МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2004 год, том 16, номер 2, стр. 69-86

ДВУМЕРНОЕ И ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ-ТЕЙЛОРА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИЙ

© *Н.Н. Анучина, В.И. Волков, Н.С. Еськов, О.С. Илютина, О.М. Козырев*

Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский Научно-Исследовательский Институт Технической Физики им. академика Е. И. Забабахина (РФЯЦ-ВНИИТФ)

Данная работа выполнена при поддержке МНТЦ (проект 1495)

Для цилиндрической и сферической геометрий приведены результаты численных исследований линейной и нелинейной стадий развития малых возмущений границы раздела двух несжимаемых, невязких, нетеплопроводных жидкостей, находящихся в условиях действия неустойчивости Рэлея – Тейлора (Р-Т). Рассматриваются такие начальные возмущения границы раздела, когда течение описывается двумя или тремя пространственными переменными. Результаты численных исследований развития малых возмущений на линейной стадии хорошо согласуются с аналитическими закономерностями развития малого одномодового возмущения, полученными в линеаризованной постановке (основное решение – состояние покоя) для цилиндрической и сферической геометрий. Исследовано влияние пространственной размерности и геометрии (плоская, цилиндрическая, сферическая) на развитие возмущений на нелинейной стадии. Дано краткое описание основных характеристик разностных методов, реализованных в комплексах МАХ и МАХ-3 и использованных для проведения численных исследований.

2D AND 3D SIMULATION OF RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY IN CYLINDRICAL AND SPHERICAL GEOMETRIES

N.N. Anuchina, V.I. Volkov, N.S. Es'kov, O.S. Ilyutina, O.M. Kozyrev

Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Scientific Research Institute of Technical Physics named after Academician E.I. Zababakhin (RFNC-VNIITF)

Numerical simulations for cylindrical and spherical geometries are presented, which study linear and nonlinear stages of evolution of small perturbations at the interface of two incompressible, non-viscous, non-heat-conducting liquids being under effect of Rayleigh-Taylor instability. Initial perturbations of the interface are considered for two cases: when the flow is described with two and three spatial variables. Results of the numerical simulations of the linear evolution stage for the small perturbations are in good agreement with the analytical laws of small single-mode perturbation evolution, derived in linearized formulation (basic solution is at rest) for cylindrical and spherical geometries. Effect of dimensionality of space and geometry (plane, cylindrical or spherical) on the evolution of perturbations is studied for nonlinear stage. Basic characteristics of the difference methods implemented in MAH and MAH-3 software packages used for numerical studies are briefly described.

Введение

При решении ряда прикладных проблем возникает необходимость исследовать влияние внешних несимметричных условий на параметры систем, первоначально обладающих осевой или сферической симметриями (например, проблема инерциального термоядерного синтеза). В таких задачах, как правило, развиваются различные виды гидродинамической неустойчивости. Неустойчивые течения характеризуются значительной пространственной и временной разномасштабностью, возникновением и развитием вихрей, сильными деформациями границ раздела веществ. Для эффективного моделирования таких течений вычислительные алгоритмы должны удовлетворять следующим требованиям – сохранение осевой и сферической симметрии разностного решения и адаптируемость к моделируемым течениям. Разностные методы, реализованные в комплексе МАХ и МАХ-3 [1-5], обладают такими свойствами.

По комплексам проведены численные исследования развития возмущений на линейной и нелинейной стадиях в случаях, когда на границе раздела веществ, находящихся в условиях действия неустойчивости Рэлея – Тейлора, для цилиндрической геометрии задавались малые одномодовые возмущения только в осевом направлении или только в азимутальном, а для сферической – только в полярном. В этих случаях течения описываются двумя пространственными переменными. Рассматривались различные перепады плотности веществ, разные волновые числа начального возмущения и начальные радиусы границы раздела.

Моделирование развития на линейной и нелинейной стадиях малого начального двумерного одномодового возмущения, при котором течения зависят от трех пространственных переменных было выполнено для цилиндрической и сферической геометрий по комплексу МАХ-3.

Двумерные и трехмерные расчеты были проведены для случаев, когда центральным слоем было тяжелое вещество или же легкое. Результаты всех расчетов на линейной стадии развития возмущений хорошо согласуются с аналитическими.

По комплексу МАХ-3 оценивалось влияние пространственной размерности, а также геометрии системы на развитие возмущения на нелинейной стадии.

1. Основные характеристики разностных методов МАХ и МАХ-3

Реализованные в комплексах МАХ и МАХ-3 разностные методы позволяют рассчитывать широкий класс сложных нестационарных гидродинамических течений в случаях двух и трех пространственных переменных, в частности, вихревых течений многокомпонентных сред со значительными деформациями контактных границ, с изменением топологической структуры физических областей.

Адаптирующиеся вычислительные методы комплексов дают возможность, используя априорную информацию об изучаемых течениях, применять реализованные в комплексах алгоритмы в различных сочетаниях на разных этапах моделирования для эффективного получения решения с необходимой точностью.

В зависимости от априорной информации о процессах, происходящих в задаче, рассчитываемая система представляется набором счетных областей.

- Счетная область является топологическим прямоугольником (в случае двух пространственных переменных) или параллелепипедом. Границы областей могут быть контактными границами или внешними границами задачи: жесткими стенками, границами с заданным давлением или эйлеровыми границами с оттоком либо притоком вещества.
- В каждой области используется своя произвольная сетка (четырехугольная в двумерном случае и гексаэдральная – в трехмерном). В частности, сетка в счетной области может быть лагранжевой, неподвижной эйлеровой, подвижной эйлеровой или какой-либо их комбинацией по координатным направлениям.
- Разностные схемы методов основаны на расщеплении вычислительного алгоритма на лагранжев и эйлеров этапы ([6,7]).
- Расчет лагранжева этапа может проводиться по явной и неявной схемам, что позволяет моделировать течения с широким диапазоном чисел Маха. Алгоритм решения неявных разностных уравнений представляет собой итерационный процесс Ньютона-Якоби с выбором итерационного параметра из условия максимального уменьшения погрешности на итерации.
- Разностная схема эйлерова этапа – явная с использованием локально-адаптивных алгоритмов построения подвижной эйлеровой сетки. Реализованы две возможности аппроксимации конвективных потоков: односторонними разностями против потока первого порядка точности и аппроксимация Лакса-Вендроффа второго порядка точности.
- Разностные уравнения каждого этапа получены аппроксимацией законов сохранения, записанных для произвольного четырехугольника (МАХ) или криволинейного шестигранника (МАХ-3), то есть схемы являются дивергентными относительно массы, импульса и полной энергии. Вычислительные алгоритмы обеспечивают одновременное выполнение разностных аналогов законов сохранения массы, импульса и полной энергии и сохранение двумерной (плоской и цилиндрической), а также одномерной (плоской, цилиндрической и сферической) симметрий разностного решения.

  Контактные границы могут быть координатными линиями (в двумерном случае) или ко-

ординатными поверхностями (в трехмерном случае) сетки области интегрирования. Для расчета сильных деформаций границ раздела веществ используются маркеры, положение которых рассчитывается на каждом шаге. Они определяют положение контактной границы в любой момент времени. Границы раздела веществ могут произвольным образом пересекать эйлерову сетку. При этом образуются смешанные ячейки, содержащие несколько различных веществ. Для расчета смеси используются, в основном, условия гидродинамического равновесия компонент и непрерывность вектора скорости на контактной границе. Допускается также расчет сильных деформаций границ раздела с помощью концентраций смеси веществ.

2. Аналитическое описание линейной стадии неустойчивости Рэлея-Тейлора для цилиндрической и сферической геометрий

В данном разделе получены аналитические закономерности развития малого одномодового возмущения границы раздела двух жидкостей, находящихся в условиях неустойчивости Рэлея-Тейлора. Исследования проведены в линеаризованной постановке (основное решение – состояние покоя) для невязких, нетеплопроводных, несжимаемых жидкостей в случае цилиндрической и сферической геометрий.

2.1. Система уравнений потенциального течения несжимаемой жидкости при наличии контактной границы. Пусть поверхность $\Gamma : S(t,\boldsymbol{r}) = S(t,x,y,z) = 0$ разделяет две несжимаемые, невязкие, нетеплопроводные жидкости.

Течение каждой жидкости описывается уравнениями:

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \rho \cdot D\mathbf{u} + \operatorname{grad} p = \rho \cdot \operatorname{grad} G, \quad \rho \equiv \text{const},$$

где D – субстанциональная производная, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, G – потенциал ускорения.

Если движение жидкости потенциальное, то есть $\mathbf{u} = \operatorname{grad}\Phi$, то оно описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости Φ и интегралом Коши-Лагранжа, связывающим давление p с Φ:

$$\Delta\Phi = 0, \quad p = -\rho \cdot \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \cdot |\operatorname{grad}\Phi|^2 - G \right).$$

Пусть $\mathbf{r}(t)$ - траектория лагранжевого элемента среды, принадлежащая поверхности раздела Г. Это означает, что для нее выполняются соотношения $S(t,\boldsymbol{r}(t))=0$ и $S_t(t,\boldsymbol{r}(t)) \equiv DS(t,\boldsymbol{r}) = 0$. Последнее дает кинематическое уравнение для поверхности

$$S_t + \operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad}\Phi = 0\big|_\Gamma .$$

На поверхности раздела веществ должны выполняться соотношения равенства давлений и нормальных компонент вектора скорости.

Таким образом, описание потенциального течения двух несжимаемых жидкостей, разделенных границей Г, сводится к решению следующей нелинейной задачи:

$$\Delta\Phi_{1,2} = 0,$$

$$\Gamma : S(t,\boldsymbol{r}), S(0,\boldsymbol{r}) = S_0(\boldsymbol{r}), \; S_t + \operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad}\Phi_{1,2} = 0\big|_\Gamma ,$$

$$\rho_1 \cdot \left((\Phi_1)_t + \frac{1}{2} \cdot |\operatorname{grad}\Phi_1|^2 - G \right) = \rho_2 \cdot \left((\Phi_2)_t + \frac{1}{2} \cdot |\operatorname{grad}\Phi_2|^2 - G \right)\Bigg|_\Gamma ,$$

$$\operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad}\Phi_1 = \operatorname{grad} S \cdot \operatorname{grad}\Phi_2\big|_\Gamma .$$

Далее для цилиндрической и сферической геометрий рассматривается линеаризация этой задачи в окрестности основного решения.

2.2. Развитие малых возмущений на контактной границе при неустойчивости Рэлея-Тейлора в случае цилиндрической геометрии. Рассматривается основное решение (состояние покоя), которое в цилиндрических координатах (x, r, ψ) описывается следующим набором функций:

$$\Gamma^0 : r - r^0 = 0; \quad \Phi^0_{1,2} = 0; \quad \mathbf{u}^0_{1,2} = 0; \quad G = -g\cdot(r - r^0), \quad g > 0;$$

$$p^0_1 = -\rho_1 \cdot g \cdot (r - r^0), \quad r < r^0; \quad p^0_2 = -\rho_2 \cdot g \cdot (r - r^0), \quad r > r^0.$$

При $\rho_1 < \rho_2$ как известно жидкости находятся в условиях действия неустойчивости Рэлея-Тейлора, когда любое возмущение границы раздела растет со временем.

Возмущение на контактной границе будем задавать в виде $\Gamma : r - r^0 - \eta(t, x, \psi) = 0$. Линеаризация около состояния равновесия приводит к следующей задаче, описывающей развитие малых косинусоидальных возмущений $\eta(t) = a(t)\cdot\cos kx \cdot \cos m\psi$ границы раздела, вызванное начальным возмущением $\eta(0, x, \psi) = a_0 \cdot \cos kx \cdot \cos m\psi$, $\eta_t(0, x, \psi) = 0$:

$$(\Phi_1)_{xx} + \frac{1}{r}\left(r(\Phi_1)_r\right)_r + \frac{1}{r^2}(\Phi_1)_{\psi\psi} = 0, \quad 0 < r < r^0,$$

$$(\Phi_2)_{xx} + \frac{1}{r}\left(r(\Phi_2)_r\right)_r + \frac{1}{r^2}(\Phi_2)_{\psi\psi} = 0, \quad r > r^0,$$

$$(\Phi_1)_r = 0, \quad r = 0, \quad \Phi_2 \to 0, \quad r \to +\infty, \tag{1}$$

$$\rho_1 \cdot \left((\Phi_1)_t + g\cdot\eta\right) = \rho_2 \cdot \left((\Phi_2)_t + g\cdot\eta\right)\Big|_{r=r^0}, \quad (\Phi_1)_r = (\Phi_2)_r\Big|_{r=r^0},$$

$$\eta_t = (\Phi_{1,2})_r\Big|_{r=r^0}, \quad \eta(0, x, \psi) = a_0 \cdot \cos kx \cdot \cos m\psi, \quad \eta_t(0, x, \psi) = 0.$$

Решение для потенциала в каждой из областей, соответствующее заданному возмущению, будем искать в виде

$$\Phi_i = b_i(t)\cdot R_i(r)\cdot\cos kx \cdot \cos m\psi, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что каждая из функций $R_{1,2}$ удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя

$$r^2 R_{rr} + rR_r - \left(k^2 r^2 + m^2\right)R = 0,$$

независимыми решениями которого являются модифицированные функции Бесселя $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$.

Из соотношений системы (1), заданных на границе раздела, с учетом внешних граничных условий можно получить инкремент роста возмущений границы раздела и выражение для амплитуды:

$$\omega^2 = f(n, kr^0)\cdot g \cdot k, \tag{2}$$

где

$$n = \rho_2/\rho_1,$$

$$f(n, kr^0) = \frac{n-1}{\dfrac{I_m(kr^0)}{I'_m(kr^0)} - n\dfrac{K_m(kr^0)}{K'_m(kr^0)}} = \frac{1}{2}\frac{n-1}{\dfrac{I_m(kr^0)}{I_{m-1}(kr^0) + I_{m+1}(kr^0)} + n\dfrac{K_m(kr^0)}{K_{m-1}(kr^0) + K_{m+1}(kr^0)}}, \quad m > 0,$$

$$f(n,kr^0)=\frac{n-1}{\dfrac{I_0(kr^0)}{I_0'(kr^0)}-n\dfrac{K_0(kr^0)}{K_0'(kr^0)}}=\frac{n-1}{\dfrac{I_0(kr^0)}{I_1(kr^0)}+n\dfrac{K_0(kr^0)}{K_1(kr^0)}},\quad m=0,$$

$$\eta=a_0\cdot\operatorname{ch}\omega t\cdot\cos kx\cdot\cos m\psi. \tag{3}$$

Начальное состояние возмущенного решения в естественных переменных описывается следующим образом:

$$\Gamma: r=r^0+a_0\cdot\cos kx\cdot\cos m\psi;\qquad \mathbf{u}_{1,2}=0;$$

$$p_1=-\rho_1\cdot g\cdot(r-r^0)-\rho_1\cdot a_0\cdot\alpha\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot g\cdot\frac{I_m(kr)}{I_m'(kr^0)}\cdot\cos kx\cdot\cos m\psi,\qquad r<r^0;$$

$$p_2=-\rho_2\cdot g\cdot(r-r^0)-\rho_2\cdot a_0\cdot\alpha\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot g\cdot\frac{K_m(kr)}{K_m'(kr^0)}\cdot\cos kx\cdot\cos m\psi,\qquad r>r^0.$$

Появление дополнительных членов к фоновому давлению связано с тем, что возмущение в положении границы в начальный момент времени приводит к возмущению производной по времени потенциала скорости.

o *Рост возмущений границы в случае задания начальных возмущений только в осевом направлении.*

В этом случае решение описывается общими формулами, в которых нужно положить $m=0$.

o *Рост возмущений границы в случае задания начальных возмущений только в азимутальном направлении.*

В этом случае функции $R_{1,2}$ удовлетворяют уравнению Эйлера

$$r^2R_{rr}+rR_r-m^2R=0.$$

Независимыми решениями этого уравнения являются функции r^m и r^{-m}. Уравнения (2)-(3) запишутся следующим образом:

$$\omega^2=\frac{1}{r^0}\cdot A\cdot g\cdot m,\qquad A=\frac{n-1}{n+1},\quad \eta=a_0\cdot\operatorname{ch}\omega t\cdot\cos m\psi.$$

Начальное состояние возмущенного решения в естественных переменных будет описываться следующим образом:

$$\Gamma: r=r^0+a_0\cdot\cos m\psi;\qquad \mathbf{u}_{1,2}=0;$$

$$p_1=-\rho_1\cdot g\cdot(r-r^0)-\rho_1\cdot a_0\cdot A\cdot g\cdot\left(\frac{r}{r^0}\right)^m\cdot\cos m\psi,\qquad r<r^0;$$

$$p_2=-\rho_2\cdot g\cdot(r-r^0)+\rho_2\cdot a_0\cdot A\cdot g\cdot\left(\frac{r}{r^0}\right)^{-m}\cdot\cos m\psi,\qquad r>r^0.$$

2.3. Развитие малых возмущений на контактной границе при неустойчивости Рэлея-Тейлора в случае сферической геометрии. Рассматривается основное решение (состояние покоя), которое в сферических координатах (r,φ,ψ) описывается набором функций.

$$\Gamma^0: r-r^0=0;\quad \Phi_{1,2}^0=0;\quad \mathbf{u}_{1,2}^0=0;\quad G=-g\cdot(r-r^0),\quad g>0;$$

$$p_1^0=-\rho_1\cdot g\cdot(r-r^0),\quad r<r^0;\quad p_2^0=-\rho_2\cdot g\cdot(r-r^0),\quad r>r^0.$$

Поверхность раздела будем задавать в виде $\Gamma: r - r^0 - \eta(t,\varphi,\psi) = 0$, где $\eta(t) = a(t)\cdot Y_l^m(\varphi,\psi)$ – возмущение границы, вызванное начальным возмущением $\eta(0,\varphi,\psi) = a_0 \cdot Y_l^m$, $\eta_t(0,\varphi,\psi) = 0$.

$Y_l^m(\varphi,\psi) = P_l^m(\cos\varphi)\cdot\cos m\psi$ $(l = 0,1,2,...; m = 0,1,2,...,l)$ – тессеральная сферическая гармоника степени l и порядка m, $P_l^m(x)$ $(-1 \le x \le 1;\ l = 0,1,2,...;\ m = 0,1,2,...,l)$ – присоединенная функция Лежандра первого рода степени l и порядка m.

Линеаризация около состояния равновесия приводит к следующей задаче, описывающей развитие малых возмущений границы раздела:

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2(\Phi_1)_r\right)_r + \frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{r}(\Phi_1)_\varphi\right)_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}(\Phi_1)_{\psi\psi} = 0, \quad 0 < r < r^0,$$

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2(\Phi_2)_r\right)_r + \frac{1}{r\sin\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{r}(\Phi_2)_\varphi\right)_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}(\Phi_2)_{\psi\psi} = 0, \quad r > r^0,$$

$$(\Phi_1)_r = 0, \quad r = 0, \quad \Phi_2 \to 0, \quad r \to +\infty,$$

$$\rho_1\cdot\left((\Phi_1)_t + g\cdot\eta\right) = \rho_2\cdot\left((\Phi_2)_t + g\cdot\eta\right)\Big|_{r=r^0}, \quad (\Phi_1)_r = (\Phi_2)_r\Big|_{r=r^0},$$

$$\eta_t = (\Phi_{1,2})_r\Big|_{r=r^0}, \quad \eta(0,\varphi,\psi) = a_0\cdot P_l^m(\cos\varphi)\cdot\cos m\psi, \quad \eta_t(0,\varphi,\psi) = 0.$$

Решение для потенциала в каждой из областей, соответствующее заданному возмущению ищется в виде

$$\Phi_i = b_i(t)\cdot R_i(r)\cdot Y_l^m(\varphi,\psi), \quad i = 1,2.$$

Так как сферическая гармоника является собственной функцией оператора Бельтрами

$$\frac{1}{\sin\varphi}\left(\sin\varphi\cdot\left(Y_l^m\right)_\varphi\right)_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(Y_l^m\right)_{\psi\psi} = -l\cdot(l+1)\cdot Y_l^m,$$

то отсюда следует, что каждая из функций $R_{1,2}$ удовлетворяет уравнению Эйлера вида

$$r^2R_{rr} + 2rR_r - l(l+1)R = 0.$$

Независимыми решениями этого уравнения являются функции r^l и r^{-l-1}. Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны предыдущим. Инкремент роста возмущений границы раздела и выражение для амплитуды имеют следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{A\cdot g\cdot l}{r^0}\cdot\frac{n+1}{1+n\dfrac{l}{l+1}}, \qquad \eta = a_0\cdot\operatorname{ch}\omega t\cdot P_l^m(\cos\varphi)\cdot\cos m\psi.$$

Начальное состояние возмущенного решения в естественных переменных будет описываться следующим образом:

$$\Gamma: r = r^0 + a_0\cdot P_l^m(\cos\varphi)\cdot\cos m\psi; \quad \mathbf{u}_{1,2} = 0;$$

$$p_1 = -\rho_1\cdot g\cdot(r - r^0) - \rho_1\cdot a_0\cdot\beta\cdot A\cdot g\cdot\left(\frac{r}{r^0}\right)^l\cdot P_l^m(\cos\varphi)\cdot\cos m\psi, \quad r < r^0;$$

$$p_2 = -\rho_2\cdot g\cdot(r - r^0) + \rho_2\cdot a_0\cdot\beta\cdot A\cdot g\cdot\frac{l}{l+1}\cdot\left(\frac{r}{r^0}\right)^{-l-1}\cdot P_l^m(\cos\varphi)\cdot\cos m\psi, \quad r > r^0.$$

Отличительной особенностью роста возмущений на линейной стадии для сферической геометрии является независимость от порядка m сферической гармоники, то есть рост возмущений определяется только ее степенью l, что означает зависимость роста амплитуды только от начальных возмущений в направлении полярного угла и независимость от азимутального направления. Этот результат согласуется с результатами исследований, приведенных в [8, 9].

o *Рост возмущений границы в случае задания начальных возмущений только в полярном направлении.*

Решение описывается общими формулами, в которых нужно положить $m=0$. Присоединенная функция Лежандра первого рода степени l и нулевого порядка является полиномом Лежандра степени l $P_l^0(x) = P_l(x)$ $(-1 \le x \le 1;\ l = 0, 1, 2, ...)$.

3. Численное моделирование развития неустойчивости Рэлея–Тейлора для цилиндрической и сферической геометрий в случае двух пространственных переменных

Рассматривается система, состоящая из двух цилиндрических или сферических слоев несжимаемых, невязких, нетеплопроводных жидкостей разной плотности ρ_1, ρ_2 ($\rho_1<\rho_2$). Ускорение поля тяжести $\mathbf{g}$ направлено по радиусу от тяжелой жидкости к легкой, т.е. вещества находятся в условиях действия неустойчивости Рэлея–Тейлора. В начальный момент вещества находятся в гидростатическом равновесии.

Проведен ряд численных исследований линейной и нелинейной стадий развития малых одномодовых, зависящих только от одной пространственной переменной возмущений границы раздела веществ: для цилиндрической геометрии возмущение границы раздела задается только в осевом направлении или только в азимутальном, для сферической геометрии - только в полярном. Такие возмущения будем называть одномерными (1D). Возникающее при этих возмущениях движение веществ зависит от двух пространственных переменных.

Расчеты выполнялись по комплексу программ MAX.

Несжимаемость жидкостей моделировалась заданием изотермического уравнения состояния с достаточно большим значением скорости звука. Во всех расчетах амплитуда начального возмущения a_0=0.02, а $|\mathbf{g}| = g = 10$.

Сначала контактная граница в расчетах описывалась как лагранжевая линия. При возникновении больших деформаций осуществлялся переход к описанию ее с помощью маркерной линии.

Результаты численных исследований развития возмущений на линейной стадии сравниваются с аналитическими. Анализируются общие закономерности развития возмущений на нелинейной стадии.

3.1. Цилиндрическая геометрия.

3.1.1. ***Линейная стадия развития возмущений.*** Осевые возмущения. Постановка задачи приведена на рис.1. Внешние границы $x=0$, $x=W$ - плоскости симметрии, $r=0$ – ось симметрии, $r=r_B$ – жесткая стенка. На границе раздела веществ $r=r_0$ задано малое осевое косинусоидальное возмущение $r = r_0 + a_0 \cos kx$, $\lambda = 2\pi/k$ - длина волны возмущения.

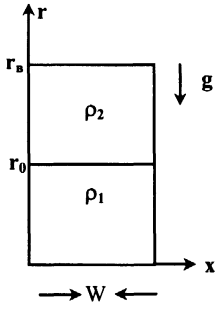

Рис.1. Постановка задачи.

Чтобы исключить влияние жесткой стенки, значение r_B выбиралось достаточно большим. Расчеты были выполнены для $W=\lambda/2$ и разных значений r_0, n, k.

Были проведены также расчеты, постановка которых отличается от описанных тем, что цилиндрический слой тяжелого вещества расположен у оси симметрии, а ускорение **g** направлено от оси. В этих задачах проникание тяжелого вещества в легкое происходит в направлении от оси симметрии ("разлет"), а не к оси ("схождение"), как в задачах, рассмотренных выше.

В расчетах для разных моментов времени t определялись a^-, a^+ – глубина проникания тяжелой жидкости в легкую и легкой в тяжелую соответственно:

$a^+=r_{\max}-r_0$, $a^-=r_0-r_{\min}$ при "схождении";

$a^+=r_0-r_{\min}$, $a^-=r_{\max}-r_0$ при "разлете".

Здесь $r_{\max}$, $r_{\min}$ – максимальное и минимальное значения ординат точек границы раздела в момент t.

В расчетах амплитуда возмущения определялась следующим образом: $a=0.5(a^+ + a^-)$.

Сравнение расчетных и теоретических данных проводилось в безразмерных переменных

$$\eta = \operatorname{arch}\frac{a}{a_0}, \qquad \xi = \sqrt{f(n, r_0k)gk}\, t,$$

a – амплитуда возмущения в момент времени t,

$$f(n, r_0k) = (n-1)\Big/\left[\frac{I_0(r_0k)}{I_1(r_0k)} + n\frac{K_0(r_0k)}{K_1(r_0k)}\right],$$

где I_ν, K_ν $(\nu = 0,1)$ - модифицированные функции Бесселя.

В этих переменных теоретическая зависимость имеет вид прямой $\eta=\xi$.

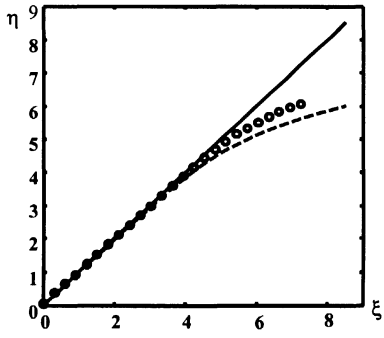

Рис.2. Цилиндрическая геометрия. Осевое возмущение. Зависимости η от ξ.
– теория (η = ξ) o, -- - расчеты при k=2π/6, 2π/3 (n=10, r_0=6).

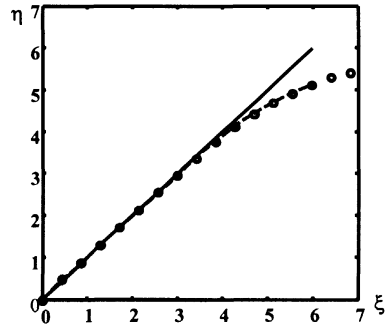

Рис3. Цилиндрическая геометрия. Осевое возмущение. Зависимости η от ξ.
– теория (η = ξ), o, -- - расчеты ("разлет" и "схождение") при k=2π/3, n=10, r_0=3

Анализ результатов показал, что на ранней стадии развития неустойчивости расчетные данные, полученные для разных перепадов плотности n, значений цилиндрического радиуса r_0 и значений волнового числа k хорошо согласуются с теоретическими. Амплитуда возмущения растет экспоненциально, проникание происходит симметрично, форма возмущения остается близкой к первоначальной. На линейной стадии при "разлете" тяжелого вещества и при его "схождении" развитие возмущения совпадает с теоретическим. Некоторые из результатов приведены на рис.2-3.

3.1.2. ***Азимутальные возмущения.*** Постановка задачи, приведенная на рис.4, отличается от рассмотренной выше (рис.1) следующим: на границе раздела веществ задано азимутальное

возмущение в виде $r = r_0 + a_0 \cos m\psi$, $0 \le \psi \le \pi$, a_0 – начальная амплитуда, $r = r_0$ – начальное положение границы раздела, $\lambda = 2\pi r_0 / m$ – длина волны возмущения.

Границы $y = 0$ – плоскость симметрии, $r = r_B$ – жесткая стенка.

Расчеты были выполнены для разных значений r_0, n, m.

Для азимутального возмущения так же, как для осевого, был проведен расчет, когда центральным слоем является слой тяжелой жидкости, а ускорение **g** направлено по радиусу от оси ("разлет" тяжелого вещества).

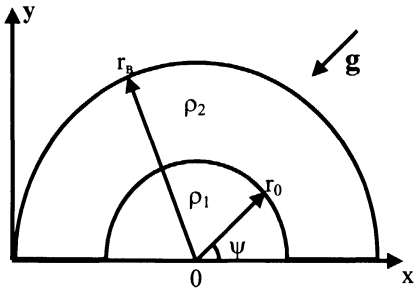

Рис. 4. Постановка задачи.

Сравнение численных результатов с аналитическими проводилось в безразмерных переменных $\xi = \sqrt{\frac{Agm}{r_0}}t$ и $\eta = \operatorname{arch}\frac{a}{a_0}$, a- амплитуда возмущения в момент времени t, $A = \frac{n-1}{n+1}$.

Анализ результатов показал, что на ранней стадии развития неустойчивости все расчетные данные, полученные для разных n, различных значениях r_0 и m хорошо согласуются с теоретическими как при "схождении", так и при "разлете". Некоторые из полученных результатов приведены на рис.5-6.

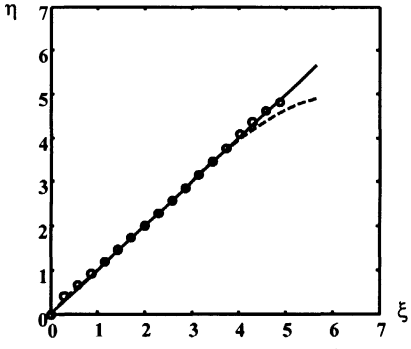

Рис.5. Цилиндрическая геометрия. Азимутальное возмущение. Зависимости η от ξ.
– теория (η = ξ); o, --, - расчеты при m=2,4 (n=10, r_0=2)

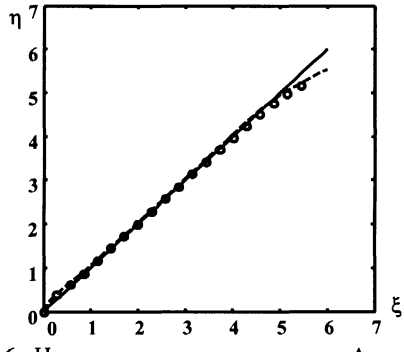

Рис.6. Цилиндрическая геометрия. Азимутальное возмущение. Зависимости η от ξ.
– теория (η = ξ); o, --, - расчеты ("разлет" и "схождение") при r_0=4, m=4, n=10

3.2. Сферическая геометрия. Линейная стадия развития полярных возмущений. Рассматриваются два сферических слоя жидкостей (рис.4). Центральный слой – легкая жидкость. Ускорение **g** направлено по радиусу к центру.

Границы y=0 – ось симметрии, r=r_B – жесткая стенка. На границе раздела веществ r=r_0 задавалось возмущение в виде полиномов Лежандра P_l второй и четвертой степени (l=2,4):

$$r = r_0 + a_0 P_2, \quad P_2 = \frac{1}{4}(3\cos 2\varphi + 1);$$

$$r = r_0 + a_0 P_4, \quad P_4 = \frac{1}{64}\left(35\cos 4\varphi + 20\cos 2\varphi + 9\right)..$$

Расчеты были выполнены для разных значений r_0, n, l.

Для сферической геометрии так же, как для цилиндрической, были проведены расчеты, когда центральным слоем является слой тяжелой жидкости, а ускорение **g** направлено по радиусу от оси ("разлет" тяжелого вещества).

Сравнение численных результатов с аналитическими проводилось в безразмерных переменных

$$\eta = \operatorname{arch}\frac{a}{a_0}, \qquad \xi = \sqrt{\frac{Agl}{r_0}\frac{n+1}{1+n\dfrac{l}{l+1}}}\,t,$$

a – амплитуда возмущения в момент времени t.

Анализ результатов показал, что на ранней стадии развития неустойчивости все расчетные данные, полученные для разных n, различных значениях r_0 и l хорошо согласуются с теоретическими как при "схождении", так и при "разлете". Некоторые из результатов приведены на рис.7-8.

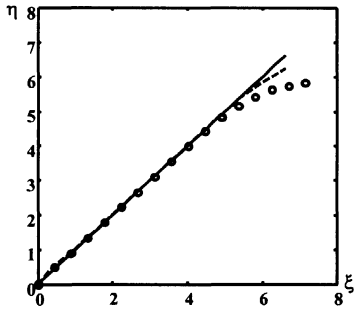

Рис.7. Сферическая геометрия. Полярное возмущение. Зависимости η от ξ.
– теория (η=ξ); o, -- - расчеты при r_0 =2,4 (n=10, l=4).

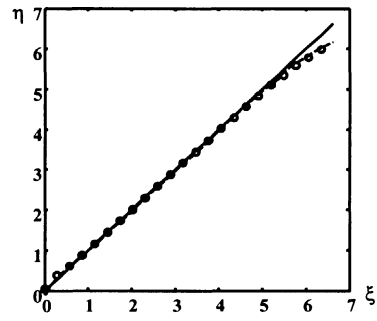

Рис.8. Сферическая геометрия. Полярное возмущение. Зависимости η от ξ.
– теория (η= ξ); o,--, - расчеты ("разлет" и "схождение") при r_0=2, l=4, n=10.

3.3. Нелинейная стадия развития возмущений для цилиндрической и сферической геометрий. Анализ результатов показал, что во всех расчетах постепенно нарушается симметрия в проникании веществ относительно начального положения r_0 невозмущенной контактной границы: тяжелая жидкость с большей скоростью проникает в легкую. Степень развития несимметрии зависит от перепада плотности n, начального положения r_0 невозмущенной границы раздела, параметров возмущения. Чем больше перепад и меньше значение цилиндрического радиуса r_0, тем раньше проявляется несимметрия в проникании веществ. Асимметрия в проникании приводит к нарушению экспоненциального закона роста амплитуды возмущения. Постепенно начинается переход к нелинейной стадии развития возмущения. Нарушение симметрии в проникании веществ происходит при $\xi \approx 2.5 \div 3.5$ ($a \approx 0.03\cdot\lambda \div 0.1\cdot\lambda$), а отход от линейной теории становится заметным при $\xi \approx 4 \div 5$ ($a \approx 0.1\cdot\lambda \div 0.5\cdot\lambda$). Со временем асимметрия увеличивается, форма поверхности раздела существенно меняется (рис.9-10). Тяжелое вещество проникает в легкое в виде "струй", а легкое вещество в тяжелое - в виде "пузырей". Перетекание веществ вдоль контактной поверхности приводит к развитию неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и формированию вихревых структур. Через некоторое время концы струй принимают грибообразную форму (рис.9-10). Таким образом, все общие закономерности развития возмущения на нелинейной стадии, полученные ранее для случая плоской геометрии, наблюдаются также в случае цилиндрической и сферической геометрий, как при "схождении" тяжелого вещества, так и при его "разлете". Качественно картины наблюдаемых течений совпадают, но имеются количественные отличия.

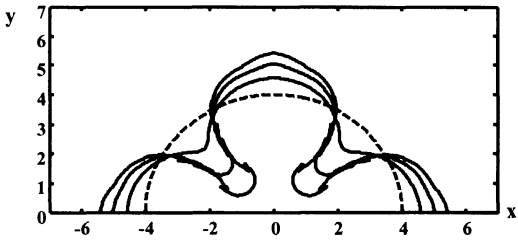

Рис.9. Цилиндрическая геометрия. Азимутальное возмущение. Форма контактной границы в различные моменты времени (--t=0.0, t=1.5,1.8,2.0). Расчет для r_0=4, m=4, n=10 ("схождение")

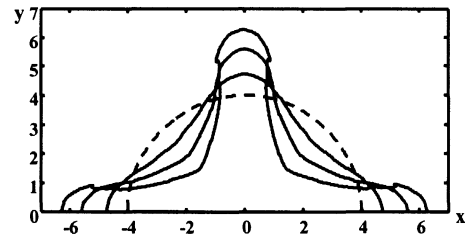

Рис.10. Цилиндрическая геометрия. Азимутальное возмущение. Форма контактной границы в различные моменты времени (--t=0.0, t=1.5,1.8,2.0). Расчет для r_0=4, m=4, n=10 ("разлет")

Результаты расчетов для цилиндрической и сферической геометрий сравнивались с результатами, полученными в расчетах для случая плоской геометрии. Для сопоставления численных результатов постановка расчетов выбиралась такой, чтобы инкремент экспоненциального роста амплитуды начального возмущения был один и тот же. Некоторые из результатов приведены на рис.11-12. Проникание веществ в направлении к оси симметрии в случае цилиндрической геометрии или к центру симметрии для сферической геометрии ("схождение") происходит быстрее, чем в случае плоской геометрии, и медленнее, если движение веществ происходит в противоположном направлении ("разлет").

На нелинейной стадии рост амплитуды возмущения a при "схождении" тяжелого вещества происходит быстрее, чем при его "разлете".

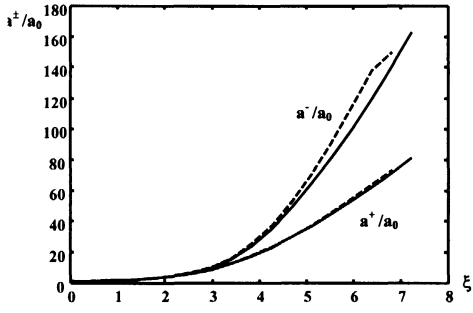

Рис.11. Зависимость $a^{\pm}/a_0$ от ξ. "Схождение" (n=10, ω^2=18.35). Цилиндрическая геометрия (--- осевое возмущение r_0=3 , k=2.09). Плоская геометрия (— k=2.24)

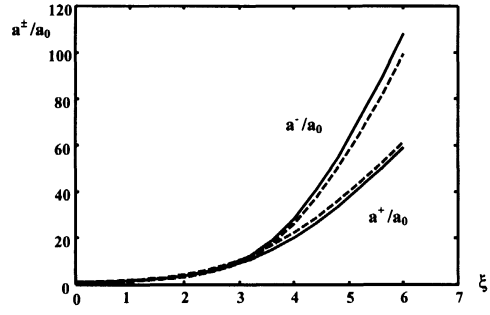

Рис.12. Зависимость $a^{\pm}/a_0$ от ξ. "Разлет" (n=10, ω^2=16.06). Цилиндрическая геометрия (--- осевое возмущение r_0=4, k=2.09). Плоская геометрия (— k=1.96).

4. Численное моделирование развития неустойчивости Рэлея-Тейлора для цилиндрической и сферической геометрий в случае трех пространственных переменных

Рассматривается система, состоящая из двух цилиндрических или сферических слоев невязких, несжимаемых, нетеплопроводных жидкостей разной плотности ρ_1, ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Ускорение поля тяжести **g** направлено от тяжелой жидкости к легкой. Начальное состояние веществ - гидростатическое равновесие. Несжимаемость жидкостей моделировалась заданием изотермического уравнения состояния с достаточно большим значением скорости звука.

Проведены численные исследования линейной и нелинейной стадий развития малых одномодовых, зависящих от двух пространственных переменных (будем называть их двумерными, 2D) возмущений границы раздела веществ. Возникающие при этом течения описываются тремя пространственными переменными.

Для анализа влияния пространственной размерности на рост возмущений на нелинейной стадии был выбран следующий подход. Постановка сравнительных двумерных и трехмерных расчетов была такой, при которой на линейной стадии рост амплитуд всех рассматриваемых возмущений происходил одинаково, то есть совпадали инкременты ω. Исследовались случаи, когда центральным слоем было как легкое вещество ("схождение" тяжелого вещества), так и тяжелое ("разлет" тяжелого). Все расчеты выполнены по комплексу МАХ-3. $|\mathbf{g}| = g = 10$, $\rho_2/\rho_1 = n = 10$, $\omega = 2.86$..

В расчетах определялись так же, как описано в разделе 3, амплитуды проникания легкой жидкости в тяжелую (a^+), тяжелой в легкую (a^-) и амплитуда возмущения $a = 0.5(a^+ + a^-)$.

4.1. Цилиндрическая геометрия. Постановка задачи показана на рис.13. В цилиндрической системе координат (x, r, ψ) поверхность $r = r_0$ является границей раздела жидкостей. Граничные условия: $r = 0$ – ось симметрии; $r = R$, $x = 0$, $x = H$ - жесткие стенки. В начальный момент $t = 0$ в положение границы раздела вносится возмущение $r = r_0 + a_0 \cos kx \cos m\psi$, $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, a_0 - начальная амплитуда возмущения.

В расчетах $a_0 = 0.04$, $R = 9$, $r_0 = 4$.

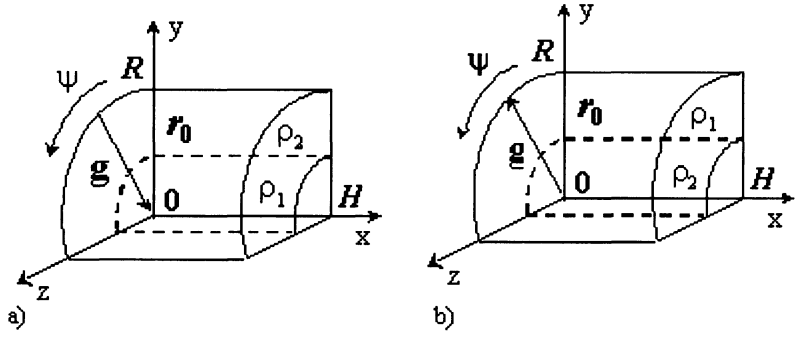

Рис.13. Постановка задачи: а) проникание тяжелой жидкости в легкую происходит по направлению к оси симметрии ("схождение"), b) проникание тяжелой жидкости происходит в направлении от оси симметрии ("разлет").

4.1.1. ***Центральный слой – легкое вещество.*** (рис.13а) Были проведены три расчета в следующей постановке.

№1. Начальное одномодовое возмущение задано только в азимутальном направлении $r = r_0 + a_0 \cos m\psi$ $m = 4$, ($k = 0$). $H = 100$, расчетная сетка – $2 \times 27 \times 18$ по направлениям (x, r, ψ) соответственно.

№2. $r = r_0 + a_0 \cos kx$ ($m = 0$), $k = 0.91$ – одномодовое возмущение только в осевом направлении. $H = \pi/k$. Сетка – $20 \times 27 \times 2$.

№3. $r = r_0 + a_0 \cos kx \cos m\psi$, $m = 2$, $k = 0.78$ – начальное возмущение задано в обоих направлениях. $H = \pi/k$. Разностная сетка - $20 \times 27 \times 14$.

На рис.14 приводятся численные результаты в безразмерных переменных $\eta = \operatorname{arch}\frac{a}{a_0}$, $\xi = \omega t$ в сравнении с линейной теорией $\eta = \xi$ (раздел 2). Для исследования законов движения тяжелой и легкой жидкостей определялись изменения безразмерных амплитуд проникания веществ $\frac{a^+}{a_0}$, $\frac{a^-}{a_0}$ (рис. 15) и скоростей $\upsilon^+ = \frac{u^+\omega}{g}$, $\upsilon^- = \frac{u^-\omega}{g}$ (рис.16) в зависимости от безразмерного времени ξ. На рис.17 приведено положение контактной границы на момент времени $t = 1.85$ в трехмерном и двумерном расчетах.

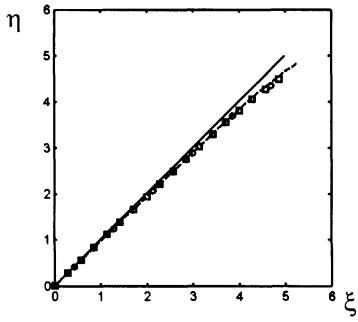

Рис.14. Зависимость амплитуды возмущений от времени в безразмерных переменных. Цилиндрическая геометрия ("схождение"). о - азимутальное возмущение, □- осевое возмущение, – – – - возмущение, —— - линейная теория.

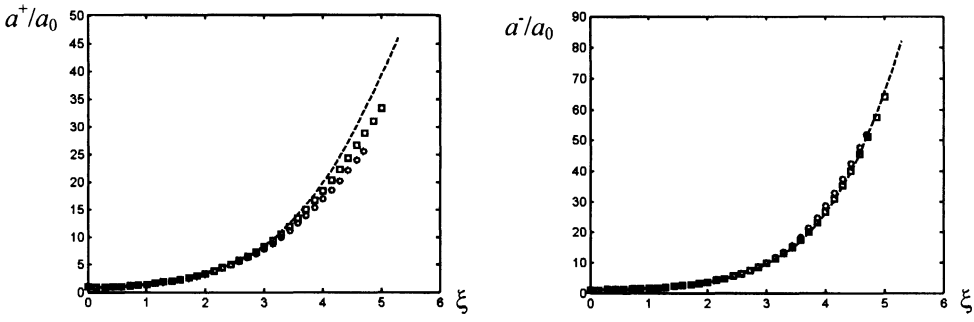

Рис.15. Зависимость безразмерных амплитуд от безразмерного времени. Цилиндрическая геометрия ("схождение"). о - азимутальное возмущение, □– осевое возмущение, – – – - 2D возмущение.

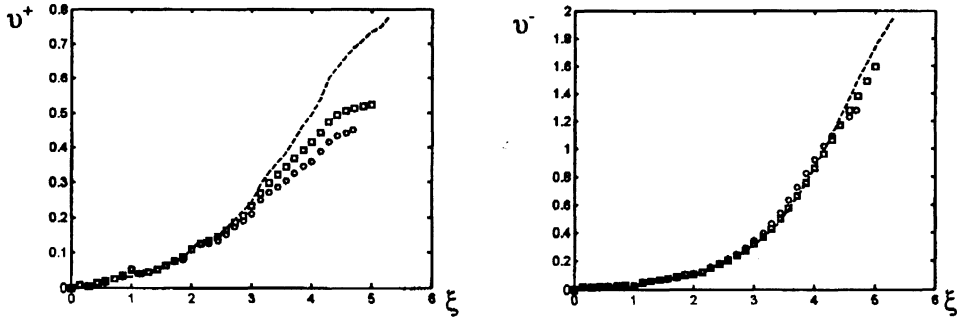

Рис.16. Зависимость безразмерных скоростей от безразмерного времени. Цилиндрическая геометрия ("схождение"). о - азимутальное возмущение, □– осевое возмущение, – – – - 2D возмущение.

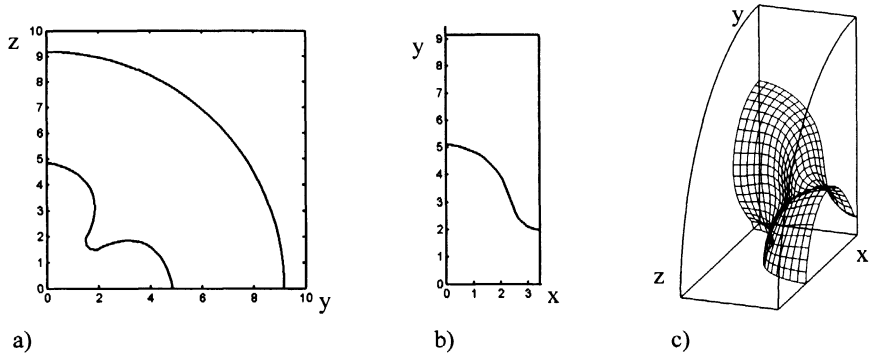

Рис.17. Положение контактной границы на момент времени t=1.85.. Цилиндрическая геометрия ("схождение"). a) азимутальное возмущение, b) осевое возмущение, c) 2D возмущение.

4.1.2. *Центральный слой – тяжелое вещество.* (рис. 13b) Для такой постановки были проведены расчеты №4-№6, соответствующие расчетам №1-№3. В расчете №4, где задавалось одномодовое азимутальное возмущение, все параметры были такими же, что и в №1, а в расчетах №5, №6 изменены значения k. Это вызвано тем, что в случае осевого возмущения, в отличие от азимутального, инкремент ω не симметричен относительно ρ_1, ρ_2. Для получения одного и того же значения ω полагалось в расчете №5 $k = 1.11$, а в трехмерном (№6) $k = 0.96$. Результаты расчетов приведены на рис.18-21.

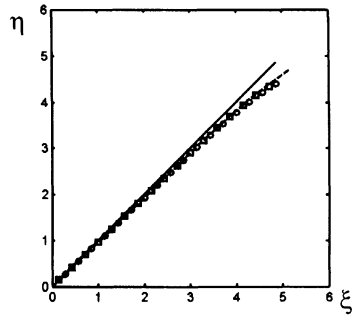

Рис.18. Зависимость амплитуды возмущений от времени в безразмерных переменных. Цилиндрическая геометрия ("разлет"). о - азимутальное возмущение, □ - осевое возмущение, – – – - 2D возмущение, —— - линейная теория

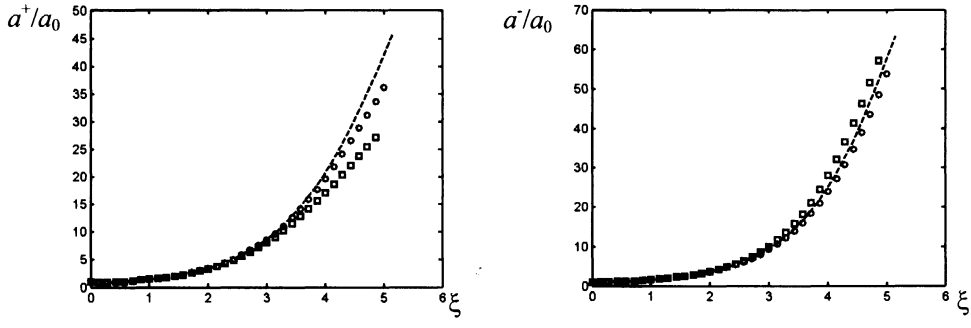

Рис.19. Зависимость безразмерных амплитуд от безразмерного времени. Цилиндрическая геометрия ("разлет"). о - азимутальное возмущение, □ - осевое возмущение, – – – - 2D возмущение.

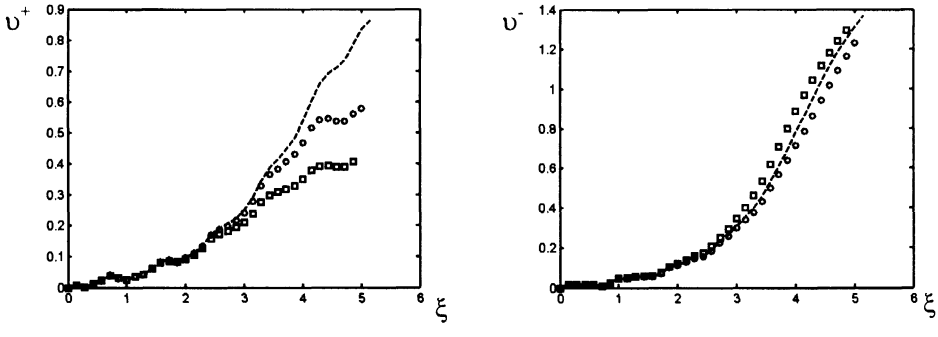

Рис.20. Зависимость безразмерных скоростей от безразмерного времени. Цилиндрическая геометрия ("разлет"). о - азимутальное возмущение, □ - осевое возмущение, – – – - 2D возмущение.

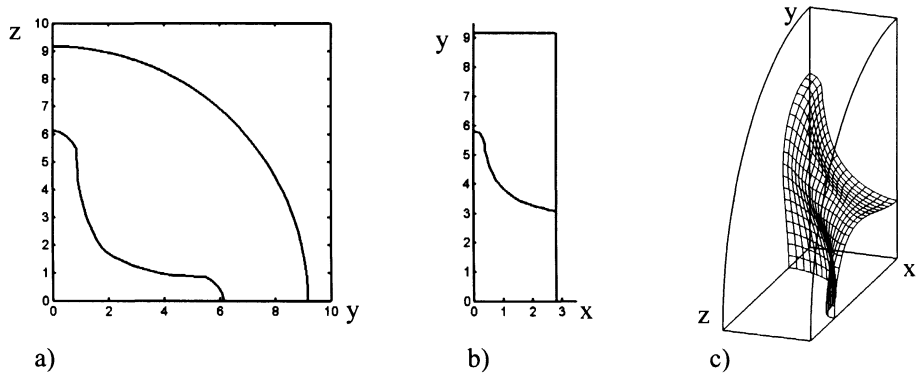

Рис.21. Положение контактной границы на момент времени $t = 1.8$. Цилиндрическая геометрия ("разлет"). a) азимутальное возмущение, b) осевое возмущение, c) 2D возмущение.

Численные исследования малого одномодового возмущения для цилиндрической геометрии показали следующее. Расчетные значения $\eta(\xi)$ лежат на теоретической прямой на ранней стадии развития неустойчивости Рэлея-Тейлора, то есть амплитуда на линейной стадии растет экспоненциально. Нарушение симметрии и отклонение от линейной теории, как в случае "схождения", так и в случае "разлета", начинается при $\xi \approx 3.5 \div 4$.. На нелинейной стадии $\xi \approx 4 \div 6$ наблюдается различие в росте амплитуд одномерных и двумерных возмущений. Двумерные возмущения растут быстрее одномерных.

4.2. Сферическая геометрия. Постановка задачи приведена на рис.22. В сферической системе координат (r,φ,ψ) поверхность $r=r_0$ является границей раздела жидкостей. Граничные условия: $r=0$ – центр симметрии; $r=R$ – жесткая стенка.

В начальный момент $t = 0$ в положение границы раздела вносится одномодовое возмущение $r = r_0 + a_0 Y_l^m(\varphi,\psi)$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, $0 \le \psi \le \pi/2$, a_0 – начальная амплитуда возмущения. $Y_l^m(\varphi,\psi) = P_l^m(\cos\varphi)\cos m\psi$ ($l = 0,1,2,\ldots$; $m = 0,1,2,\ldots,l$) – тессеральная сферическая функция степени l и порядка m; $P_l^m(x)$ ($-1 \le x \le 1$; $l = 0,1,2,\ldots$; $m = 0,1,2,\ldots,l$) – присоединенная функция Лежандра первого рода степени l и порядка m.

Для оценки влияния пространственной размерности на развитие малых одномодовых начальных возмущений на нелинейной стадии были проведены двумерные и трехмерные расчеты в постановке, когда инкременты ω экспоненциального роста на линейной стадии одинаковы и равны 2.86, как и в случае цилиндрической геометрии.

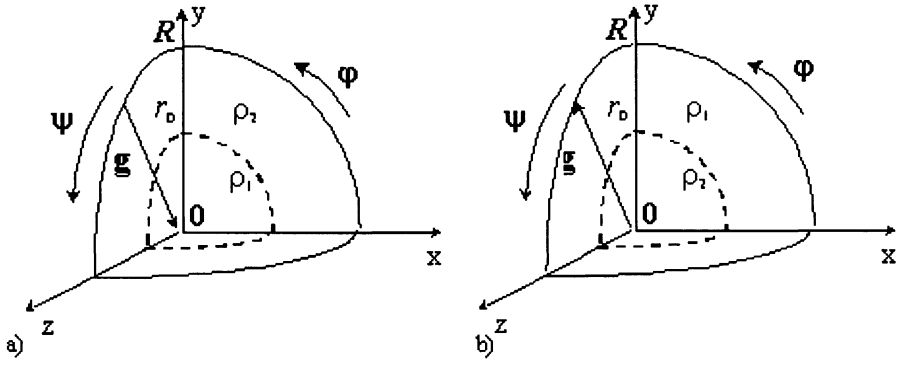

Рис.22. Постановка задачи: a) проникание тяжелой жидкости происходит по направлению к центру сферы ("схождение"), b) проникание тяжелой жидкости происходит в направлении от центра сферы ("разлет").

4.2.1. ***Центральный слой – легкое вещество.*** (рис.22а) Были проведены два двумерных расчета (№1, №2) и один трехмерный (№3).

В двумерных расчетах задавалось полярное возмущение (1D) $r=r_0+a_0P_4$ (m=0, l=4).

В трехмерном расчете начальное возмущение границы раздела было двумерным

$$r = r_0 + a_0 P_4^2(\cos\varphi)\cos 2\psi \quad (m = 2,\ l = 4),\quad P_4^2(\cos\varphi) = 7.5\sin^2\varphi(7\cos^2\varphi - 1),\quad a_0 = 0.004\,.$$

Во всех расчетах r_0=4.89, R=10.99.

Постановка двумерных расчетов отличалась только значениями a_0. Начальные амплитуды в двумерных расчетах выбирались так, чтобы в расчете №1 максимальная начальная глубина проникания легкого вещества в тяжелое совпадала с заданной в трехмерном расчете (a_0=0.038), а в расчете №2 – глубина проникания тяжелого в легкое (a_0=0.09). Разностная сетка: $29\times20\times14$ соответственно по (r,φ,ψ) в трехмерном расчете и $29\times20\times2$ – в двумерных.

Основные результаты расчетов приведены на рис.23-25.

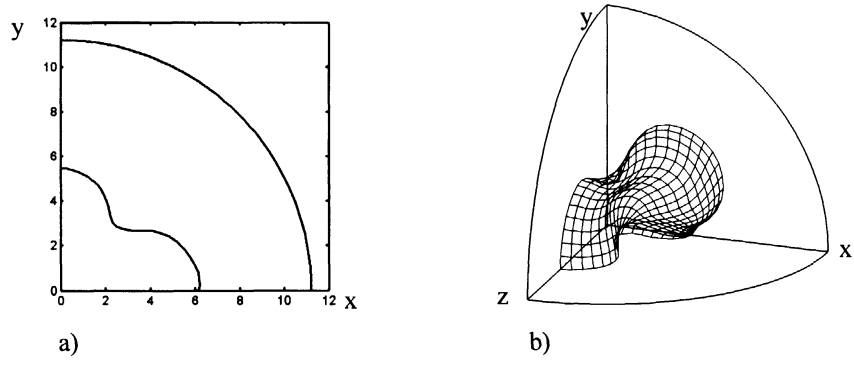

Рис.23. Положение контактной границы на момент времени t=1.9. Сферическая геометрия ("схождение"). a) 1D возмущение (№1), b) 2D возмущение

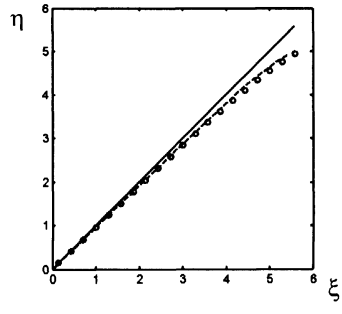

Рис.24. Зависимость амплитуды возмущений от времени в безразмерных переменных. Сферическая геометрия ("схождение"). o - 1D возмущение (№1), – – – - 2D возмущение, —— - линейная теория.

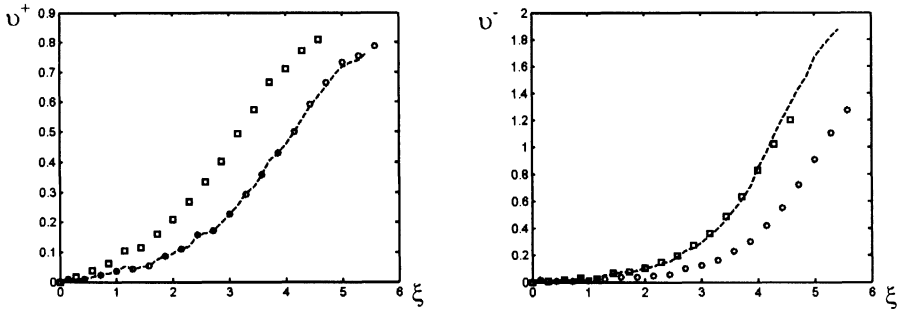

Рис.25. Зависимость безразмерных скоростей от безразмерного времени. Сферическая геометрия ("схождение"). o - 1D возмущение (№1), □ - 1D возмущение (№2), – – – - 2D возмущение.

4.2.2. *Центральный слой – тяжелое вещество.* Приведены два двумерных расчета (№4, №5) и один трехмерный (№6). Постановка расчетов такая же, как в 4.2.1. Но поскольку инкремент экспоненциального роста ω не симметричен относительно ρ_1, ρ_2 (раздел 2), то чтобы в данных расчетах, как и в описанных выше, инкременты были одинаковыми, равными ω=2.86, изменено значение r_0. Во всех расчетах r_0=4.07.

Результаты расчетов приведены на рис.26-27.

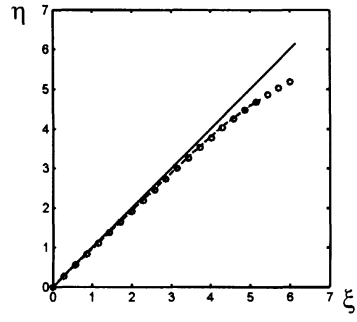

Рис.26. Зависимость амплитуды возмущений от времени в безразмерных переменных. Сферическая геометрия ("разлет"). о - 1D возмущение (№4), – – – - 2D возмущение, —— - линейная теория.

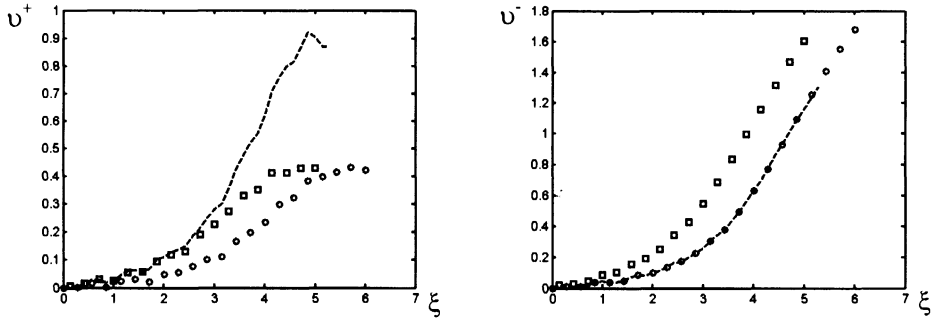

Рис.27. Зависимость безразмерных скоростей от безразмерного времени. Сферическая геометрия ("разлет"). о - 1D возмущение (№4), □ - 1D в озмущение (№5), – – – - 2D возмущение

Численные исследования показали следующее.

На ранней стадии развития расчетные данные хорошо согласуются с теоретическими. В случае "схождения", когда задается одинаковая начальная амплитуда для пузыря, скорости легкой жидкости для 2D и 3D расчетов совпадают, тогда как скорость тяжелой жидкости в 3D расчете значительно больше скорости в 2D расчете (рис.25). Это объясняется тем, что в данном случае начальная амплитуда для струи в 3D расчете больше начальной амплитуды для струи в 2D расчете. В случае, когда задавались одинаковые начальные амплитуды для струи наблюдается противоположная ситуация. Аналогичная картина наблюдается для расчетов №5 и №6. Значительное отличие в скоростях проникания легкой жидкости в тяжелую (рис.27) происходит из-за более раннего начала нелинейной стадии, и из-за того, что уже начинается влияние центра симметрии на движение пузыря.

Заключение

Численные исследования по комплексам МАХ и МАХ-3 развития неустойчивости Рэлея-Тейлора для цилиндрической и сферической геометрий в случае двух и трех пространственных переменных показали следующее.

- Численные результаты развития малых одномодовых двумерных и одномерных возмущений границы раздела при различных значениях параметров на линейной стадии совпадают с теоретическими.
- Все закономерности развития возмущений на нелинейной стадии, наблюдаемые в случае плоской геометрии. сохраняются для цилиндрической и сферической геометрий, как при "схождении" тяжелого вещества, так и при его "разлете".
- При выбранной методике сравнения роста одномерных и двумерных возмущений на нелинейной стадии (одинаковые инкременты роста на линейной стадии) на рассмотренном в расчетах временном интервале получено следующее.

Для цилиндрической геометрии, как при "схождении", так и при "разлете" рост струи практически одинаков для всех трех видов возмущений. Скорость роста пузыря имеет последовательно большие значения для азимутального, осевого, двумерного возмущений в случае "схождения" и осевого, азимутального, двумерного в случае "разлета".

Для сферической геометрии при совмещении начального значения проникновения легкой жидкости в тяжелую (тяжелой жидкости в легкую) для 1D и 2D возмущений длительное время в отличие от цилиндрической геометрии не сказывается влияние размерности начального возмущения на рост пузыря (струи), за исключением случаев, когда влияние центра симметрии становится определяющим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anuchina N.N., Volkov V.I., Es'kov N.S.* Numerical Modeling of Multi-Dimensional Flows with large deformations. Report at Russian/U.S. Weapons Laboratories introductory technical exchange in computational and computer science. Livermore, 1992.
2. *Анучина Н.Н., Волков В. И., Еськов Н. С.* Численный метод расчета контактных границ с большими деформациями. Тезисы докладов. Международная конференция. V Забабахинские чтения. Report at the 7-th Jnternational Workshop on The Physics of Compressible Turbulent Mixing. St. Peterburg, 1999.
3. *Анучина Н.Н., Волков В.И., Гордейчук В.А., Еськов Н.С., Илютина О.С., Козырев О.М.* Метод и комплекс программ МАХ-3 численного моделирования трехмерных задач газовой динамики. XII Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", посвященная памяти К.И. Бабенко. Новороссийск,1998г. Тезисы докладов.
4. *Anuchina N.N., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Ilutina O.S., Kozyrev O.M., Volkov V.I.* Proc.eeding of 6-th International Workshop on Physics of Compressible Turbulent Mixing, (Marseille, 1997), IUSTI, Marseille, France.
5. *Anuchina N.N, Volkov V.I., Gordeychuk V.A., Es'kov N.S., Ilutina O.S., Kozyrev O.M.* 3D numerical simulation of Rayleigh-Taylor instability using MAH-3 code. // Laser and Particle Beams, 18, p.175-181, (2000).
6. *Hirt C.W., Amsden A.A., Cook J.L.* An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speed. J. of Comput. Physics v.14, № 3, 1974.
7. *Pracht W.E.* Calculating three-dimensional fluid flows at all speeds with an Eulerian-Lagrangian computting mesh. J. of Comput. Physics 17, 3, 1975.
8. *Hattori F., Takabe H., and Mima K.* Rayleigh-Taylor instability in a spherically stagnating system. Phys. Fluids 29(5), May 1986, p. 1719-1724.
9. *Sakagami H., Nishihara K.* Three- dimensional Rayleigh-Taylor instability of spherical systems. Physical review letters, v.65, №4, July 1990, p. 432-435.

Поступила в редакцию 12.05.2003.