано с областью определения.

3.6. ТЕОРЕМА. Пусть L – максимальный диссипативный оператор в пространстве H , $T = \mathcal{K}(L)$. Тогда его минимальная самосопряженная дилатация $\mathcal{Z}$ в пространстве $\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R}_-, E_*)\oplus H \oplus L^2(\mathbb{R}_+, E)$ имеет вид:

$$\mathcal{Z}\begin{bmatrix} v_- \\ f \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} iv_-' \\ i\{2(I-T)^{-1}\left[f - \frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_{T^*}\Omega_* v_-(0)\right] - f\} \\ iv_+' \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

причем область определения $\mathcal{D}(\mathcal{Z})$ задается условиями:

$$v_- \in W_2^1(\mathbb{R}_-, E_*), \quad v_+ \in W_2^1(\mathbb{R}_+, E); \tag{3.8}$$

$$f - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* v_-(0) \in (I - T) H = \mathcal{D}(L); \tag{3.9}$$

$$\sqrt{2}\, i \mathcal{D}_T (I-T)^{-1} \left(f - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* v_-(0)\right) = T^* \Omega_* v_-(0) + \Omega v_+(0). \tag{3.10}$$

"Свободными параметрами" дилатации являются изометрии $\Omega: E \to \mathcal{D}_T$, $\Omega_*: E_* \to \mathcal{D}_{T^*}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. I) С помощью формул (2.I) и пользуясь тем, что $(L + iI)^{-1} = 2i(I - T)^{-1}$, легко переписать формулировку теоремы так, чтобы в ней не участвовал оператор T.

2) Самосопряженная дилатация в форме (3.7)-(3.I0) (с точностью до несущественных деталей) получена Ю.Л.Кудряшовым [5], [6]. А.В.Кужелем [7] (см.также [5]) построена самосопряженная дилатация в круге. Она реализована на пространстве последовательностей (по аналогии с [9]). Если записать ее в пространстве $H_-^2(\mathbb{D}, \mathcal{D}_{T^*}) \oplus H \oplus H^2(\mathbb{D}, \mathcal{D}_T)$, то нетрудно увидеть, что она есть преобразование Кэли унитарной дилатации в форме (3.I). Таким образом, дилатации в форме Кужеля и Кудряшова могут быть получены одна из другой конформной заменой и преобразованием Фурье. Отметим, что в упомянутых работах, как и в предшествующих работах [2], [3], [4] дилатации "угадываются" и никакие связи между ними не указаны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Имеем $\mathcal{L} = i(I + U_2)(I - U_2)^{-1} = i[2(I - U_2)^{-1} - I]$, где оператор U_2 задан формулой (3.6). Пусть $(I - U_2)[g_-, g, g_+]^T = [v_-, f, v_+]^T$. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\int_{-\infty}^{x} g_-(t) e^{t-x} dt = v_-(x) \\ (I - T) g + i\sqrt{2}\, \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* (g_-, e^x_{\mathbb{R}_-}) = f \\ 2\int_0^x g_+(t) e^{t-x} dt + i\sqrt{2}\, e^{-x}_{\mathbb{R}_+} \Omega^* \mathcal{D}_T g - 2 e^{-x}_{\mathbb{R}_+} \Omega^* T^* \Omega_* (g_-, e^x_{\mathbb{R}_-}) = v_+(x). \end{cases}$$

Из I-го уравнения следует, что $v_-'(x) = 2g_-(x) - v_-(x)$, $v_- \in W_2^1(\mathbb{R}_-, E_*)$. Кроме того, $v_-(0) = 2(g_-, e^x_{\mathbb{R}_-})$. Из 2-го уравнения находим, что $\Phi \overset{def}{=} f - \frac{i}{\sqrt{2}} \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* v_-(0) \in \mathcal{D}(L)$, $g = (I - T)^{-1} \Phi$. Из 3-го уравнения получаем, что $v_+'(x) = 2g_+(x) - v_+(x)$, откуда $v_+ \in W_2^1(\mathbb{R}_+, E)$ и

$$v_+(0) = \sqrt{2}\, i \Omega^* \mathcal{D}_T (I - T)^{-1} \Phi - \Omega^* T^* \Omega_* v_-(0).$$

Поскольку $\Omega\Omega^* = P_{\mathcal{D}_T}$, $T^*\mathcal{D}_{T*} \subset \mathcal{D}_T$, мы проверили, что $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ удовлетворяет условиям (3.8)-(3.10). Очевидно также, что если для v_+, v_-, f выполнены условия (3.8)-(3.10), то $[v_-, f, v_+]^T \in (I-U_2)\mathcal{H}_L$ и оператор $\mathcal{L}$ задается равенством (3.7). ●

В случае конечных дефектов ($\dim \mathcal{D}_T < \infty$, $\dim \mathcal{D}_{T*} < \infty$) удобно иметь дилатацию, "привязанную" не к пространствам $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_{T*}$, а к граничным пространствам $F(L)$, $F_*(L)$ (см. определение 2.4).

3.7. ТЕОРЕМА. Пусть L - максимальный диссипативный оператор в пространстве H с конечными дефектами. Пусть заданы изометрические изоморфизмы $\psi : E \to F(L)$, $\psi_* : E_* \to F_*(L)$. Тогда минимальная самосопряженная дилатация $\mathcal{L}$ в пространстве $\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R}_-, E_*) \oplus H \oplus L^2(\mathbb{R}_+, E)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} v_- \\ f \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i v_-' \\ L(f - \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)]) + \frac{i}{\sqrt{2}} L^*[\psi_* v_-(0)] \\ i v_+' \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

где $[\cdot]$ обозначает некоторый представитель фактор-класса $\mathrm{mod}\ G_L$. При этом область определения дилатации $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ задается условием (3.8), а также следующими двумя:

$$f - \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)] \in \mathcal{D}(L), \tag{3.12}$$

$$f - \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)] + \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi v_+(0)] \in G_L. \tag{3.13}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Условие (3.12) можно заменить на условие

$$f + \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi v_+(0)] \in \mathcal{D}(L^*), \tag{3.12'}$$

т.к. легко видеть, что пары условий (3.12),(3.13) и (3.12′), (3.13) равносильны.

2) Если не предполагать конечность дефектов, то формула (3.11) также имеет смысл, но она задает лишь существенно самосопряженный оператор $\mathcal{L}_0$, замыканием которого является дилатация $\mathcal{L}$. При этом $\mathcal{D}(\mathcal{L}_0) = \{[v_-, f, v_+]^T : (3.8), (3.12), (3.13), \psi v_+(0) \in \mathcal{D}(L)/G_L,\ \psi_* v_-(0) \in \mathcal{D}(L^*)/G_L\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае конечных дефектов $F(L) = \mathcal{D}(L)/G_L$, $F_*(L) = \mathcal{D}(L^*)/G_L$. Положим в теореме 3.6 $\Omega = \rho\psi$, $\Omega_* = \rho_*\psi_*$. Из (2.2) имеем

$$\mathcal{D}_{T^*}\Omega_* v_-(0)=\mathcal{D}_{T^*}^2(I-T^*)^{-1}\mathcal{P}_*^{-1}\psi_* v_-(0)=\mathcal{D}_{T^*}^2(I-T^*)^{-1}[\psi_* v_-(0)],$$

причем последнее выражение не зависит от представителя $[\psi_* v_-(0)]\in\mathcal{D}(L^*)$. Положим $\Phi\overset{def}{=}f-\frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{D}_{T^*}\Omega_* v_-(0)$

Получаем, что

$$\Phi=f-\frac{i}{\sqrt{2}}(I-TT^*)(I-T^*)^{-1}[\psi_* v_-(0)]=$$

$$=f-\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)]-\frac{i}{\sqrt{2}}(I-T)T^*(I-T^*)^{-1}[\psi_* v_-(0)],$$

откуда условие (3.9) равносильно (3.I2). Далее

$$(I-T)^{-1}\Phi=(I-T)^{-1}(f-\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)])-\frac{i}{\sqrt{2}}T^*(I-T^*)^{-1}[\psi_* v_-(0)]=$$

$$=\frac{1}{2i}(L+iI)(f-\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)])+\frac{1}{2i}(L^*+iI)^{-1}\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)].$$

Подставляя это выражение в (3.7), получим (3.II). Остается переписать условие (3.I0):

$$\sqrt{2}i\mathcal{D}_T(I-T)^{-1}\Phi=T^*\mathcal{D}_{T^*}(I-T^*)^{-1}[\psi_* v_-(0)]+\mathcal{D}_T(I-T)^{-1}[\psi v_+(0)]$$

равносильно, с учетом соотношения $T^*\mathcal{D}_{T^*}=\mathcal{D}_T T^*$, равенству

$$\sqrt{2}i\mathcal{D}_T(I-T)^{-1}(f-\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)]+\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi v_+(0)])=0.$$

Последнее эквивалентно условию (2.I3), т.к. $\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}_T(I-T)^{-1}=\mathrm{Ker}\,\mathcal{P}=G_L$. ●

3.8. <u>Диссипативные расширения симметрических операторов (случай конечных дефектов)</u>. Если G_L плотно в H, то как следует из п.2.8, $G_L=\mathcal{D}(L)\cap\mathcal{D}(L^*)$. При этом формулы (3.II)-(3.I3) несколько упрощаются. Именно, рассмотрим оператор $\tilde{L}$, определенный на $\mathcal{D}(L)+\mathcal{D}(L^*)$:

$$\tilde{L}\overset{def}{=}(L\,|\,\mathcal{D}(L)\cap\mathcal{D}(L^*))^*=\begin{cases} L & \text{на } \mathcal{D}(L)\\ L^* & \text{на } \mathcal{D}(L^*)\end{cases}.$$

Ясно, что $L(f-\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)]+\frac{i}{\sqrt{2}}L^*[\psi_* v_-(0)]=\tilde{L}f$, а пара условий (3.I2),(3.I3) равносильна паре условий (3.I2),(3.I2′). В результате получаем следующее

3.9. СЛЕДСТВИЕ. Пусть L – максимальный диссипативный оператор с конечными дефектами такой, что G_L плотно в H. Тогда

его самосопряженная дилатация имеет вид:

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} v_- \\ f \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i v_-' \\ \tilde{L} f \\ i v_+' \end{bmatrix}, \qquad \tilde{L} = (L|G_L)^* . \tag{3.14}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{[v_-, f, v_+]^T : v_- \in W_2^1(\mathbb{R}_-, E_*),\ v_+ \in W_2^1(\mathbb{R}_+, E),$$
$$f - \frac{i}{\sqrt{2}}[\Psi_* v_-(0)] \in \mathcal{D}(L),\ f + \frac{i}{\sqrt{2}}[\Psi v_+(0)] \in \mathcal{D}(L^*)\} . \tag{3.15}$$

В следствии также можно отказаться от условия конечности дефектов, если считать, что формула (3.14) задает дилатацию лишь на множестве существенной самосопряженности. Полученная дилатация является уже непосредственным обобщением формул Б.С.Павлова [2]. Этот пример будет разобран в § 5. Отметим, что если L – дифференциальный оператор, то $\tilde{L}$ задается тем же дифференциальным выражением, что и L.

3.9. <u>Диссипативные операторы с ограниченной мнимой частью</u>. В модельном случае оператора Шредингера с ограниченным потенциалом $q(x)$, $\operatorname{Im} q \geq 0$, дилатация была построена Б.С.Павловым [3]. В работе С.Н.Набоко [4] это построение обобщается на случай, когда $L = A + iQ$ и оператор Q сильно подчинен A. Отметим однако, что формулу для дилатации в [4] можно понимать только как задание оператора на множестве существенной самосопряженности. Мы получим эти формулы в предположении, что Q ограничен.

3.10. ТЕОРЕМА. Пусть $L = A + iQ$, где $A = A^*$, $Q \geq 0$, и Q ограничен. Пусть $\mathcal{B}_Q = \operatorname{clos} Q^{1/2} H$. Пусть E, E_* изоморфны пространству $\mathcal{B}_Q$ и зафиксированы изометрические изоморфизмы $\varkappa : E \to \mathcal{B}_Q$, $\varkappa_* : E_* \to \mathcal{B}_Q$. Тогда самосопряженная дилатация $\mathcal{L}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}_-, E_*) \oplus H \oplus L^2(\mathbb{R}_+, E)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} v_- \\ f \\ v_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i v_-' \\ L f + \sqrt{2}\, Q^{1/2} \varkappa_* v_-(0) \\ i v_+' \end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{[v_-, f, v_+]^T : v_- \in W_2^1(\mathbb{R}_-, E_*),\ v_+ \in W_2^1(\mathbb{R}_+, E),$$
$$f \in \mathcal{D}(L),\ \sqrt{2}\, i Q^{1/2} f = \varkappa v_+(0) - \varkappa_* v_-(0)\} . \tag{3.17}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обычно выбирают $E = E_*$, $\varkappa = \varkappa_*$.

Для доказательства нам потребуется одна техническая лемма. Напомним, что равенства (2.6) задают изометрии $\mu : \mathcal{B}_Q \to \mathcal{D}_T$, $\mu_* : \mathcal{B}_Q \to \mathcal{D}_{T*}$.

3.II. ЛЕММА. В предположениях теоремы 3.I0

(i) $\mathcal{D}_{T*} | \mathcal{D}_{T*} = (I-T)Q^{1/2}\mu_*^*$, $\mathcal{D}_{T*}\mathcal{D}_{T*} \subset \mathcal{D}(L)$;

(ii) $\mu_*^* = (Q^{1/2}\mathcal{D}_{T*} - \mu^* T^*) | \mathcal{D}_{T*}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i). Проверим равенство; из него следует нужное включение. Равенство можно проверять на плотном множестве, т.к. $Q^{1/2}$ ограничен. Пусть $x = \mathcal{D}_{T*} y$. Тогда по формулам (2.5),(2.6):

$$(I-T)Q^{1/2}\mu_*^* x = (I-T)Q(I-T^*)y = (I-TT^*)y = \mathcal{D}_{T*} x.$$

(ii) Снова проверяем равенство на плотном множестве, для $x = \mathcal{D}_{T*} y$. Имеем

$$\mu_*^* x = Q^{1/2}(I-T^*)y = Q^{1/2}((I-TT^*)y - (I-T)T^* y) =$$

$$= Q^{1/2}\mathcal{D}_{T*} x - \mu^* \mathcal{D}_T T^* y = (Q^{1/2}\mathcal{D}_{T*} - \mu^* T^*)x. \quad \bullet$$

3.II. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.I0. Применим теорему 3.6, полагая $\Omega = \mu\varkappa$, $\Omega_* = \mu_*\varkappa_*$. Из леммы 3.II (i) сразу вытекает, что условие (3.9) превращается в условие $f \in \mathcal{D}(L)$, а выражение во второй строке формулы (3.7) преобразуется в $Lf + \sqrt{2}\, Q^{1/2}\varkappa_* v_-(0)$. Применим μ^* к равенству (3.I0). Получим

$$\sqrt{2}\, i\, Q^{1/2} f + Q^{1/2}\mathcal{D}_{T*}\mu_*\varkappa_* v_-(0) = \mu^* T^* \mu_*\varkappa_* v_-(0) + \varkappa v_+(0).$$

С учетом леммы 3.II (ii) это равносильно условию

$$\sqrt{2}\, i\, Q^{1/2} f = \varkappa v_+(0) - \varkappa_* v_-(0),$$

что и требовалось. $\bullet$

§ 4. Функциональные вложения. Модель

4.I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть L – максимальный диссипативный оператор в H, $\mathcal{L}$ – его минимальная самосопряженная дилатация в пространстве $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$, где G_* – "приходящее", а G – "уходящее" подпространства, т.е. $e^{i\mathcal{L}t} G \subset G$ при

$t>0$, $e^{iXt}G_* \subset G_*$ при $t<0$. По аналогии со случаем сжатия [I], [I5], назовем <u>функциональными вложениями</u> изометрии

$$\pi^{\mathbb{R}}: L^2(\mathbb{R},E) \to \mathcal{H}, \quad \dim E = \dim F(L),$$

$$\pi_*^{\mathbb{R}}: L^2(\mathbb{R},E_*) \to \mathcal{H}, \quad \dim E_* = \dim F_*(L),$$

такие, что

$$(X+iI)^{-1}\pi^{\mathbb{R}} = \pi^{\mathbb{R}}(z+iI)^{-1}, \quad (X+iI)^{-1}\pi_*^{\mathbb{R}} = \pi_*^{\mathbb{R}}(z+iI)^{-1},$$

$$\pi^{\mathbb{R}}H^2(\mathbb{C}_+,E) = G, \quad \pi_*^{\mathbb{R}}H^2(\mathbb{C}_-,E_*) = G_*.$$

Этими условиями $\pi^{\mathbb{R}}, \pi_*^{\mathbb{R}}$ определяются однозначно с точностью до умножения на унитарные константы в E, E_*. Ясно, что если $T=\mathcal{K}(L)$ – преобразование Кэли, то

$$\pi^{\mathbb{R}} = \pi \circ W^{-1}, \quad \pi_*^{\mathbb{R}} = \pi_* \circ W^{-1}, \tag{4.I}$$

где π, π_* – функциональные вложения сжатия T.

4.2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. Оператор $S=(\pi_*^{\mathbb{R}})^*\pi^{\mathbb{R}}$ действует из $L^2(\mathbb{R},E)$ в $L^2(\mathbb{R},E_*)$, переводит $H^2(\mathbb{C}_+,E)$ в $H^2(\mathbb{C}_+,E_*)$ и коммутирует с умножением на $(z+i)^{-1}$. Следовательно, S есть умножение на функцию $S_L(\lambda)\in H^\infty(\mathbb{C}_+,E\to E_*)$. Она называется характеристической функцией оператора L. Впрочем, из (4.I) сразу находим, что

$$S_L(\lambda) = \theta_T\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right),$$

где θ_T – характеристическая функция преобразования Кэли оператора L, что соответствует определению 2.I2.

4.3. <u>Формальная теорема о модели</u> в бескоординатном варианте по существу не несет новой информации: всякий простой максимальный диссипативный оператор унитарно эквивалентен модельному, а этот последний есть преобразование Кэли модельного сжатия.

Содержательным является, однако, нахождение формул для функциональных вложений $\pi^{\mathbb{R}}$, $\pi_*^{\mathbb{R}}$, связанных с конкретными дилатациями, найденными в § 3. В частных случаях операторы, сопряженные к $\pi^{\mathbb{R}}, \pi_*^{\mathbb{R}}$, по существу возникали во многих работах (см., например, [4]).

4.4. <u>Функциональные вложения для сжатия</u>. Сначала надо найти

выражения для π, π_*, отвечающие унитарной дилатации (3.I) в пространстве $\mathcal{H}_T = H^2_-(\mathbb{D}, E_*) \oplus H \oplus H^2(\mathbb{D}, E)$, где $T = \mathcal{K}(L)$. Следующее утверждение мне любезно сообщил В.И. Васюнин.

4.5. ЛЕММА. Имеют место равенства (обозначения см. в п.3.3):

$$\pi = \begin{bmatrix} P_- \theta \\ P_0 z (I - zT^*)^{-1} \mathcal{D}_T \Omega \\ P_+ \end{bmatrix}, \quad \pi_* = \begin{bmatrix} P_- \\ P_0 (I - \bar{z} T)^{-1} \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* \\ P_+ \theta^* \end{bmatrix}; \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \pi^* [h_-, h, h_+]^T &= \theta^* h_- + \bar{z} \Omega^* \mathcal{D}_T (I - \bar{z} T)^{-1} h + h_+, \\ \pi_*^* [h_-, h, h_+]^T &= h_- + \Omega_*^* \mathcal{D}_{T^*} (I - zT^*)^{-1} h + \theta h_+ . \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Вторые строки в формулах (4.2), т.е.

$$f(\bar{z}) \mapsto P_0 z (I - zT^*)^{-1} \mathcal{D}_T \Omega f(\bar{z}), \quad g(z) \mapsto P_0 (I - \bar{z} T)^{-1} \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* g(z)$$

следует понимать, как сопряженные операторы к сильным $H^2_-(H^2)$ – функциям – вторым слагаемым в формулах (4.3). Этим выражениям можно придать смысл либо с помощью формальных степенных рядов, либо считая, что f, g берутся из плотного множества функций, аналитических в окрестности единичной окружности $\mathbb{T}$.

4.7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Выведем формулы (4.3); равенства (4.2) из них, очевидно, следуют. Имеем по определению π, π_*:

$$\pi h_+ = [0, 0, h_+]^T, \ h_+ \in H^2(\mathbb{D}, E); \quad \pi_* h_- = [h_-, 0, 0]^T, \ h_- \in H^2_-(\mathbb{D}, E_*).$$

Нам известно, что $\theta = \pi_*^* \pi$, поэтому

$$\pi_*^* [0, 0, h_+]^T = \theta h_+ , \quad \pi^* [h_-, 0, 0]^T = \theta^* h_- .$$

Остается найти $\pi^* [0, h, 0]^T$, $h \in H$. Пусть $e \in E$, $e_* \in E_*$. Имеем $\pi \bar{z}^n e = U^{*n} \pi e$, $\pi_* z^n e_* = U^{n+1} \pi_* (\bar{z} e_*)$. Из формулы (3.I) легко найти (см. также [I5]), что

$$\pi \bar{z}^n e = [*, T^{*(n-1)} \mathcal{D}_T \Omega e, 0]^T, \quad \pi_* z^n e_* = [0, T^n \mathcal{D}_{T^*} \Omega_* e_*, *] .$$

Пусть $\{e_i\}$ – ортонормированный базис в E. Тогда

$$\pi^* [0, h, 0]^T = \sum_{i;\, n=1}^{\infty} (h, T^{*(n-1)} \mathcal{D}_T \Omega e_i) \bar{z}^n e_i =$$

$$= \sum_i \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n \Omega^* \mathcal{D}_T T^{n-1} h, e_i \Big) e_i = \Omega^* \mathcal{D}_T \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}^n T^{n-1} h =$$

$$= \bar{z} \Omega^* \mathcal{D}_T (I - \bar{z} T)^{-1} h.$$

Аналогично находим, что $\pi_*^* [0, h, 0]^T = \Omega_*^* \mathcal{D}_{T*} (I - z T^*)^{-1} h$. ●

4.8. СЛЕДСТВИЕ. $h \mapsto \bar{z} \mathcal{D}_T (I - \bar{z} T)^{-1} h$ есть сжимающий оператор из H в $H_-^2(\mathcal{D}_T)$, $h \mapsto \mathcal{D}_{T*} (I - z T^*)^{-1} h$ есть сжимающий оператор из H в $H^2(\mathcal{D}_{T*})$.

4.9. ЛЕММА. Пусть L - максимальный диссипативный оператор в пространстве H ; $F(L), F_*(L)$ - его граничные пространства, $\psi : E \to F(L)$, $\psi_* : E_* \to F_*(L)$ - некоторые изометрии. Пусть $\pi^{\mathbb{R}}, \pi_*^{\mathbb{R}}$ - функциональные вложения, отвечающие самосопряженной дилатации в пространстве $\mathcal{H}_L = L^2(\mathbb{R}_-, E_*) \oplus H \oplus L^2(\mathbb{R}_+, E)$ с параметрами ψ, ψ_*. Справедливы следующие равенства (в них $\mathcal{F}$ - преобразование Фурье, S - оператор умножения на характеристическую функцию):

$$(\pi^{\mathbb{R}})^* [h_-, h, h_+]^T = S^* \mathcal{F} h_- - \pi^{-1/2} \psi^* \mathcal{P} (L - \bar{\lambda} I)^{-1} h + \mathcal{F} h_+ , \qquad (4.4)$$

$$(\pi_*^{\mathbb{R}})^* [h_-, h, h_+]^T = \mathcal{F} h_- - \pi^{-1/2} \psi_*^* \mathcal{P}_* (L^* - \lambda I)^{-1} h + S \mathcal{F} h_+ \qquad (4.4')$$

$$\pi^{\mathbb{R}} f = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1} S f \,|\, \mathbb{R}_- \\ \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big[(L^* - \lambda I)^{-1} (L - \lambda I) - I \big] \mathcal{P}^{-1} \psi f(\lambda) \, d\lambda \\ \mathcal{F}^{-1} f \,|\, \mathbb{R}_+ \end{bmatrix} , \qquad (4.5)$$

$$\pi_*^{\mathbb{R}} f = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1} f \,|\, \mathbb{R}_- \\ -\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \big[(L - \bar{\lambda} I)^{-1} (L^* - \bar{\lambda} I) - I \big] \mathcal{P}_*^{-1} \psi_* f(\lambda) \, d\lambda \\ \mathcal{F}^{-1} S^* f \,|\, \mathbb{R}_+ \end{bmatrix} \qquad (4.5')$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вторые строки в формулах (4.5),(4.5′) надо понимать, как граничные значения при $\operatorname{Im} \lambda \to +0$ для $f(\lambda)$ из плотного множества. Утверждение леммы, т.е. то, что они задают изометрические операторы, и придает формулам смысл. Отметим также, что хотя $\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}_*^{-1}$ не являются операторами, выражение $\big[(L^* - \bar{\lambda} I)^{-1} (L - \bar{\lambda} I) - I \big] \mathcal{P}^{-1}$ и соответствующее выражение в (4.5′) корректно определены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим формулы (4.4),(4.5); две другие получаются аналогично. Имеем $\pi^{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1}W & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{F}^{-1}W \end{bmatrix} \pi W^{-1}$,

где $W: L^2(\mathbb{D}, \varepsilon) \to L^2(\mathbb{R}, \varepsilon)$ – изометрический изоморфизм (3.I), а π задается формулой (4.2). Ясно, что $\mathcal{F}^{-1} W P_+ W^{-1} f = \mathcal{F}^{-1} P_+ f = (\mathcal{F}^{-1} f) | \mathbb{R}_+$ (здесь через P_+ обозначаются оба проектора $L^2(\mathbb{T}, \varepsilon) \to H^2(\mathbb{T}, \varepsilon)$, $L^2(\mathbb{R}, \varepsilon) \to H^2(\mathbb{C}_+, \varepsilon)$. Из пп.2.I2, 4.2 находим, что

$$\mathcal{F}^{-1} W P_- \theta W^{-1} = \mathcal{F}^{-1} P_- W \theta W^{-1} = \mathcal{F}^{-1} P_- S = (\mathcal{F}^{-1} S) | \mathbb{R}_- .$$

Тем самым проверены I-ая и 3-я строки формулы (4.5), и вместе с тем I-е и 3-е слагаемые (4.4). Имеем с учетом (4.3):

$$N_2(h) \overset{def}{=} (\pi^{\mathbb{R}})^* [0, h, 0]^T = W \pi^* [0, h, 0]^T = W \Omega^* \bar{z} \mathcal{D}_T (I - \bar{z} T)^{-1} h .$$

Как и в теореме 3.7, полагаем $\Omega = \rho \psi$, $\Omega_* = \rho_* \psi_*$. Пусть $\lambda = i(1+z)(1-z)^{-1}$, тогда $z = (\lambda - i)(\lambda + i)^{-1}$. Из (3.I), (2.2) находим:

$$N_2(h) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\bar{\lambda}+i)} \cdot \frac{\bar{\lambda}+i}{\bar{\lambda}-i} \Omega^* \mathcal{D}_T (I - \bar{z} T)^{-1} h = \frac{1}{\sqrt{\pi}(\bar{\lambda}+i)} \psi^* \mathcal{P}(I-T)(I-\bar{z}T)^{-1} h .$$

Пользуясь (I.3), получаем, что $N_2(h) = -\pi^{-1/2} \psi^* \mathcal{P}(L - \bar{\lambda} I)^{-1} h$.

Остается вычислить вторую строку формулы (4.5). Это можно сделать пользуясь равенством (4.2), но мы найдем ее из определения сопряженного оператора. Имеем

$$(\pi^{\mathbb{R}} f, h) = (f, (\pi^{\mathbb{R}})^* [0, h, 0]^T) = -\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\lambda), \psi^* \mathcal{P}(L - \bar{\lambda} I)^{-1} h) d\lambda .$$

Дальнейшие вычисления имеют смысл при $\lambda \in \mathbb{C}_-$ и f из плотного множества функций со значениями в $\psi^*(\mathcal{D}(L)/G_L)$, см. замечание к настоящей лемме (если дефекты конечны, то вторая оговорка не нужна). Обозначая через $[\psi f]$ представитель фактор-класса $\mathrm{mod}\, G_L$, с учетом определения 2.4 имеем:

$$\frac{2}{i}(f(\lambda), \psi^* \mathcal{P}(L - \bar{\lambda} I) h) = \frac{2}{i} \langle \psi f, \mathcal{P}(L - \bar{\lambda} I)^{-1} h \rangle_F =$$

$$= ([\psi f], L(L - \bar{\lambda} I)^{-1} h) - (L[\psi f], (L - \bar{\lambda} I)^{-1} h) =$$

$$= ([\psi f], h) + \lambda([\psi f], (L - \bar{\lambda} I)^{-1} h) - (L[\psi f], (L - \bar{\lambda} I)^{-1} h) =$$

$$= -(((L^* - \lambda I)^{-1} (L - \lambda I) - I)[\psi f], h) .$$

Ясно, что последнее выражение не зависит от представителя $[\psi f]$, и мы получаем равенство (4.5). ●

4.10. Частный случай. Предположим, что имеет смысл мнимая часть $Q = (L - L^*)/2i \geq 0$. Тогда из леммы 2.16 получим

$$\pi^{-1/2}\psi^* \mathcal{P}(L-\lambda I)^{-1} = \pi^{-1/2} \varkappa^* Q^{1/2}(L-\lambda I)^{-1},$$

где $\varkappa : E \longrightarrow \mathcal{B}_Q$ – некоторая изометрия. Тогда

$$(\pi^{\mathbb{R}})^*[h_-, h, h_+]^T = S^* \mathcal{F} h_- - \pi^{-1/2} \varkappa^* Q^{1/2}(L-\lambda I)^{-1} h + \mathcal{F} h_+$$

Аналогично,

$$(\pi_*^{\mathbb{R}})^*[h_-, h, h_+]^T = \mathcal{F} h_- - \pi^{-1/2} \varkappa_*^* Q^{1/2}(L^*-\lambda I)^{-1} h + S \mathcal{F} h_+ .$$

Эти операторы (с $\varkappa = \varkappa_* = id$) и их сплетающие свойства применялись в работе С.Н.Набоко [4]. То, что вторые слагаемые суть сжимающие функции, составляет содержание теоремы I [4].

4.11. Собственные функции самосопряженной дилатации. Поскольку дилатация имеет абсолютно непрерывный спектр [9], можно говорить лишь об обобщенных собственных функциях (в оснащении). Формулы (4.5),(4.5) дают возможность интерпретировать наборы

$$\begin{bmatrix} S(\lambda) e^{-i\lambda\xi} d, & \xi \in \mathbb{R}_- \\ i\sqrt{2}\left[(L^*-\bar\lambda I)^{-1}(L-\bar\lambda I) - I\right] \mathcal{P}^{-1}\psi d & \\ e^{-i\lambda\xi} d, & \xi \in \mathbb{R}_+ \end{bmatrix}, \quad d \in E, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

как "уходящие" собственные функции, а наборы

$$\begin{bmatrix} e^{-i\lambda\xi} d_*, & \xi \in \mathbb{R}_- \\ -i\sqrt{2}\left[(L-\lambda I)^{-1}(L^*-\lambda I) - I\right] \mathcal{P}_*^{-1}\psi_* d_* & \\ S^*(\lambda) e^{-i\lambda\xi} d_*, & \xi \in \mathbb{R}_+ \end{bmatrix}, \quad d_* \in E_*, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

как "приходящие" собственные функции. Для дифференциальных операторов этому высказыванию можно придать точный смысл.

4.12. Остаточная и $*$-остаточная части самосопряженной дилатации. Пусть $\mathcal{L}$ – минимальная самосопряженная дилатация в пространстве $\mathcal{H} = G_* \oplus H \oplus G$; $\pi^{\mathbb{R}}, \pi_*^{\mathbb{R}}$ – отвечающие ей функциональные вложения. Тогда $\mathcal{H}_+ = \mathrm{Ran}\, \pi^{\mathbb{R}} = \mathrm{Span}(e^{i\mathcal{L}t} G, t \in \mathbb{R})$,

$\mathcal{H}_- = \mathrm{Ran}\,\pi_*^{\mathbb{R}} = \mathrm{Span}\,(e^{i\mathcal{X}t}G_*, t\in\mathbb{R})$ суть приводящие $\mathcal{X}$ пространства. <u>Остаточной частью дилатации</u> называется оператор $\mathcal{X}|\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_-$ и $*$-<u>остаточной частью</u> - оператор $\mathcal{X}|\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}_+$.

Пользуясь результатами [I] для сжатия и переходя из круга в полуплоскость, получаем следующие формулы

$$(4.6)\quad \pi^{\mathbb{R}} - \pi_*^{\mathbb{R}} S = \tau^{\mathbb{R}}\Delta^{\mathbb{R}}, \quad \pi_*^{\mathbb{R}} - \pi^{\mathbb{R}} S^* = \tau_*^{\mathbb{R}}\Delta_*^{\mathbb{R}},$$

где

$$\Delta^{\mathbb{R}} = (I - S^*S)^{1/2}, \qquad \Delta_*^{\mathbb{R}} = (I - SS^*)^{1/2},$$

а

$$\tau^{\mathbb{R}} : \Delta^{\mathbb{R}} L^2(\mathbb{R}, E) \to \mathcal{H}, \qquad \tau_*^{\mathbb{R}} : \Delta_*^{\mathbb{R}} L^2(\mathbb{R}, E_*) \to \mathcal{H}$$

суть изометрии такие, что

$$\tau^{\mathbb{R}}(\mathcal{X} + iI)^{-1} = (\mathcal{X} + iI)^{-1}\tau^{\mathbb{R}}, \qquad \tau_*^{\mathbb{R}}(\mathcal{X} + iI)^{-1} = (\mathcal{X} + iI)^{-1}\tau_*^{\mathbb{R}},$$

$$\pi^{\mathbb{R}}(\pi^{\mathbb{R}})^* + \tau_*^{\mathbb{R}}(\tau_*^{\mathbb{R}})^* = I, \qquad \pi_*^{\mathbb{R}}(\pi_*^{\mathbb{R}})^* + \tau^{\mathbb{R}}(\tau^{\mathbb{R}})^* = I.$$

Таким образом, операторы $(\tau^{\mathbb{R}})^*, (\tau_*^{\mathbb{R}})^*$ осуществляют спектральное представление остаточной и $*$-остаточной частей дилатации.

Выпишем теперь формулы, связанные с конкретным видом дилатации (3.II). Явно выписать $\tau^{\mathbb{R}}, \tau_*^{\mathbb{R}}$, однако, затруднительно.

4.I3. ЛЕММА.

$$\tau^{\mathbb{R}}\Delta^{\mathbb{R}} f = \begin{bmatrix} 0 \\ i(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(L-\bar\lambda I)^{-1}(L^*-\bar\lambda I)(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I) - I\right]\mathcal{P}^{-1}\psi f(\lambda)\,d\lambda \\ \mathcal{F}^{-1}(\Delta^{\mathbb{R}})^2 f\,|\,\mathbb{R}_+ \end{bmatrix},$$

$$(\Delta^{\mathbb{R}})^2 = -\psi^*\mathcal{P}\left[(L-\bar\lambda I)^{-1}(L^*-\bar\lambda I)(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I) - I\right]\mathcal{P}^{-1}\psi;$$

$$\tau_*^{\mathbb{R}}\Delta_*^{\mathbb{R}} f = \begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1}(\Delta_*^{\mathbb{R}})^2 f\,|\,\mathbb{R}_- \\ -i(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I)(L-\bar\lambda I)^{-1}(L^*-\bar\lambda I) - I\right]\mathcal{P}_*^{-1}\psi_* f(\lambda)\,d\lambda \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\Delta_*^{\mathbb{R}})^2 = -\psi_*^*\mathcal{P}_*\left[(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I)(L-\bar\lambda I)^{-1}(L^*-\bar\lambda I) - I\right]\mathcal{P}_*^{-1}\psi_*.$$

Доказательство сразу следует из формул (4.5),(4.5′),(2.4),(2.4′). Вторые строки формул снова нужно понимать как граничные значения функций в верхней полуплоскости.

§ 5. Пример. Оператор Шредингера

Здесь мы применим результаты предыдущих параграфов к оператору Шредингера на полуоси

$$ly = -y'' + q(x)y; \quad y'(0) = hy(0), \ \mathrm{Im}\, h > 0, \qquad (5.1)$$

с вещественнозначным потенциалом в случае предельной точки Вейля на бесконечности. Все результаты этого параграфа получены Б.С. Павловым [2] методом обобщенных собственных собственных функций. В последующих работах различных авторов [10],[18], характеристическая функция этого оператора вычислялась и другими способами, в том числе близкими к предлагаемому ниже. Отметим, что в недавней работе [19] рассмотрен случай предельного круга, который также может быть включен в схему настоящей статьи.

5.1. <u>Симметрический оператор, задаваемый дифференциальным выражением (5.1)</u>. Рассмотрим оператор $L_0 y = ly$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с областью определения $\mathcal{D}(L_0) = \{ y \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+) : y(0) = y'(0) = 0 \}$. Предполагается, что (вещественный) потенциал непрерывен на $[0, +\infty)$. Нетрудно проверить следующие свойства.

5.2. ЛЕММА [8]. (i) L_0 симметричен;

(ii) $\mathcal{D}(L_0^*) = \{ y \in C^1(\mathbb{R}_+) : y'$ абсолютно непрерывна, $-y'' + qy \in L^2(\mathbb{R}_+) \}$, $L_0^* y = ly$;

(iii) Индексы дефекта $n_\pm(L_0) \overset{\mathrm{def}}{=} \dim \mathrm{Ker}(L_0^* \mp iI)$ равны между собой и равны либо единице, либо двум.

5.3. <u>Случай предельной точки</u>. Если $n_\pm(L_0) = 1$, говорят, что имеет место случай предельной точки Вейля, (будем тогда писать $q \in (l.p.)$), иначе случай предельного круга (см.[8]). В дальнейшем мы будем предполагать, что $q \in (l.p.)$. Простое достаточное условие (см.[8]) состоит в том, что для некоторой дифференцируемой функции $M(x)$, такой, что $M(x) > 0$, $M'(x) \leqslant \mathrm{const}\, M(x)^{3/2}$, выполнено

$$q(x) \geqslant -M(x), \quad \int_0^\infty (M(x))^{-1/2} dx = \infty.$$

5.4. ЛЕММА [8]. Пусть $q \in (l.p.)$. Рассмотрим оператор

$$L_h \subset L_0^*, \quad \mathcal{D}(L_h) = \{ y \in \mathcal{D}(L_0^*) : y'(0) = h y(0) \}.$$

Тогда

$$(i)(L_h y, y) - (y, L_h y) = 2i \, \mathrm{Im}\, h \cdot |y(0)|^2; \; L_{\bar{h}} = L_h^*;$$

(ii) если $h \in \mathbb{R}$, то $L_h = L_h^*$. Если $\mathrm{Im}\, h > 0$, то L_h – максимальный диссипативный оператор.

5.5. <u>Функция Вейля</u>. Пусть $q \in (l.p.)$ Обозначим через $\psi(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$ решения уравнения $-y'' + qy = \lambda y, \lambda \notin \mathbb{R}$, такие, что

$$\psi(0,\lambda) = -1, \quad \varphi(0,\lambda) = 0,$$

$$\psi'(0,\lambda) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda) = 1.$$

Поскольку $\dim \mathrm{Ker}(L_0^* - \lambda I) = n_\pm(L_0)$, однозначно определена функция $\chi(x,\lambda) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\chi(0,\lambda) = -1$ и $-\chi'' + q\chi = \lambda\chi$. Можно записать:

$$\chi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) + m_\infty(\lambda)\varphi(x,\lambda).$$

Функция $m_\infty(\lambda)$ называется функцией Вейля. Известно [20], что $m_\infty(\lambda)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и $\mathrm{Im}\, m_\infty(\lambda) / \mathrm{Im}\, \lambda < 0$.

Перейдем теперь к анализу диссипативного оператора L_h.

5.6. <u>Граничные пространства</u> (см. пп.2.2, 2.4). Поскольку $L = L_h$ есть диссипативное расширение симметрического оператора, $G_L = \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L^*)$. Имеем $F(L) = \mathcal{D}(L)/G_L$, $F_*(L) = \mathcal{D}(L^*)/G_L$. По лемме 5.4 (i)

$$\| \mathcal{P} y \|_F^2 = \mathrm{Im}\, h \cdot |y(0)|^2, \quad \| \mathcal{P}_* y_* \|_{F_*}^2 = \mathrm{Im}\, h \cdot |y_*(0)|^2.$$

Положим $E = E_* = \mathbb{C}^1$ и определим изометрические изоморфизмы ψ, ψ_*:

$$\psi : E \to F(L), \; \psi(a) = \mathcal{P} y : y \in \mathcal{D}(L_h), \; y(0) = a/\sqrt{\mathrm{Im}\, h}. \tag{5.2}$$

$$\psi_* : E_* \to F_*(L), \; \psi_*(a) = \mathcal{P}_* y : y_* \in \mathcal{D}(L_{\bar{h}}), \; y_*(0) = a/\sqrt{\mathrm{Im}\, h}.$$

5.7. Характеристическая функция. Покажем, что имеет место формула [2]

$$S_{L_h}(\lambda) = \frac{m_\infty(\lambda)+h}{m_\infty(\lambda)+\bar{h}} . \tag{5.3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нужно еще проверить полную несамосопряженность оператора L_∞, т.е. отсутствие у него самосопряженных частей. В предлагаемой схеме автору не удалось это проверить. В работе [2] простота доказана с использованием обобщенных собственных функций на "физическом" уровне строгости. Во всяком случае, (5.3) дает характеристическую функцию простой части оператора L_h.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем из (2.4), полагая $L = L_h$,

$$S(\lambda) = S_L(\lambda) = \psi_*^* \mathcal{P}_*(L^* - \lambda I)^{-1}(L - \lambda I)\mathcal{P}^{-1}\psi,$$

где $\mathcal{P}: \mathcal{D}(L) \to F(L), \mathcal{P}_*: \mathcal{D}(L^*) \longrightarrow F_*(L)$ - естественные проекции. Из (5.2) получаем, что $\mathcal{P}^{-1}\psi a \ni y \in \mathcal{D}(L_h)$, $y(0) = a/\sqrt{\operatorname{Im} h}$. Имеем

$$(L - \lambda I)y = -y'' + qy - \lambda y, (L^* - \lambda I)^{-1}(L - \lambda I)y = y_1,$$

где $-y_1'' + qy_1 - \lambda y_1 = -y'' + qy - \lambda y$, $y_1 \in \mathcal{D}(L_{\bar{h}})$. Наконец, $\psi_*^* \mathcal{P}_* y_1 = \sqrt{\operatorname{Im} h} \cdot y_1(0)$, т.е. $S(\lambda)a = y_1(0)/y(0) \cdot a$. Заметим, что $u = y_1 - y$ есть решение однородного уравнения $-u'' + qu = \lambda u$ из $L^2(\mathbb{R}_+)$. Следовательно, $y_1 - y = B(\lambda)\chi(x,\lambda)$ (см. п.5.5), откуда

$$(y_1 - y)'(0) = -m_\infty(\lambda)(y_1 - y)(0).$$

Но т.к. $y'(0) = hy(0)$, $y_1'(0) = \bar{h}y_1(0)$, получаем, что

$$y_1(0) = \frac{m_\infty(\lambda)+h}{m_\infty(\lambda)+\bar{h}}\, y(0),$$

и утверждение доказано. ●

5.8. Самосопряженная дилатация. Воспользуемся следствием 3.9. Расшифруем условия $f - \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)] \in \mathcal{D}(L)$, $f + \frac{i}{\sqrt{2}}[\psi v_+(0)] \in \mathcal{D}(L^*)$. Пусть $y \in \mathcal{D}(L_h)$, $y(0) = v_+(0)/\sqrt{\operatorname{Im} h}$, $y_* \in \mathcal{D}(L_{\bar{h}})$, $y_*(0) = v_-(0)/\sqrt{\operatorname{Im} h}$. Имеем

$$f-\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi_* v_-(0)]\in\mathcal{D}(L_h)\Leftrightarrow f'(0)-\frac{i}{\sqrt{2}}y'_*(0)=hf(0)-\frac{i}{\sqrt{2}}hy_*(0)$$

$$\Leftrightarrow f'(0)-hf(0)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{h}-h)y_*(0)=\sqrt{2\operatorname{Im}h}\,v_-(0).$$

Аналогично,

$$f+\frac{i}{\sqrt{2}}[\psi v_+(0)]\in\mathcal{D}(L_{\bar{h}})\Leftrightarrow f'(0)+\frac{i}{\sqrt{2}}y'(0)=\bar{h}f(0)+\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{h}y(0)$$

$$\Leftrightarrow f'(0)-\bar{h}f(0)=\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{h}-h)y(0)=\sqrt{2\operatorname{Im}h}\,v_+(0).$$

В результате приходим к следующему виду дилатации $\mathcal{L}$ оператора L_h в пространстве $\mathcal{H}=\mathcal{D}_-\oplus L^2(\mathbb{R}_+)\oplus\mathcal{D}_+,\mathcal{D}_\pm=L^2(\mathbb{R}_\pm)$ [2] :

$$\mathcal{L}\begin{bmatrix} v_- \\ f \\ v_+ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} iv_-' \\ -f''+qf \\ iv_+' \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L})=\Big\{[v_-,f,v_+]^T:v_\pm\in W_2^1(\mathbb{R}_\pm),\ f'(0)-hf(0)=\sqrt{2\operatorname{Im}h}\,v_-(0),\ f'(0)-\bar{h}f(0)=\sqrt{2\operatorname{Im}h}\,v_+(0)\Big\}. \quad (5.4)$$

5.9. <u>Функциональные вложения. "Приходящие" и "уходящие" собственные функции дилатации</u>. Вычисления, такие же, как в п.5.7 (в тех же обозначениях) дают, что

$$[(L^*-\bar{\lambda}I)^{-1}(L-\bar{\lambda}I)-I]\mathcal{P}^{-1}\psi a=B(\lambda)\chi(x,\lambda),$$

$$B(\lambda)=y(0)-y_1'(0)=\frac{\bar{h}-h}{m_\infty(\lambda)+\bar{h}}y(0)=-\frac{i\sqrt{2\operatorname{Im}h}\,a}{m_\infty(\lambda)+\bar{h}}.$$

Таким образом из п.4.II получаем "уходящие" собственные функции [2] :

$$v_\lambda^-=\begin{bmatrix} S(\lambda)e^{-i\lambda\xi},\ \xi\in\mathbb{R}_- \\ \sqrt{2\operatorname{Im}h}\,(m_\infty(\lambda)+\bar{h})^{-1}\chi(x,\lambda),\ x\in\mathbb{R}_+ \\ e^{-i\lambda\xi},\ \xi\in\mathbb{R}_+ \end{bmatrix}$$

Аналогично находятся "приходящие" собственные функции:

$$\vartheta_\lambda^+ = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda\xi}, \ \xi\in\mathbb{R}_- \\ \sqrt{2\operatorname{Im}h}\,(\overline{m_\infty(\lambda)}+h)^{-1}\,\overline{\chi(x,\lambda)}, \ x\in\mathbb{R}_+ \\ S^*(\lambda)e^{-i\lambda\xi}, \ \xi\in\mathbb{R}_+ \end{bmatrix}$$

Дилатация $\mathcal{L}$ есть дифференциальный оператор, и $\vartheta_\lambda^\pm$ - "настоящие" гладкие функции, хотя и не из L^2. Лемма 4.9 показывает, что интегральные операторы с ядрами $\vartheta_\lambda^\pm$ и множителем $(2\pi)^{-1/2}$ суть $\mathcal{T}^R$, $\mathcal{T}_*^R$, т.е. изометрии из $L^2(R)$ в $\mathcal{H}_L$. В терминах функциональных вложений то, что $\vartheta_\lambda^\pm$ собственные функции, означает перестановочность $(\mathcal{L}-\lambda I)^{-1}$ с умножением на $(z-\lambda)^{-1}$, нормировка и формула обращения [2] сводятся к изометричности. Термины "уходящие" и "приходящие" собственные функции означают, что

$$\operatorname{Ran}\mathcal{T}^R = \operatorname{Span}(e^{it\mathcal{L}}\mathcal{D}_+, t\in\mathbb{R}), \ \operatorname{Ran}\mathcal{T}_*^R = \operatorname{Span}(e^{it\mathcal{L}}\mathcal{D}_-, t\in\mathbb{R}).$$

5.10. <u>Собственные функции остаточной и $*$ -остаточной частей дилатации.</u> Имеем из (2.3):

$$(\Delta^R)^2 = (\Delta_*^R)^2 = 1-|S(\lambda)|^2 = 2i\operatorname{Im}h\cdot(m_\infty(\lambda)-\overline{m_\infty(\lambda)})|m_\infty(\lambda)+\bar{h}|^{-2}.$$

Спектр остаточной и $*$ - остаточной частей есть множество $\{\lambda\in\mathbb{R}: m_\infty(\lambda)\notin\mathbb{R}\}$. Применим лемму 4.13. Пусть $y\in\mathcal{D}(L_h)$, $y_*\in\mathcal{D}(L_{\bar{h}})$. Вычисления, аналогичные тем, которые приведены в п.5.7 приводят к равенствам

$$(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I)y = y - y(0)\cdot 2i\operatorname{Im}h(m_\infty(\lambda)+\bar{h})^{-1}\chi(x,\lambda),$$

$$(L-\bar{\lambda}I)^{-1}(L^*-\bar{\lambda}I)y_* = y_* + y_*(0)\cdot 2i\operatorname{Im}h(\overline{m_\infty}(\lambda)+h)^{-1}\overline{\chi(x,\lambda)},$$

откуда

$$[(L-\bar{\lambda}I)^{-1}(L^*-\bar{\lambda}I)(L^*-\lambda I)^{-1}(L-\lambda I)-I]y =$$

$$= y(0)\cdot 2i\operatorname{Im}h\cdot|m_\infty(\lambda)+\bar{h}|^{-2}(\overline{\chi(x,\lambda)}(m_\infty(\lambda)+h)-\chi(x,\lambda)(\overline{m_\infty(\lambda)}+h)).$$

Имеем $\chi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)m_\infty(\lambda)+\psi(x,\lambda)$, причем из определения видно (см. п.5.5), что $\varphi(x,\bar{\lambda})=\overline{\varphi(x,\lambda)}$, $\psi(x,\bar{\lambda})=\overline{\psi(x,\lambda)}$. Отсюда вытекает, что

$$\lim_{\operatorname{Im}\lambda\to+0}(\overline{\chi(x,\lambda)}(m_\infty(\lambda)+h)-\chi(x,\lambda)(\overline{m_\infty(\lambda)}+h)) = (\psi-h\varphi)(m_\infty(\lambda)-\overline{m_\infty(\lambda)}).$$

Таким образом, получаем выражение для $\tau^{\mathbb{R}}$:

$$\tau^{\mathbb{R}}\Delta^{\mathbb{R}}f=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h\varphi(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)}{\sqrt{2\operatorname{Im}h}}(1-|S(\lambda)|^2)f(\lambda)d\lambda \\ \mathcal{F}^{-1}(1-|S(\lambda)|^2)f(\lambda)|\mathbb{R}_+ \end{bmatrix}.$$

Аналогично выводится формула

$$\tau_*^{\mathbb{R}}\Delta_*^{\mathbb{R}}f=\begin{bmatrix} \mathcal{F}^{-1}(1-|S(\lambda)|^2)f(\lambda)|\mathbb{R}_- \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{h}\varphi(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)}{\sqrt{2\operatorname{Im}h}}(1-|S(\lambda)|^2)f(\lambda)d\lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если рассматривать операторы $\tau^{\mathbb{R}}\Delta^{\mathbb{R}}, \tau_*^{\mathbb{R}}\Delta_*^{\mathbb{R}}$ как интегральные по мере $(1-|S(\lambda)|^2)d\lambda$, получим собственные функции непрерывного спектра, найденные Б.С.Павловым [2] . Для остаточной части

$$\vartheta_\lambda^{>}=\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_h(\lambda) \\ e^{-i\lambda\xi} \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -\varphi_h''+q\varphi_h-\lambda\varphi_h=0 \\ (\varphi_h'-h\varphi_h)|_0=0 \\ (\varphi_h'-\bar{h}\varphi_h)|_0=\sqrt{2\operatorname{Im}h} \end{cases}$$

и для $*$ -остаточной части

$$\vartheta_\lambda^{<}=\begin{bmatrix} e^{-i\lambda\xi} \\ \varphi_{\bar{h}}(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} -\varphi_{\bar{h}}''+q\varphi_{\bar{h}}-\lambda\varphi_h=0 \\ (\varphi_{\bar{h}}'-\bar{h}\varphi_{\bar{h}})|_0=0 \\ (\varphi_{\bar{h}}'-h\varphi_{\bar{h}})|_0=\sqrt{2\operatorname{Im}h}. \end{cases}$$

Литература

1. Nikolskiĭ N.K., Vasyunin V.I. A unified approach to function models, and the transcription problem. - LOMI, preprint E-5-86, 1986.
2. Павлов Б.С. Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов. - В кн.: Математическое программирование и смежные вопросы, ЦЭМИ АН СССР, 1976, с.3-69.
3. Павлов Б.С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям. - Матем.сб., 1977, т.102, № 4, с.511-536.

4. Набоко С.Н. Функциональная модель теории возмущений и ее приложения в теории рассеяния. - Тр.Матем.ин-та им.В.А. Стеклова АН СССР, 1980, т.147, с.86-135.
5. Кужель А.В., Кудряшов Ю.Л. Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. - Докл. АН СССР, 1980, т.253, № 4, с.812-815.
6. Кудряшов Ю.Л. Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов. - Теория функций и функц. анализ, 1982, вып.37, с.51-54.
7. Кужель А.В. Самосопряженные и J -самосопряженные дилатации линейных операторов. - Там же, с.54-58.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.2. М.: Мир, 1978.
9. С.-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Мир, 1970.
10. Кужель А.В. Правильные расширения эрмитовых операторов. - Докл.АН СССР, 1980, т.251, № 1, с.30-33.
11. Штраус А.В. Характеристические функции линейных операторов. - Известия АН СССР, сер.матем., 1960, т.24, № 1, с.43-74.
12. Кочубей А.Н. О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. - Матем.заметки, 1975, т.17, № 1, с.41-48.
13. Брук В.М. О расширениях симметрических отношений. - Матем.заметки, 1977, т.22, № 6, с.825-834.
14. Деркач В.А., Маламуд М.М. Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. - Препринт ДонФТИ-85-9(104), Донецк, 1985.
15. Никольский Н.К., Хрущёв С.В. Функциональная модель и некоторые задачи спектральной теории функций. - Тр. Матем.ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 1987, т.176, с.97-210.
16. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора. - Известия АН СССР, сер.матем., 1968, т.32, № 1, с.186-207.
17. Лившиц М.С. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. - Матем.сб., 1946, т.19, № 2, с.239-260.
18. Арлинский Ю.М. О регулярных бирасширениях дифференциальных операторов. - В кн.: Граничные задачи дифференциальных уравнений. Киев: Наук.думка, 1980, с.3-12.
19. Максудов Ф.Г., Аллахвердиев Б.П. К тео-

рии характеристической функции и спектральному анализу диссипативного оператора Шредингера. - Докл.АН СССР, 1988, т.303, № 6, с.1307-1309.
20. Т и т ч м а р ш Е. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.I, II. - М.: ИЛ., 1960.

B.M.Solomyak. On the functional model for dissipative operators. The coordinate-free approach.

Summary

The paper is based on seminar talks and is mostly instructional. Dissipative operators are studied by means of their Caley transforms using the coordinate-free model for contractions developed by N.K.Nikolskii and V.I.Vasyunin. It is shown that different known froms of the characteristic functions and self-adjoint dilation can be derived from a general scheme. Also we find new formulae for the dilation and its eigen-functions which generalize those obtained by B.S.Pavlov for the Shrödinger operator on a half-line with a real-valued potential and a nonreal boundary condition. Several examples are considered.