ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 11 Выпуск 1 (2010)

Труды VII Международной конференции
Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения,
посвященной памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы

СТРУКТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{n\theta\}$ И ЕЁ НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

И. И. Ильясов (г. Актобе, Казахстан)
Ilyassova.G@gmail.com

1. Основные формулы. Обозначения. $\{\alpha\}$ — дробная часть α, $[\alpha]$ — целая часть α.

В дальнейшем под числами будем понимать действительные числа. Пусть $\mu > 0$. Числа α и β называются сравнимыми по модулю μ, если $\alpha - \beta = \mu n$, где n — целое рациональное и обозначается этот факт

$$\alpha \equiv \beta \, (mod \mu) \, .$$

Ясно, что каждое число сравнимо с одним только числом из промежутка $[0, \mu)$, оно и называется остатком заданного числа по модулю μ. Последовательность остатков ρ_n, $\theta \cdot \mathrm{n} \equiv \rho_\mathrm{n} \, (\mathrm{mod}\mu)$, $n = 0, 1, 2, ...$ будем обозначать $R(\theta, \mu)$ [10].

Пусть положительные θ и μ линейно независимы над полем рациональных чисел, причем $\theta < \mu$. Рассмотрим видоизмененный алгоритм Евклида (деление с избытком) для этих чисел.

$$\begin{array}{ll} \mu = \theta \cdot a_1 - \omega_1, & 0 < \omega_1 < \omega_0, \ (\theta = \omega_0) \\ \theta = \omega_1 a_2 - \omega_2, & 0 < \omega_2 < \omega_1 \\ \omega_1 = \omega_2 a_3 - \omega_3, & 0 < \omega_3 < \omega_2 \\ ....., & ..... \\ \omega_{n-1} = \omega_n a_{n+1} - \omega_{n+1} & 0 < \omega_{n+1} < \omega_n \end{array} \qquad (1)$$

Процесс будет бесконечным в силу линейной независимости θ и μ над полем рациональных чисел. Действительно, предполагая обратное, при некотором n получили бы, что $\omega_{n+1} = 0, (\omega_n \neq 0)$. Выражая $\omega_{n-1}, \omega_{n-2}, ..., \omega_0$ через ω_n получаем, что $\theta = A \cdot \omega_n$, $\mu = B \cdot \omega_n$, где A и B — натуральные. Отсюда $B\theta - A\mu = 0$, что является противоречием.

Из (1) получаем, что

$$\frac{\theta}{\mu} = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots}} \tag{2}$$

Бесконечная цепная дробь в правый части (2) является частным случаем бесконечных полурегулярных цепных дробей [5]. Отметим, что из (1) следуют все $a_i \geqslant 2$, $i = 1, 2, ...$Сходимость бесконечной полурегулярной цепной дроби в (2) к $\frac{\theta}{\mu}$ доказывается обычным способом. Причем в силу иррациональности $\frac{\theta}{\mu}$ бесконечное число раз встречаются $a_i \geqslant 3$.

Замечание. Формулы перехода от полурегулярной бесконечной цепной дроби вида

$$p + \cfrac{1}{p_1 + 1 - \cfrac{1}{p_2 + 1 - \ddots}},$$

представляющей иррациональное число θ, к обыкновенной бесконечной цепной дроби

$$q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots}}$$

имеет вид $p = q$, $p_1 = q_1$, $p_{q_2+1} = q_3 + 1$, $p_{q_2+q_4+1} = q_5 + 1$, ... ,$p_{q_2+...+q_{2k}+1} = q_{2k} + 1$, а остальные p_i равны единицы [10].

Определение 2. *Последовательность $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_n, ...$ называется базисной последовательностью $R(\theta, \mu)$.*

Ясно, что $\omega_0 > \omega_1 > ... > \omega_n > ....$ Легко доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$$

Определение 3. $x_0 = 1$, $x_1 = a_1, ..., x_{n+1} = a_{n+1}x_n - x_{n-1}$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1, ..., y_{n+1} = a_{n+1}y_n - y_{n-1}$ *при* $n \geqslant 1$

Лемма 1.

$$\theta x_n = \omega_n + \mu y_n,\ n \geqslant 0.$$

Доказательство. При $n = 0$ равенство проверяется непосредственно. При $n = 1$ оно получается из первого равенства (1).

Пусть теперь при $n \geqslant 1$, тогда с учетам (1) имеем, что

$$\begin{aligned}&\theta x_{n+1} = \theta(a_{n+1}x_n - x_{n-1}) = a_{n+1}\theta x_n - \theta x_{n-1} = \\ &= a_{n+1}(\omega_n + \mu y_n) - (\omega_{n-1} + \mu y_{n-1}) = a_{n+1}\omega_n - \omega_{n-1} + \mu(a_{n+1}y_n - y_{n-1}) = \\ &= \omega_{n+1} + \mu y_{n+1}\end{aligned}$$

Лемма доказана по принципу математической индукции.

Обозначение. $a_i - 1 = p_i,\ \ i = 1, 2, \ \ldots,$

Теорема 1. *Каждое натуральное число x единственным образом представляется в виде*

$$x = x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1} \tag{3}$$

с условиями

1) $t_{k+1} \neq 0$;
2) $0 \leqslant t_i \leqslant p_i, \quad t_i$ — *целые* $i = 1, 2, ..., k+1$;
3) *для любых* i *и* j, *где* $1 \leqslant i < j \leqslant k+1$;
$(k \geqslant 1)\,(t_i, t_{i+1}, ...t_{j-1}, t_j) \neq (p_i, p_{i+1} - 1, p_{j-1} - 1, p_j)$.

И каждое число

$$x = x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1}$$

с условиями 1), 2), 3) меньше чем x_{k+1}.

Лемма 2. *При* $1 \leqslant i < j \quad (x_{-1} = 0)$

$$x_j + x_{i-2} = x_{i-1}p_i + x_i(p_{i+1} - 1) + ... + x_{j-2}(p_{j-1} - 1) + x_{j-1}p_j$$

Доказательство. Проведем по индексу j

$$1) j = i + 1$$

$$x_{i-1}p_i + x_ip_{i+1} = x_{i-1}a_i - x_{i-1} + x_ip_{i+1} = |x_i = a_ix_{i-1} - x_{i-2}| =$$
$$= x_i + x_{i-2} - x_{i-1} + x_ip_{i+1} = a_{i+1}x_i - x_{i-1} + x_{i-2} = x_{i+1} + x_{i-2}$$

$$2) j > i + 1$$

$$x_{j-1}p_i + x_i(p_{i+1} - 1) + ... + x_{j-2}(p_{j-1} - 1) + x_{j-1}p_j =$$
$$= x_{i-1}p_i + x_i(p_{i+1} - 1) + ... + x_{j-2}p_{j-1} - x_{j-2} + x_{j-1}p_j =$$
$$= x_{j-1} + x_{i-2} - x_{j-2} + x_{j-1}p_j = a_jx_{j-1} - x_{j-2} + x_{i-2} = x_j + x_{i-2}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *При выполнении условии 1), 2), 3)*

$$x = x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1} < x_{k+1}.$$

Доказательство. Если x состоит из одного слагаемого

$$x = x_0t_1 \leqslant x_0p_1 \leqslant p_1 < a_1 = x_1,$$

то лемма доказана.

В дальнейшем рассмотрим следующие случаи:

а) $t_i \leqslant p_i - 1, \ i = 1, ..., k+1$

$$x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1} \leqslant x_0(p_1 - 1) + ... + x_k(p_{k+1} - 1) <$$
$$< x_0p_1 - x_0 + ... + x_kp_{k+1} < x_{k+1} - x_0 + x_{-1} < x_{k+1}$$

по лемме 2

б) Среди t_i одно лишь $t_i = p_i$. В этом случае

$$x \leqslant x_0(p_1 - 1) + ... + x_k p_{k+1} = x_0 p_1 - x_0 + ... + x_k p_{k+1} = \\ = x_{k+1} + x_{-1} - x_0 < x_{k+1}$$

в) Среди t_i равных p_i больше одного, и пусть $t_i = p_i$, $t_j = p_j$, $i < j$ первая начальная пара. Тогда по условию 3) существует $0 \leqslant t_s \leqslant p_s - 2$, $i < s < j$

$$x = x_0 t_1 + ... + x_{i-1} p_i + ... + x_{j-1} p_j + ... + x_k t_{k+1} < \\ < x_0 t_1 + ... + x_j + x_{-1} - x_s + x_j t_{j+1} + .. + x_k t_{k+1} \leqslant \\ \leqslant x_0 t_1 + ... + x_j(t_{j+1} + 1) + ... + x_k t_{k+1}.$$

По условию 3) $t_{j+1} \leqslant p_{j+1} - 1$. Продолжая предыдущее рассуждение, приходим к а) или б). Отсюда следует, что $x < x_{k+1}$.

Следствие 1. *Если*

$$x = x_0 t_1 + x_1 t_2 + ... + x_k t_{k+1}$$

$$x' = x_0 t_1' + x_1 t_2' + ... + x_k t_{k+1}'$$

с условиями 1), 2), 3), то при $t_{k+1} = t'_{k+1}$, $t_i = t'_i$, $t_{i+1} < t'_{i+1}$ $x < x'$.

Доказательство. (теоремы) Пусть x некоторое натуральное число. Ясно, что существует номер k, при котором

$$x_k \leqslant x < x_{k+1}.$$

Произведем деление с остатком x на x_k, полученный остаток на x_{k-1} и т.д.:

$$x = x_k t_{k+1} + r_k,\ 0 \leqslant r_k < x_k \\ r_k = x_{k-1} t_k + r_{k-1},\ 0 \leqslant r_{k-1} < x_{k-1} \\ ..... \\ r_2 = x_1 t_2 + r_1,\ 0 \leqslant r_1 < x_2 \\ r_1 = x_0 t_1 + 0, (x_0 = 1)$$

В результате получаем, что $x = x_0 t_1 + x_1 t_2 + ...x_{k-1} t_k + x_k t_{k+1}$ с $t_{k+1} \neq 0$.
Так как $x < x_{k+1}$ т.е.

$$x_k t_{k+1} + r_k < a_{k+1} x_k - x_{k-1}$$

Отсюда

$$x_k t_{k+1} < a_{k+1} x_k$$

или

$$t_{k+1} < a_{k+1}$$

т.е. $t_{k+1} < p_{k+1}$. Продолжая, аналогичным рассуждением получаем, что

$$t_k < p_k, \ldots, t_2 < p_2, t_1 < p_1.$$

Таким образом, выполняются условия 1), 2) теоремы.

Теперь докажем выполнимость условия 3).

Так как

$$\begin{aligned}
&r_j = x_{j-1}t_j + r_{j-1},\ 0 \leqslant r_{j-1} < x_{j-1}\\
&r_{j-1} = x_{j-2}t_{j-1} + r_{j-2},\ 0 \leqslant r_{j-2} < x_{j-2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&r_{i+1} = x_i t_{i+1} + r_i,\ 0 \leqslant r_i < x_i\\
&r_i = x_{i-1}t_i + r_{i-1},\ 0 \leqslant r_{i-1} < x_{i-1},
\end{aligned}$$

то

$$r_j = x_{i-1}t_i + x_i t_{i+1} + \ldots + x_{j-2}t_{j-1} + x_{j-1}t_j + r_{i-1}.$$

Если предположить, что

$$(t_i, t_{i+1}, \ldots t_{j-1}, t_j) = (p_i, p_{i+1} - 1, p_{j-1} - 1, p_j),$$

то по пункту б) следствия леммы 2 получили бы, что

$$r_j \geqslant x_j,$$

это противоречит тому, что $r_j < x_j$. Следовательно, выполняется условие 3)

Единственность представления (3) следует из следствия леммы 3. Теорема доказана.

Теорема 2. *Каждое отличное от нуля число $\lambda \in R(\theta, \mu)$ единственным образом представляется в виде*

$$\lambda = \omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + \ldots + \omega_k t_{k+1},\ k \geqslant 0 \tag{4}$$

с условиями

1) $t_{k+1} \neq 0$
2) $0 \leqslant t_i \leqslant p_i, \quad t_i -$ *целые*, $i = 1, 2, \ldots, k+1$
3) *для любых* i *и* j, *где* $1 \leqslant i < j \leqslant k+1$
$(k \geqslant 1)$ $(t_i, t_{i+1}, \ldots t_{j-1}, t_j) \neq (p_i, p_{i+1} - 1, p_{j-1} - 1, p_j)$.

И всякое число указанного вида с условиями 1), 2), 3) принадлежит $R(\theta, \mu)$.

Для доказательства теоремы приведем следующие леммы.

Лемма 4. *При* $1 \leqslant i < j$ $(\omega_{-1} = \mu)$

$$\omega_j + \omega_{i-2} = \omega_{i-1}p_i + \omega_i(p_{i+1} - 1) + ... + \omega_{j-2}(p_{j-1} - 1) + \omega_{j-1}p_j.$$

Доказательство. По (1)

$$\begin{aligned}
&\omega_{i-2} = \omega_{i-1}a_i - \omega_i = \omega_{i-1}p_i + \omega_{i-1} - \omega_i = \\
&= \omega_{i-1}p_i + \omega_i a_{i+1} - \omega_{i+1} - \omega_i = \omega_{i-1}p_i + \omega_i p_{i+1} - \omega_{i+1} = \\
&= \omega_{i-1}p_i + \omega_i(p_{i+1} - 1) + \omega_i - \omega_{i+1} = \\
&= \omega_{i-1}p_i + \omega_i(p_{i+1} - 1) + \omega_{i+1}a_{i+2} - \omega_{i+2} - \omega_{i+1} = \\
&= \omega_{i-1}p_i + \omega_i(p_{i+1} - 1) + \omega_{i+1}p_{i+2} - \omega_{i+2} = \\
&= \omega_{i-1}p_i + \omega_i(p_{i+1} - 1) + \omega_{i+1}(p_{i+2} - 1) + \omega_{i+1} - \omega_{i+2} = \\
&= ... = \omega_{i-1}p_i + \omega_i(p_{i+1} - 1) + ... + \omega_{j-2}(p_{j-1} - 1) + \omega_{j-1}p_j - \omega_j.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 5. λ *вида* (4) *с условиями 1), 2), 3) меньше* μ.

Доказательство. В случае одного слагаемого в (4) вида
$\lambda = \omega_0 t_1 \leqslant \omega_0 p_1 \leqslant \omega_0(a_1 - 1) = \omega_0 a_1 - \omega_0 = \mu + \omega_1 - \omega_0 < \mu$, т. к $\omega_1 < \omega_0$.

В дальнейшем, предположим, что количество слагаемых более одного. И рассмотрим следующие случаи:

а) Все $t_i \leqslant p_i - 1, \quad i = 1, 2, ..., k+1$

б) Среди t_i одно лишь равно p_i

в) Среди t_i не менее двух, равных соответствующим p_i.

В случае а)

$$\begin{aligned}
&\lambda \leqslant \omega_0(p_1 - 1) + ... + \omega_k(p_{k+1} - 1) < \omega_0 p_1 - \omega_0 + ... + \omega_k p_{k+1} - \omega_k < \\
&< \omega_{-1} + \omega_{k+1} - \omega_k - \omega_0 < \omega_{-1} = \mu.
\end{aligned}$$

В случае б)

$$\lambda \leqslant \omega_0 p_1 + \omega_1(p_2 - 1) + ... + \omega_k(p_{k+1} - 1) = \mu + \omega_{k+1} - \omega_k < \mu \quad \begin{matrix}(t_i \leqslant p_i - 1) \\ i = 1, 2, \ldots, k+1\end{matrix}$$

В случае в)

$$\lambda = \omega_0 t_1 + ... + \omega_{i-2}t_{i-1} + \omega_{i-1}p_i + ... + \omega_{j-1}p_j + ... + \omega_k t_{k+1}\,(1 \leqslant i < j).$$

(p_i, p_j) первая пара справа. Тогда по лемме 1

$$\lambda = \omega_0 t_1 + ... + \omega_{i-2}t_{i-1} + \omega_{i-2} + \omega_j - \omega_{s-1} + \omega_j t_{j+1} + ... + \omega_k t_{k+1}$$

$$(\omega_{s-1}t_s,\ t_s \leqslant p_s - 2,\ i < s < j\ , ...,\ \omega_{s-1} > \omega_j)$$

Следовательно

$$\lambda < \omega_0 t_1 + ... + \omega_{i-2}(t_{i-1} + 1) + ... + \omega_j t_{j+1} + ... + \omega_k t_{k+1}$$

Таким образом, двигаясь, справа налево приходим или к случаю а) или б) и, следовательно, получаем, что $\lambda < \mu$.

Лемма доказана.

Возможность представления. Пусть x — произвольное натуральное число. По теореме 1 x представляется в виде

$$x = x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1}$$

с условиями 1), 2), 3). По лемме 1

$$\begin{aligned}\theta x &= \theta(x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1}) = (\theta x_0)t_1 + (\theta x_1)t_2 + ... + (\theta x_k)t_{k+1} = \\ &= (\omega_0 + \mu y_0)t_1 + (\omega_1 + \mu y_1)t_2 + ... + (\omega_k + \mu y_k)\,t_{k+1} = \\ &= \omega_0t_1 + \omega_1t_2 + ... + \omega_kt_{k+1} + \mu\,(y_0t_1 + y_1t_2 + ... + y_kt_{k+1})\end{aligned}$$

По лемме 5

$$\lambda = \omega_0t_1 + \omega_1t_2 + ... + \omega_kt_{k+1} < \mu,$$

а $y_0t_1 + y_1t_2 + ... + y_kt_{k+1}$ — неотрицательные целые, следовательно $\lambda \in R\,(\theta, \mu)$.

Единственность представления. Пусть $\lambda = \omega_0t'_1 + \omega_1t'_2 + ... + \omega_st'_{s+1}$. Тогда

$$\theta x' = \theta\left(x_0t'_1 + x_1t'_2 + ... + x_st'_{s+1}\right) = \lambda + \mu\left(y_0t'_1 + y_1t'_2 + ... + y_st'_{s+1}\right).$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}\theta x &= \lambda + \mu y \quad & y &= y_0t_1 + ... + y_kt_{k+1} \\ \theta x' &= \lambda + \mu y' & y' &= y_0t'_1 + ... + y_st'_{s+1}\end{aligned}$$

Отсюда

$$\theta(x - x') = \mu(y - y')$$

Если предположить $x \neq x'$, то θ и μ линейно зависимы, что противоречит исходному условию. Следовательно

$$x = x'$$

Тогда по теореме 1 $s = k$ и $t_1 = t'_1$, $t_2 = t'_2$, ..., $t_{k+1} = t'_{k+1}$. Теорема доказана.

Определение 4. . *Число $x = x_0t_1 + x_1t_2 + ... + x_kt_{k+1}$ с условиями 1), 2), 3) называется координатой числа $\lambda = \omega_0t_1 + \omega_1t_2 + ... + \omega_kt_{k+1}$ в последовательности $R\,(\theta, \mu)$.*

Определение 5. . *Пусть λ и $\lambda' \in R\,(\theta, \mu)$. Будем говорить, что λ предшествует λ' в $R\,(\theta, \mu)$, если $x < x'$, где x и x' соответствующие координаты λ и λ' в $R\,(\theta, \mu)$. Предшествование λ по отношению к λ' обозначается $\lambda \prec \lambda'$.*

Обозначения. $M(T_1, T_2, ..., T_k)$ — множество чисел $\lambda \in R(\theta, \mu)$ с условием $\lambda \prec \omega_1 T_1 + \omega_1 T_2 + ... + \omega_{k-1} T_k$ и с условиями 1), 2), 3)

$$M_k = M(p_1 - 1, p_2 - 1, ..., p_{k-1} - 1, p_k),\ k \geqslant 2$$

$$M_1 = M(p_1)$$

Теорема 3.

$$M(T_1, T_2, ..., T_k, T_{k+1}) = \bigcup_{t_{k+1}=0}^{T_{k+1}-1} (M_k + \omega_k t_{k+1}) \bigcup (M(T_1, T_2, ..., T_k) + \omega_k T_{k+1}) \quad (5)$$

Доказательство. Разобьем множество $M(T_1, ..., T_k, T_{k+1})$ на два подмножества вида
первое: $\{\omega_0 t_1 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1}\}$ где $t_{k+1} \leqslant T_{k+1} - 1$
второе: $\{\omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + ... + \omega_k$"$_{k+1}\}$

При $t_{k+1} \leqslant T_{k+1} - 1$ для всевозможных значений $t_1, t_2, ..., t_k$ с условиями 1), 2), 3), включая $(0, \ldots, 0)$

$$\omega_0 t_1 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} \prec \omega_0 T_1 + ... + \omega_{k-1} T_k + \omega_k T_{k+1}.$$

так как

$$x_0 t_1 + ... + x_{k-1} t_k + x_k t_{k+1} < x_0 T_1 + ... + x_{k-1} T_k + x_k T_{k+1}$$

где

$$\{\omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + ... + \omega_k t_{k+1}\} = M_k$$

Действительно, во-первых, в силу $x_0 t_1 + ... + x_{k-1} t_k < x_k$
имеем, что

$$\omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + ... + \omega_{k-1} t_k \prec \omega_k,$$

во-вторых

$$x_0(p_1 - 1) + \ldots + x_{k-2}(p_{k-1} - 1) + x_{k-1} p_k = x_k - 1$$

Следовательно

$$x_0 t_1 + \ldots + x_{k-1} t_k \leqslant x_0(p_1 - 1) + \ldots + x_{k-2}(p_{k-1} - 1) + x_{k-1} p_k$$

и

$$\{\omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + ... + \omega_k t_{k+1}\} =_k$$

Поэтому первое подмножества совпадает с

$$\bigcup_{t_{k+1}=0}^{T_{k+1}-1} (M_k + \omega_k t_{k+1})$$

Так как во втором подмножестве

$$\omega_0 t_1 + \ldots + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} \prec \omega_0 T_1 + \ldots + \omega_{k-1} T_k + \omega_k T_{k+1}$$

то

$$\omega_0 t_1 + \ldots + \omega_{k-1} t_k \prec \omega_0 T_1 + \ldots + \omega_{k-1} T_k$$

и верно обратное утверждение, то есть второе подмножество совпадает с

$$M(T_1, T_2, ..., T_k) + \omega_k T_{k+1}$$

Теорема доказана.

Обозначение. $R\,(n\theta < \lambda, \mu)$ Обозначает множество чисел $R\,(\theta, \mu)$ меньшееλ.

Теорема 4.

$$R\,(n\theta < \omega_0, \mu) = R(\omega_1, \omega_0).$$

Доказательство. Пусть $n\theta \equiv \omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} (mod \mu)$. Если $\omega_0 t_1 + \omega_1 t_2 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} < \omega_0$, то $t_1 = 0$ т.е

$$n\theta \equiv \omega_1 t_2 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} (mod \mu)$$

с условиями 1), 2), 3) для t_2, ..., t_{k+1}. Тогда по теореме 2 при $\theta = \omega_1$, $\mu = \omega_0$ $\omega_1 t_2 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} \in R(\omega_1, \omega_0)$. Верно и обратное утверждение.

Теорема доказана.

Из этой теоремы получаем последовательность

$$R\,(\theta, \mu) \supset R(\omega_1, \omega_0) \supset R(\omega_2, \omega_1) \supset ...$$

Обозначения. $x'_0 = 1$, $x'_1 = a_2$, $x'_2 = a_3 x'_1 - x'_0$, ..., $x'_n = a_{n+1} x'_{n-1} - x'_{n-2}$,

$$y'_0 = 0,\ y'_1 = 1,\ y'_2 = a_3 y'_1 - y'_0,\ ...,\ y'_n = a_{n+1} y'_{n-1} - y'_{n-2}$$

Лемма 6. $\omega_1 x'_n = \omega_{n+1} + \omega_0 y'_n$, $n = 0, 1, 2, ...$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Следствие 2.

$$\omega_1(x'_0 t_1 + x'_1 t_2 + ... + x'_{k-1} t_{k+1}) = \omega_1 t_2 + ... + \omega_{k-1} t_k + \omega_k t_{k+1} + \omega_0(y'_0 t_1 + ... + y'_{k-1} t_{k+1}).$$

Следствие 3. *Если* $x_1 t_2 + ... + x_k t_{k+1}$ *координаты* λ *в* $R\,(\theta, \mu)$, *то* $x'_0 t_1 + x'_1 t_2 + ... + x'_{k-1} t_{k+1}$ *координаты* λ *в* $R\,(\omega_1, \omega_0)$.

2. О структуре последовательности $\{n\theta\}$ для квадратической иррациональности. Вопрос определения структуры последовательности $\{n\theta\}$, $n = 1, 2, \ldots$ сводится к определению базисной последовательности $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$.

Пусть $0 < \theta < 1$ и θ квадратическая иррациональность. Тогда, как известно по теореме Эйлера - Лагранжа она разлагается обыкновенную бесконечную, периодическую цепную дробь. Отсюда имеем, что θ разлагается в полурегулярную бесконечную периодическую цепную дробь вида (2).

В начале предположим, что θ разлагается в чистую периодическую, полурегулярную бесконечную цепную дробь с периодом $a_1, a_2, ..., a_\tau$

$$
\begin{aligned}
&1 = \theta \cdot a_1 - \omega_1,\ 0 < \omega_1 < \theta,\ (\omega_{-1} = 1,\ \theta = \omega_0)\\
&\omega_0 = \omega_1 \cdot a_2 - \omega_2,\ 0 < \omega_2 < \omega_1\\
&\omega_1 = \omega_2 \cdot a_3 - \omega_3,\ 0 < \omega_3 < \omega_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_{\tau-2} = \omega_{\tau-1} \cdot a_\tau - \omega_\tau,\ 0 < \omega_\tau < \omega_{\tau-1}\\
&\omega_{\tau-1} = \omega_\tau \cdot a_{\tau+1} - \omega_{\tau+1},\ 0 < \omega_{\tau+1} < \omega_\tau\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Следовательно

$$(a_1, a_2,\ \ldots.\ , a_\tau) = (a_{\tau+1}, a_{\tau+2},\ \ldots.\ , a_{2\tau}) = \ldots$$

Обозначим через $æ_0, æ_1, ..., æ_{\tau-1}$ соответствующие равные отношения:

$$
\begin{aligned}
æ_0 &= \frac{\omega_0}{\omega_{-1}} = \frac{\omega_\tau}{\omega_{\tau-1}} = \frac{\omega_{2\tau}}{\omega_{2\tau-1}} = \ldots = \frac{\omega_{k\tau}}{\omega_{k\tau-1}}\\
æ_0 &= \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_{\tau+1}}{\omega_\tau} = \frac{\omega_{2\tau+1}}{\omega_{2\tau}} = \ldots = \frac{\omega_{k\tau+1}}{\omega_{k\tau}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
æ_{\tau-1} &= \frac{\omega_{\tau-1}}{\omega_{\tau-2}} = \frac{\omega_{\tau+\tau-1}}{\omega_{\tau+\tau-2}} = \frac{\omega_{2\tau+\tau-1}}{\omega_{2\tau+\tau-2}} = \ldots = \frac{\omega_{k\tau+\tau-1}}{\omega_{k\tau+\tau-2}}
\end{aligned}
$$

с учетом $\omega_{-1} = 1$ получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\omega_{k\tau} = æ_0(æ_0æ_1...æ_{\tau-1})^k = \omega_0\omega_{\tau-1}^k\\
&\omega_{k\tau+1} = æ_0æ_1(æ_0æ_1...æ_{\tau-1})^k = \omega_1\omega_{\tau-1}^k\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_{k\tau+r} = æ_0æ_1...æ_r(æ_0æ_1...æ_{\tau-1})^k = \omega_r\omega_{\tau-1}^k, (0 \leqslant r \leqslant \tau - 1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\omega_{k\tau+\tau-1} = æ_0æ_1...æ_{\tau-1}(æ_0æ_1...æ_{\tau-1})^k = \omega_{\tau-1}\omega_{\tau-1}^k\\
&\omega^{(k\tau+r)} = \omega_r\omega_{\tau-1}^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

или

$$\begin{aligned}
&\omega_{k\tau} = \omega_0\omega_{\tau-1}^k \\
&\omega_{k\tau+1} = \omega_1\omega_{\tau-1}^k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\omega_{k\tau+r} = \omega_r\omega_{\tau-1}^k, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\omega_{k\tau+\tau-1} = \omega_{\tau-1}\omega_{\tau-1}^k \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots
\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\omega_0,\ \omega_1, \omega_2,\ \ldots\ \omega_n,\ \ldots$ состоит из объединения τ геометрических прогрессий. Теперь определим $\omega_{\tau-1}$ следующим образом:

$$\theta = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ldots \\ \qquad -\cfrac{1}{a_\tau - \theta}}},$$

то

$$\theta = \frac{(a_\tau - \theta)y_{\tau-1} - y_{\tau-2}}{(a_\tau - \theta)x_{\tau-1} - x_{\tau-2}} = \frac{y_\tau - \theta y_{\tau-1}}{x_\tau - \theta x_{\tau-1}}$$

Отсюда

$$x_{\tau-1}\theta^2 - (x_\tau + \mathrm{y}_{\tau-1})\theta + \mathrm{y}_\tau = 0.$$

Подставляя значение θ

$$\theta = \frac{y_{\tau-1} + \omega_{\tau-1}}{x_{\tau-1}}$$

в это уравнения с учетом

$$x_{\tau-1}y_\tau - x_\tau y_{\tau-1} = 1$$

получаем, что

$$\omega_{\tau-1}^2 + (y_{\tau-1} - x_\tau)\omega_{\tau-1} + 1 = 0,$$

т. е $\omega_{\tau-1}$ является единицей поля $Q(\theta)$.

Теперь переходим к случаю смешанной бесконечной полурегулярной периодической цепной дроби

$$\omega_{-1} = \omega_0 \cdot a_1 - \omega_1, \qquad (\omega_{-1} = 1)$$
$$\omega_0 = \omega_1 \cdot a_2 - \omega_2,$$
$$\omega_1 = \omega_2 \cdot a_3 - \omega_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\omega_{k-2} = \omega_{k-1} \cdot a_k - \omega_k,$$
$$\omega_{k-1} = \omega_k \cdot a_{k+1} - \omega_{k+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\omega_0}{\omega_{-1}} = \frac{1}{a_1 - \dfrac{\omega_1}{\omega_0}}$$
$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{a_2 - \dfrac{\omega_2}{\omega_1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\omega_{k-1}}{\omega_{k-2}} = \frac{1}{a_k - \dfrac{\omega_k}{\omega_{k-1}}}$$
$$\frac{\omega_k}{\omega_{k-1}} = \frac{1}{a_{k+1} - \dfrac{\omega_{k+1}}{\omega_k}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пусть $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+\tau}, \ k \geqslant 1$ период бесконечной цепной дроби; следовательно

$$(a_{k+1+\tau}, a_{k+2+\tau}, \ldots, a_{k+2\tau})$$
$$(a_{k+1+2\tau}, a_{k+2+2\tau}, \ldots, a_{k+3\tau})$$
$$(a_{k+1+3\tau}, a_{k+2+3\tau}, \ldots, a_{k+4\tau})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

равны периоду бесконечной цепной дроби.

Обозначим через $A_n = a_{k+n}, \ n = 1, 2, \ldots$

Тогда

$$\omega_{k-1} = \omega_k \cdot A_1 - \omega_{k+1},$$
$$\omega_k = \omega_{k+1} \cdot A_2 - \omega_{k+2},$$
$$\omega_{k+1} = \omega_{k+2} \cdot A_3 - \omega_{k+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда при обозначениях

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\Omega_0}{1} = \dfrac{\omega_k}{\omega_{k-1}}, & \dfrac{\Omega_1}{\Omega_0} = \dfrac{\omega_{k+1}}{\omega_k}, \\ \dfrac{\Omega_2}{\Omega_1} = \dfrac{\omega_{k+2}}{\omega_{k+1}}, & , \dfrac{\Omega_l}{\Omega_{l-1}} = \dfrac{\omega_{k+l}}{\omega_{k-1+l}}, \ \ldots , \end{array} \tag{6}$$

имеем, что

$$\begin{array}{l} 1 = \Omega_0 \cdot A_1 - \Omega_1, \ \ \Omega_1 < \Omega_0 \\ \Omega_0 = \Omega_1 \cdot A_2 - \Omega_2, \ \Omega_2 < \Omega_1 \\ \Omega_1 = \Omega_2 \cdot A_3 - \Omega_3, \ \Omega_3 < \Omega_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Из (6) получаем, что

$$\Omega_l = \frac{\omega_{k+l}}{\omega_{k-1}}, \ l = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

В силу периодичности последовательности, $a_1, a_2, \ \ldots . \ , a_k, a_{k+1}, \ \ldots$, начиная с $k+1$ имеем, что $A_1, A_2, \ \ldots . \ , A_\tau, \ \ldots$, чисто периодическая последовательность. Обозначим через

$$\begin{array}{l} X_0 = 1, \ X_1 = A_1, \ \ldots, \ X_2 = A_2 X_1 - X_2, \ \ldots , \ X_{n+1} = A_{n+1} X_n - X_{n-1}, \ \ldots , \\ Y_0 = 0, \ Y_1 = 1, \ Y_2 = A_2 \ , \ldots , Y_{n+1} = A_{n+1} Y_n - Y_{n-1}, \ \ldots , \end{array}$$

По чисто периодическому случаю

$$\Omega_{\tau s + r} = \Omega_r \cdot \Omega_{\tau-1}^s, \ s = 0, 1, 2, \ \ldots \quad 0 \leqslant r \leqslant \tau - 1$$

$\omega_{k+\tau s+r} = \omega_{k+r} \left(\frac{\omega_{k+\tau-1}}{\omega_{k-1}} \right)^s$ или $\omega_{k+\tau s+r} = \omega_{k+r} \varepsilon^s$. ε-единица поля $Q(\theta)$.

Следовательно, последовательность $\omega_0, \ \omega_1, \ldots , \ \omega_n, \ \ldots$, начиная с ω_k, распадается на τ геометрические прогрессии:

$$\begin{array}{l} \omega_{k+\tau s} = \omega_k \cdot \varepsilon^s \\ \omega_{k+\tau s+1} = \omega_{k+1} \cdot \varepsilon^s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{k+\tau s+(\tau-1)} = \omega_{k+\tau-1} \cdot \varepsilon^s \quad s = 0, 1, 2, \ \ldots , \end{array}$$

где

$$\varepsilon^2 + (Y_{\tau-1} - X_\tau)\varepsilon + 1 = 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \frac{1}{X_\tau - Y_{\tau-1} - \frac{1}{X_\tau - Y_{\tau-1} - \ldots}}$$

и является единицей поля $Q(\theta)$.

Пример. $\theta = \cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3-\dots}}}}}}}, \quad (\omega_0 = \theta)$

$$\tau = 5\omega_0 = \sqrt{7} - 2, 0 < \omega_0 < 1, \omega_0 x_n = \omega_n + y_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$$

$$(\sqrt{7} - 2)x_n - y_n = \omega_n$$

$$\omega_n = x_n\sqrt{7} - (2x_n + y_n)$$

$$\varepsilon^2 + (Y_{\tau-1} - X_\tau)\varepsilon + 1 = 0$$

$$\varepsilon^2 + (Y_4 - X_5)\varepsilon + 1 = 0$$

$$\varepsilon^2 - 16\varepsilon + 1 = 0,$$

$$\varepsilon = 8 - 3\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{1+5s} &= \omega_1 \cdot \varepsilon^s \\
\omega_{2+5s} &= \omega_2 \cdot \varepsilon^s \\
\omega_{3+5s} &= \omega_3 \cdot \varepsilon^s \\
\omega_{4+5s} &= \omega_4 \cdot \varepsilon^s \\
\omega_{5+5s} &= \omega_5 \cdot \varepsilon^s \quad s = 0, 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

$$s = 0 :$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2\sqrt{7} - 5 \\
\omega_2 &= 5\sqrt{7} - 13 \\
\omega_3 &= 8\sqrt{7} - 21 \\
\omega_4 &= 11\sqrt{7} - 29 \\
\omega_5 &= 14\sqrt{7} - 37
\end{aligned}$$

$$s = 1 :$$

$$\begin{aligned}
\omega_6 &= (2\sqrt{7} - 5)(8 - 3\sqrt{7}) \\
\omega_7 &= (5\sqrt{7} - 13)(8 - 3\sqrt{7}) \\
\omega_8 &= (8\sqrt{7} - 21)(8 - 3\sqrt{7}) \\
\omega_9 &= (11\sqrt{7} - 29)(8 - 3\sqrt{7}) \\
\omega_{10} &= (14\sqrt{7} - 37)(8 - 3\sqrt{7})
\end{aligned}$$

$$s = 2 :$$

$$\omega_{11} = (2\sqrt{7} - 5)(8 - 3\sqrt{7})^2$$
$$\omega_{12} = (5\sqrt{7} - 13)(8 - 3\sqrt{7})^2$$
$$\omega_{13} = (8\sqrt{7} - 21)(8 - 3\sqrt{7})^2$$
$$\omega_{14} = (11\sqrt{7} - 29)(8 - 3\sqrt{7})^2$$
$$\omega_{15} = (14\sqrt{7} - 37)(8 - 3\sqrt{7})^2$$

и так далее.

3. Об остатке суммы $\sum_{n\leqslant x}\{n\theta\}$.

Лемма 7. *Пусть $0 < \theta < 1$ и θ — иррациональное. Тогда*

$$\sum_{\xi\in M_k} \xi = \frac{1+\omega_k}{2}(x_k - 1).$$

Доказательство. Пусть $\theta n \equiv \lambda_n$, $0 < \lambda_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$ и пусть $n = 1, 2, \ldots x_k - 1$ и находим $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{x_k-1}$. Записав эти числа в обратном порядке и складовая получаем числа

$$\lambda_1 + \lambda_{x_k-1},\ \lambda_2 + \lambda_{x_k-2},\ \ldots\ \lambda_{x_k-1} + \lambda_1$$

покажем, что каждое из этих чисел равно $1 + \omega_k$. Действительно, с одной стороны

$$\theta \cdot s \equiv \lambda_s \,(\mathrm{mod}1)\,, 0 < \lambda_s < 1$$
$$\theta \cdot (x_k - s) \equiv \lambda_{x_k-s} \,(\mathrm{mod}1)\,, 0 < \lambda_{x_k-s} < 1$$

с другой стороны

$$\theta \cdot s + \theta \cdot (x_k - s) = \theta \cdot x_k \equiv \omega_k \,(\mathrm{mod}1)\,.$$

Следовательно $\lambda_s + \lambda_{x_k-s} \equiv \omega_k(\mathrm{mod}1)$.
Так как

$$0 < \lambda_s + \lambda_{x_k-s} < 2,$$

то

$$\lambda_s + \lambda_{x_k-s} = 1 + \omega_k.$$

А так как $x_0(p_1 - 1) + x_1(p_2 - 1) + \ldots + x_{k-2}(p_{k-1} - 1) + x_{k-1}p_k = x_k - 1$ и $\{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{x_k-1}\} = M_k$, то из приведенных рассуждении получаем утверждение леммы.

Теорема 5.

$$\sum_{\xi\in M(T_1,\ldots,T_k,T_{k+1})} \xi = \frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k+1} T_s + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k+1} x_{s-1}\omega_{s-1}T_s^2 + \sum_{s=1}^{k} \omega_s T_{s+1} \sum_{r=1}^{s} x_{r-1}T_r$$

где $\lambda = \omega_0 T_1 + \cdots \omega_k T_{k+1}$, $\lambda = \omega_0 T_1 + \cdots \omega_k T_{k+1}$.

Доказательство. Доказывается методам математической индукции с использованием формулы

$$M(T_1,T_2,...,T_k,T_{k+1})=\bigcup_{t_{k+1}=0}^{T_{k+1}-1}(M_k+\omega_k t_{k+1})\bigcup(M(T_1,T_2,...,T_k)+\omega_k T_{k+1})$$

и выше приведенной леммы.
Вычислим суммы: $\sum_{\xi\in M(T_1)}\xi$ и $\sum_{\xi\in M(T_1,T_2)}\xi$

$$\sum_{\xi\in M(T_1)}\xi=\frac{\omega_0(T_1+1)T_1}{2}=\frac{\omega_0T_1^2}{2}+\frac{\omega_0T_1}{2}+\frac{x_0T_1}{2}-\frac{x_0T_1}{2}=\frac{x_0T_1}{2}+\frac{\omega_0T_1}{2}-\frac{T_1}{2}+\frac{\omega_0x_0T_1^2}{2}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\xi\in M(T_1,T_2)}\xi=\sum_{\xi\in M_1}\sum_{t_1=0}^{T_2-1}(\xi+\omega_1t_1)+\sum_{\xi\in M(T_1)}(\xi+\omega_1T_2)=\\&=\sum_{\xi\in M_1}(\xi T_2)+\sum_{\xi\in M_1}\omega_1\frac{(T_2-1)T_2}{2}+\sum_{\xi\in M(T_1)}\xi+\sum_{\xi\in M(T_1)}\omega_1T_2=\\&=T_2\frac{(1+\omega_1)(x_k-1)}{2}+\omega_1x_1\frac{(T_2-1)T_2}{2}+\frac{\omega_0(T_1+1)T_1}{2}+(x_0T_1+1)\omega_1T_2=\\&=\frac{x_0T_1+x_1T_2}{2}+\frac{\omega_0T_1+\omega_1T_2}{2}-\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{\omega_0x_0T_1^2+\omega_1x_1T_2^2}{2}+x_0T\omega_1T_2\end{aligned}$$

Теперь предположим, что при $k\geqslant 2$

$$\begin{aligned}&\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_k)}\xi=\frac{x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_{k-1}T_k}{2}+\frac{\omega_0T_1+\omega_1T_2+\cdots+\omega_{k-1}T_k}{2}-\\&-\frac{T_1+T_2+\cdots+T_k}{2}+\frac{x_0\omega_0T_1^2+x_1\omega_1T_2^2+\cdots+x_{k-1}\omega_{k-1}T_k^2}{2}+\\&+x_0T_1\omega_1T_2+(x_0T_1+x_1T_2)\,\omega_2T_3+(x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_{k-2}T_{k-1})\,\omega_{k-1}T_k.\end{aligned}$$

Вычислим сумму $\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_{k+1})}\xi$ с учетом предыдущего предположения:

$$\begin{aligned}&\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_{k+1})}\xi=\sum_{\xi\in M_k}\sum_{t=0}^{T_{k+1}-1}(\xi+\omega_kt)+\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_k)}(\xi+\omega_kT_{k+1})=\\&=\sum_{\xi\in M_k}\left(\xi T_{k+1}+\omega_k\frac{(T_{k+1}-1)\,T_{k+1}}{2}\right)+\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_k)}(\xi+\omega_kT_{k+1})=\\&=\sum_{\xi\in M_k}\xi T_{k+1}+\sum_{\xi\in M_k}\omega_k\frac{(T_{k+1}-1)\,T_{k+1}}{2}+\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_k)}\omega_kT_{k+1}+\sum_{\xi\in(T_1,T_2,...,T_k)}\xi=\\&=\frac{(1+\omega_k)(x_k-1)}{2}T_{k+1}+\omega_kx_k\frac{(T_{k+1}-1)T_{k+1}}{2}+\\&+(x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_kT_{k+1}+1)\,\omega_kT_{k+1}+\frac{x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_{k-1}T_k}{2}+\\&+\frac{\omega_0T_1+\omega_1T_2+\cdots+\omega_{k-1}T_k}{2}-\frac{T_1+T_2+\cdots+T_{k+1}}{2}+\end{aligned}$$

$$+x_0T_1\omega_1T_2+(x_0T_1+x_1T_2)\,\omega_2T_3+(x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_{k-2}T_{k-1})\,\omega_{k-1}T_k+$$
$$(x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_{k-1}T_k+1)\,\omega_kT_{k+1}=\frac{x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_kT_{k+1}}{2}+$$
$$\frac{\omega_0T_1+\omega_1T_2+\cdots+\omega_kT_{k+1}}{2}-\frac{T_1+T_2+\cdots+T_{k+1}}{2}+$$
$$+\frac{x_0\omega_0T_1^2+x_1\omega_1T_2^2+\cdots+x_k\omega_kT_{k+1}^2}{2}+$$
$$+x_0T_1\omega_1T_2+(x_0T_1+x_1T_2)\,\omega_2T_3+(x_0T_1+x_1T_2+\cdots+x_{k-1}T_k)\,\omega_kT_{k+1}$$

Теорема доказана.

4. Оценка остатка суммы $\sum_{n\leqslant x}\{n\theta\}$ для чебышевских чисел.

Определение 6. *Иррациональное число θ, определяемое бесконечной цепной дробью вида*

$$\theta=\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{2a-\cfrac{1}{2a-\dots}}}, \tag{8}$$

называется чебышевским числом, где $a\geqslant 2$ — натуральное.

Отсюда $\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$. Если $x_0=1$, $y_0=0$, $x_1=a_1$, $y_1=1$, …, $x_{n+1}=2ax_n-x_{n-1}$, $y_{n+1}=2ay_n-y_{n-1}$, $n=2$, …, то x_n и y_n являются знаменателем и числителем $n-$ой подходящей дроби (8), причем x_n равен многочлену Чебышева первого рода $T_n(a)$, а y_n равен многочлену Чебышева второго рода $U_n(a)$. Известно [9], что

$$\begin{aligned}x_n&=\frac{1}{2}\left((a+\sqrt{a^2-1})^n+(a-\sqrt{a^2-1})^n\right)\\ y_n&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left((a+\sqrt{a^2-1})^n-(a-\sqrt{a^2-1})^n\right)}{\sqrt{a^2-1}},\quad n=0,\,1,\,2,\,\dots\end{aligned} \tag{9}$$

Определим базисную последовательность последовательности $\{n\theta\}_0^\infty$.

Так как

$$\theta x_n=\omega_n+y_n,\quad n=0,\,1,\,2,\,\dots,$$

то используя (9) имеем, что

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}(a-\sqrt{a^2-1})^n=\theta\cdot\varepsilon^n,\quad \varepsilon=a-\sqrt{a^2-1}$$

и

$$x_n\omega_n=\frac{\theta}{2}(1+\varepsilon^{2n}),\quad n=0,\,1,\,2,\,\dots \tag{10}$$

Известно [2], что

$$\sum_{n\leqslant x}\{n\theta\}=\frac{x}{2}+R(x),\quad R(x)=O(\ln x)$$

В качестве простейшего приложения теоремы 4 докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Существует бесконечная последовательность $x-$ов, для которых $R(x)$ отрицателен, причем $|R(x)| \geqslant C \ln x,\ C > 0$ постоянная.*

Доказательство. В теореме 4 положим, что $T_1 = T_2 = \cdots = T_{k+1} = 1$ тогда

$$-\frac{1}{2}(T_1 + T_2 + \cdots + T_k) = -\frac{1}{2}(k+1) \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k+1} x_{s-1}\omega_{s-1}T_s^2 = \frac{\theta}{4}(k+1) + O(1) \tag{12}$$

$$\sum_{s=1}^{k} \omega_s T_{s+1} \sum_{r=1}^{s} x_{r-1}T_r \leqslant \sum x_s\omega_s = \frac{\theta}{2}k + O(1) \tag{13}$$

Следовательно, сумма левых частей (11), (12), (13) меньше или равно

$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\theta}{2} + O(1)\right) \leqslant \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)k + O(1)$$

где $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} < 0$.

Так как $k \sim \dfrac{1}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \ln x$, то при $k > k_0$ $R(x) < 0$ и $|R(x)| > C \ln x, \quad C > 0$ постоянная.

Теорема доказана.

Замечание. Легко доказать, что существует бесконечная последовательность $x-$ов, для которых $R(x) \geqslant C \ln x,\ C > 0$ постоянная.

Предыдущие результаты свидетельствуют о том, что оценка остатка $R(x) = O(\ln x)$ не улучшаемая. Аналогичные результаты могут быть получены для любой квадратической иррациональности.

5. Дополнительные замечания.

1. Доказана теорема [12] об умножении бесконечной цепной дроби

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ldots - \cfrac{1}{a_n - \ldots}}}}$$

на простое число p при условии $a_i > p,\ i = 1, 2, \ldots$. О сложности простейших операций над цепными дробями отмечено в работе [8].

2. А также структурная формула позволяет написать множество решений неравенства

$$n\theta < \lambda \,(\mathrm{mod}\mu)$$

где θ и μ линейно независимы над полем рациональных чисел.

3. В случае, когда $0 < \theta < 1$ — рациональное, получены аналогичные структурные формулы, используя которых получены следующие результаты:

1) Если δ наименьший положительный квадратичный невычет по простому модулю p (нечетное простое), то в разложении $\frac{\delta}{@}$ в полурегулярную цепную дробь вида

$$\frac{\delta}{p} = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{\ldots - \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}$$

неполные частные $a_i \leqslant \delta,\ i = 2, \ldots, n+1$.

2) Другой способ решения сравнения первой степени [11]

$$ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m), \quad (a,\, m) = 1$$

этот способ удобен тем, что если $x \equiv x_0(mod m)$, то x_0 сразу же находится в пределах $0 \leqslant x_0 \leqslant m-1$; что важно в вопросах теории чисел. А в известных способах решения сравнения x_0 дается в виде

$$x_0 = a^{\varphi(m)-1} \cdot b$$

или

$$x_0 = (-1)^{n-1} Q_{n-1} \cdot b$$

где Q_{n-1} — знаменатель предпоследней подходящей дроби в разложении $\frac{a}{m}$ в обыкновенную цепную дробь $[q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n]$.

Отмечу, что при помощи структурной формулы (теорема 3) некоторые оценки работ [6] и [7], [4] могут быть выражены через параметры $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$, что позволяет лучше представить колебание рассматриваемой величины в зависимости от $x = x_0 T_1 + \cdots x_k T_{k+1}$. Например, в работе [4] стр. 48 (Теорема 1) остаток суммы $\sum_{n \leqslant x} \{n\theta\} = \frac{x}{2} + R(x)$, θ — иррациональное, оценивается как $O(\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt)$. Так как это оценка сверху, то естественно она не дает информацию о колебаний остатка при $x \to \infty$, а используя теорему 5 можно глубже исследовать поведение остатка, при $x \to \infty$.

Точно также, используя теоремы 1 и 2 настоящей работы, легко получить результаты о <просветах>, изученные в работах [13] — [17].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вейль Г. (Weyl H.) Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. – Math. Ann. 1916. 77 S. 313-352.

[2] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М. Наука.1978.

[3] Кейперс Л. Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука. 1985.

[4] Ленг С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.: Мир. 1970.

[5] Perron O. Die Lehre von den Kettenbr¨uchen. CityLeipzig u. StateplaceBerlin. Teubner.1929.

[6] Ostrowski A. Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximat. // Abh. StateplaceHamburg Universitьt, 1(1921), 77-98.

[7] Behnke H. Zur Theorie der diophantischen Approximationen. // Abh. Math. Semin. Humburg. Univ. Bd. 3(1924). 261-318.

[8] Хинчин А. Я. Цепные дроби, М., Физматгиз, 1961. Изд. 3-е. 28 – 30 с.

[9] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука. 1983.

[10] Ильясов И.И. О структуре последовательности $\{n\theta\}$. // Теория нерегулярных кривых в различных геометрических пространствах (Сборник статей). Алма- ата. 1979. 44-52 с.

[11] Ильясов И.И. Об одном способе решения сравнения первой степени. // Вестник Актюбинского государственного университета. № 3. 2006. 14-15 с.

[12] Ильясов И.И. Умножение цепных дробей на простое число. // Известия Академия наук Казахской ССР. Серия физико – математическая. №3. 1985. 38-41с.

[13] Слэйтер (Slater N. B.) The distributions of the integers N with $\{\theta N\} < \phi$. // Proc. Cambridge Phil. Soc., 1950, 46, 525 – 534p.

[14] Флорек (Florec. K.) Une remarque sur la reparatition des nombers $n\xi(mod1)$. // Colloc. Math. 1951, 2, 323 – 324 p.

[15] Шош (Sos V. T.) On the distribution mod 1 of the sequence $n\alpha$ // Ann. Univ. Sci. Budapest. E¨otv¨osSect. Math. 1958, 1, 127 – 134 p.

[16] Шураньи (Suranyi J.) Über die Anordnung der Vielfachen einer reelen Zahl mod 1. // Ann. Univ. Sci. Budapest. E¨otv¨oSect. Math. 1958, 1, 107 – 111 p.

[17] Сверчековский (Swierczkowski S.) On successive setting of an arc on the circumference of a circle. // Fundam. Math. 1958, 46, 187 – 189 p.

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан
Поступило 18.06.2010