



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Зейфман, Об устойчивости неоднородных марковских цепей с непрерывным временем,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 7, 33–39

<https://www.mathnet.ru/ivm5113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

19 апреля 2025 г., 01:24:37



при любых $t \in [0, +\infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и некоторой $\psi \in C^{(1,0)}([0, +\infty) \times (0, \varepsilon_0], S_c)$,

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t, \varepsilon) = \lambda^*(\varepsilon)$, то если существует число $\tau > 0$ такое, что $\int_0^\tau B(s)B^T(s)ds -$

невырожденная матрица, $B(s) = Y^{-1}(s)Q(s)$, то для любых $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует $u \in K$, переводящее при $t \rightarrow +\infty$ точку εx_0 в точку εy_0 .

Доказательство. В уравнении (23) сделаем замену: $y = \varepsilon Y(t)z$, где $Y^{-1}(t) \rightarrow E$ при $t \rightarrow +\infty$ [3] (с. 41). Тогда это уравнение перейдет в уравнение

$$\frac{dz}{dt} = Y^{-1}(t)Q(t)u + Y^{-1}(t)f(t) + \varepsilon Y^{-1}(t)G(t, \varepsilon Y(t)z, u, \varepsilon). \quad (24)$$

Пусть уравнение (6) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = Y^{-1}(t)Q(t)\psi(t, \varepsilon) + Y^{-1}(t)f(t) + \varepsilon Y^{-1}(t)G(t, \varepsilon Y(t)z, \psi(t, \varepsilon), \varepsilon). \quad (25)$$

Уравнения (4) и (5) имеют вид $dx/dt = 0$. Предположим, что $x(t: \tau, y_0, \lambda^*, \varepsilon) \equiv y_0$. Так как $\frac{\partial x}{\partial \tau}(t: \tau, y_0, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = E$, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t: \tau, y_0, \psi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) = 0$, то выполняются все условия теоремы 1 для этого уравнения. Отсюда и из условий теоремы вытекает, что при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует решение $y(t: \tau, \bar{x}_0, \varepsilon)$ такое, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t: \tau, \bar{x}_0, \varepsilon) = y_0$.

Так как для уравнения (25) выполняются все условия теоремы из работы [5] (с. 45), то при достаточно малом ε_0 и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ существует непрерывное управление u_0 , переводящее точку x_0 в точку x_0 за время τ . Тогда управление

$$u(t, \varepsilon) = \begin{cases} u_0(t, \varepsilon), & 0 \leq t < \tau; \\ \psi(t, \varepsilon), & \tau \leq t < +\infty, \end{cases}$$

переводит точку x_0 в точку y_0 при $t \rightarrow +\infty$. Это же управление при помощи уравнения движения (23) переводит точку εx_0 в точку εy_0 при $t \rightarrow +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гребеников Е. А. Метод усреднения в прикладных задачах.— М.: Наука, 1986.— 255 с.
2. Воскресенский Е. В. Асимптотическая эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика.— 1987.— № 12.— С. 72—74.
3. Воскресенский Е. В., Артёмьева Е. Н., Белоглазов В. А., Мюрюмин С. М. Качественные и асимптотические методы интегрирования дифференциальных уравнений.— Саратов, 1987.— 188 с.
4. Рун Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с.
5. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.— 495 с.

г. Саранск

Поступили
первый вариант 08.08.1988
окончательный вариант 16.05.1990

А. И. Зейдман

УДК 519.217+517.937

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

1. Введение. Пусть $X(t), \bar{X}(t)$ — невозмущенная и возмущенная марковские цепи (м. ц.) с матрицами перехода $U(t), \bar{U}(t)$ соответственно. Если $X(t), \bar{X}(t)$ однородны, а Q, \bar{Q} — их стационарные распределения, то обычно понятие устойчивости означает, что из малости $U(1) - \bar{U}(1)$ следует малость

$Q - \bar{Q}$ (или $\sup_{t \geq 0} (U(t) - \bar{U}(t))$), см. [1] — [5]; если время t непрерывно, то предположение малости $U(1) - \bar{U}(1)$ заменяется на близость матриц интенсивностей A и \bar{A} .

Для неоднородных м. ц. при таком подходе естественно следующее понятие устойчивости: из малости $\sup_{t \geq 0} (A(t) - \bar{A}(t))$ следует малость $\sup_{t \geq 0} (U(t) - \bar{U}(t))$, см. [6]; отметим, что стационарные распределения в этом случае, вообще говоря, не существуют, и включать их в определение устойчивости нецелесообразно. Отметим, что довольно близкий подход к изучению неоднородных м. ц. приведен в [7].

В данной работе рассматривается более общая для неоднородных м. ц. ситуация, когда $A(t) - \bar{A}(t)$ мало не при всех, а лишь при достаточно больших t .

2. *Определения.* Пусть $X(t)$ — вообще говоря, неоднородная м. ц. с непрерывным временем $t \geq 0$ и не более чем счетным пространством состояний; $p_n(t) = \text{Pr}(X(t) = n)$, $x(t) = \text{col}(p_i(t))$; $A(t)$, $U(t, \tau)$ — матрицы интенсивностей и перехода соответственно. Обозначим через $\bar{X}(t)$, $\bar{p}_n(t)$, $\bar{x}(t)$, $\bar{A}(t)$, $\bar{U}(t, \tau)$ возмущенную м. ц. и ее соответствующие характеристики. Далее всюду предполагается, что $A(t)$, $\bar{A}(t)$ локально суммируемы на $[0, \infty)$ как оператор-функции на пространстве последовательностей l_1 . Пусть $s = \{x \in l_1^+ \mid \|x\| = 1\}$. Из классических результатов [8] следует, что $U(t, \tau)$, $\bar{U}(t, \tau)$ однозначно определяются при всех t, τ ($0 \leq \tau \leq t$); если $x(\tau) \in s$, то $U(t, \tau)x(\tau) = x(t) \in s$; если $\bar{x}(\tau) \in s$, то $\bar{U}(t, \tau)\bar{x}(\tau) = \bar{x}(t) \in s$.

Определение 1. Марковская цепь $X(t)$ равномерно финально устойчива, если для любого $t_0 \geq 0$ при $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|A(t) - \bar{A}(t)\| \rightarrow 0$ будет $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|U(t, t_0) - \bar{U}(t, t_0)\| \rightarrow 0$.

Определение 2. Марковская цепь $X(t)$ сильно финально устойчива, если для любых $t_0 \geq 0$, $x \in s$ при $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|A(t) - \bar{A}(t)\| \rightarrow 0$ будет $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|U(t, t_0)x - \bar{U}(t, t_0)x\| \rightarrow 0$.

В определениях 1, 2 и далее, если явно не оговорено противное, $\|\cdot\|$ есть векторная или операторная норма в l_1 . Следуя [9], через $a_{i,j}$ здесь для удобства обозначаем интенсивность перехода $j \rightarrow i$.

Замечание 1. Из равномерной (сильной) финальной устойчивости следует обычная равномерная (сильная) устойчивость соответствующей м. ц., рассмотренная в [6]. Если же невозмущенная и возмущенные м. ц. однородны, то финальная и обычная устойчивость эквивалентны.

Рассмотрим прямую систему Колмогорова для $X(t)$ как дифференциальное уравнение

$$dx/dt = A(t)x \quad (1)$$

в пространстве последовательностей l_1 .

Пусть B — некоторое пространство последовательностей, $B \subset l_1$.

Определение 3. Дифференциальное уравнение (1) имеет отрицательный генеральный показатель (о. г. п.) в s в пространстве B , если найдутся $N, \alpha > 0$ такие, что при любых t, τ ($0 \leq \tau \leq t$), $x_1(\tau) \in s$, $x_2(\tau) \in s$ справедлива оценка

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_B \leq N \exp(-\alpha(t - \tau)) \|x_1(\tau) - x_2(\tau)\|_B.$$

3. Равномерная финальная устойчивость.

Теорема 1. Пусть уравнение (1) имеет о. г. п. в s в пространстве l_1 , а возмущенные м. ц. таковы, что при некотором $M < \infty$

$$\text{ess sup}_{t \geq 0} \|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq M.$$

Тогда $X(t)$ равномерно финально устойчива.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, положим $\|A(t) - \bar{A}(t)\| = a(t) + b(t)$, где $a(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а $b(t) \leq \varepsilon$ п. в. Можно считать, что $a(t) \leq M$ п. в. Положим $p_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} p_i$, $z = \text{col}(p_1, p_2, \dots)$, тогда $x = \begin{pmatrix} 1 - \|z\| \\ z \end{pmatrix}$.

Из (1) получаем

$$dz/dt = B(t)z + f(t), \quad (2)$$

где $f = \text{col}(a_{1,0}, a_{2,0}, \dots)$, $B = (b_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$, $b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,0}$. Пусть, $\bar{z}, \bar{f}, \bar{B}$ — соответствующие выражения для $\bar{X}(t)$. Тогда имеем $\|f - \bar{f}\| \leq \|A - \bar{A}\|$, $\|B - \bar{B}\| \leq 2\|A - \bar{A}\|$. Отметим, что при всех $t > 0$

$$\|\bar{z}(t)\| \leq \|x(t)\| \leq 1. \quad (3)$$

Если $V(t, \tau)$ — эволюционный оператор уравнения (2), то при всех t, τ ($0 \leq \tau \leq t$) $\|z_1(t) - z_2(t)\| \leq \|x_1(t) - x_2(t)\| \leq N \exp(-\alpha(t-\tau)) \cdot 2\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|$, и значит, $\|V(t, \tau)\| \leq 2N \exp(-\alpha(t-\tau))$.

Рассмотрим уравнение, соответствующее (2), для м. ц. $\bar{X}(t)$, записав его в виде $d\bar{z}/dt = B(t)\bar{z} + f(t) + (\bar{B}(t) - B(t))\bar{z} + \bar{f}(t) - f(t)$. Положим для удобства, не ограничивая общности, $t_0 = 0$. Тогда при $\bar{z}(0) = z(0)$

$$\begin{aligned} \bar{z}(t) &= V(t, 0)z(0) + \int_0^t V(t, \tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t V(t, \tau)((\bar{B}(\tau) - \\ &\quad - B(\tau))\bar{z}(\tau) + (\bar{f}(\tau) - f(\tau)))d\tau = \\ &= z(t) + \int_0^t V(t, \tau)((\bar{B}(\tau) - B(\tau))\bar{z}(\tau) + (\bar{f}(\tau) - f(\tau)))d\tau. \end{aligned}$$

Используя имеющиеся оценки, получаем отсюда

$$\begin{aligned} \|\bar{z}(t) - z(t)\| &\leq \int_0^t 2N \exp(-\alpha(t-\tau)) \|\bar{B}(\tau) - B(\tau)\| \|\bar{z}(\tau)\| d\tau + \\ &\quad + \int_0^t 2N \exp(-\alpha(t-\tau)) \|\bar{f}(\tau) - f(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq 6N \exp(-\alpha t) \int_0^t \exp(\alpha\tau)(a(\tau) + b(\tau))d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Будем далее считать t настолько большим, чтобы при $u \geq t/2$ было $a(u) \leq \varepsilon$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(\alpha\tau) a(\tau) d\tau &= \int_0^{t/2} \exp(\alpha\tau) a(\tau) d\tau + \int_{t/2}^t \exp(\alpha\tau) a(\tau) d\tau \leq \\ &\leq M \int_0^{t/2} \exp(\alpha\tau) d\tau + \varepsilon \int_{t/2}^t \exp(\alpha\tau) d\tau \leq \frac{M}{\alpha} \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{\alpha} \exp(\alpha t), \\ \int_0^t \exp(\alpha\tau) b(\tau) d\tau &\leq \varepsilon \int_0^t \exp(\alpha\tau) d\tau \leq \frac{\varepsilon}{\alpha} \exp(\alpha t). \end{aligned}$$

С учетом (4) получаем

$$\|\bar{z}(t) - z(t)\| \leq (6N/\alpha)(2\varepsilon + M \exp(-\alpha t/2)). \quad (5)$$

Значит, $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq (12N/\alpha)(2\varepsilon + M \exp(-\alpha t/2))$; отсюда с учетом произвольности $x(0) = \bar{x}(0) \in s$ имеем

$$\|U(t) - \bar{U}(t)\| \leq (12N/\alpha)(2\varepsilon + M \exp(-\alpha t/2)) \rightarrow 24N\varepsilon/\alpha \quad (6)$$

при $t \rightarrow \infty$. Из (6) и вытекает утверждение теоремы.

Замечание 2. Достаточные условия отрицательности генерального показателя уравнения (1) в s в l_1 и оценки для N , α получены в [10].

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 1 м. ц. $X(t)$ равномерно квази-эргодична [10], т. е. существует матрица-функция $Q(t) = (q(t), q(t), \dots)$ с одинаковыми столбцами и единичной нормой (предельный режим распределения вероятностей состояний) такая, что для любого $t_0 \geq 0$ $\|U(t, t_0) - Q(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 1, а возмущенная м. ц. $\bar{X}(t)$ такова, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A(t) - \bar{A}(t)\| = 0$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t) - \bar{U}(t)\| = 0$.

В частности:

1) если $A(t)$ T -периодична, то общий предельный режим $Q(t)$ для $X(t)$, $\bar{X}(t)$ T -периодичен;

2) если A постоянна, т. е. $X(t)$ — однородная м. ц., то $X(t)$, $\bar{X}(t)$ равномерно эргодичны и имеют общий предельный режим Q (это утверждение другим способом доказано в [11]).

Следствие 2. Пусть при выполнении условий теоремы 1 возмущенная м. ц. $\bar{X}(t)$ такова, что $\|A(t) - \bar{A}(t)\| \leq g(t)$, где $g(t) \searrow 0$ при $t \nearrow \infty$. Тогда найдется постоянная c такая, что

$$\|\bar{U}(t) - Q(t)\| \leq c \max(\exp(-\alpha t/2), g(t/2)). \quad (7)$$

Для случая $A(t) \equiv A$ близкая оценка другим путем получена в [11].

Доказательство следствия 2. Прежде всего отметим, что $\|U(t) - Q(t)\| \leq 2N \exp(-\alpha t)$, и положим в оценках теоремы $a(t) = g(t)$, $b(t) \equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\bar{z}(t) - z(t)\| &\leq 6N \exp(-\alpha t) \left(\int_0^{t/2} \exp(\alpha \tau) g(\tau) d\tau + \int_{t/2}^t \exp(\alpha \tau) g(\tau) d\tau \right) \leq \\ &\leq 6N \exp(-\alpha t) \left(\frac{g(0)}{\alpha} \exp\left(\frac{\alpha t}{2}\right) + \frac{g(t/2)}{2} \exp(\alpha t) \right) = \frac{6N}{\alpha} \left(g(0) \exp\left(-\frac{\alpha t}{2}\right) + g(t/2) \right), \end{aligned}$$

и значит, $\|U(t) - \bar{U}(t)\| \leq (12N/\alpha)(g(0) \exp(-\alpha t/2) + g(t/2))$; отсюда и вытекает оценка (7).

4. Сильная финальная устойчивость процессов рождения и гибели. Процессы рождения и гибели (п. р. г.) часто используются при описании задач массового обслуживания и биологии [12] — [14]; различные свойства п. р. г. исследовались во многих работах (см., напр., [15], [16]). Для таких процессов матрица A имеет специальную структуру: $a_{i,j}(t) \equiv 0$ при $|i-j| > 1$, $a_{i+1,i}(t) = \lambda_i(t)$, $a_{i,i+1}(t) = \mu_{i+1}(t)$; $\bar{X}(t)$ предполагается также п. р. г. с интенсивностями $\bar{\lambda}_i(t)$, $\bar{\mu}_j(t)$. Рассмотрим, следуя [16], пространство $l_{1D} = \{z = \text{col}(p_1, p_2, \dots) \mid \|z\|_{1D} = \|Dz\|_{l_1} < \infty\}$, где матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} d_0 & d_0 & d_0 & d_0 & \dots \\ & d_1 & d_1 & d_1 & \dots \\ 0 & & d_2 & d_2 & \dots \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

а монотонно неубывающая последовательность $\{d_i\}$ такова, что $d_0 = 1$, $\sup(d_{i+1}/d_i) = d < \infty$.

Будем здесь рассматривать только такие возмущенные и невозмущенные п. р. г., для которых существует $M < \infty$ такое, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{t>0} \|A(t)\| \leq M, \quad \operatorname{ess\,sup}_{t>0} \|\bar{A}(t)\| \leq M. \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть уравнение (1) имеет о. г. п. в s в некотором пространстве l_{1D} и выполнено условие (8). Тогда п. р. г. $X(t)$ сильно финально устойчив.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\|A(t) - \bar{A}(t)\| = a(t) + b(t)$, где $b(t) \leq \varepsilon$ п. в., $a(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $a(t) \leq M$ п. в. Тогда имеем $\|B(t) - \bar{B}(t)\|_{l_{1D}} \leq 2d\|A(t) - \bar{A}(t)\| = 2d(a(t) + b(t))$, $\|f(t) - \bar{f}(t)\|_{l_{1D}} \leq \|A(t) - \bar{A}(t)\| = a(t) + b(t)$; далее $\|\bar{z}(t) - z(t)\|$ оценивается почти так же, как в доказательстве теоремы 1. Однако оценка (3) для $\|\bar{z}(\tau)\|$ здесь не проходит; поэтому приходится проводить следующие рассуждения. При достаточно малых ε уравнение $d\bar{z}/d\tau = \bar{B}(\tau)\bar{z} + \bar{f}(\tau)$ также имеет о. г. п. в l_{1D} в соответствии с результатами [8] и оценками для $a(t)$, $b(t)$. Значит, для эволюционного оператора $\bar{V}(t, \tau)$ этого уравнения при некоторых $\bar{N}, \bar{\alpha} > 0$ справедливо неравенство $\|\bar{V}(t, \tau)\|_{l_{1D}} \leq \bar{N} \exp(-\bar{\alpha}(t - \tau))$, $0 \leq \tau \leq t$. Тогда, учитывая, что $\|\bar{f}(\tau)\| \leq M$ п. в., $\bar{z}(0) = z(0)$, получаем при $z(0) \in l_{1D}$ по норме пространства l_{1D}

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \|\bar{V}(t, 0)\| \|z(0)\| + \int_0^t \|\bar{V}(t, \tau)\| \|\bar{f}(\tau)\| d\tau \leq \bar{N} \exp(-\bar{\alpha}t) \|z(0)\| + \\ &+ \int_0^t M\bar{N} \exp(-\bar{\alpha}(t - \tau)) d\tau \leq \bar{N} \exp(-\bar{\alpha}t) \|z(0)\| + \frac{M\bar{N}}{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Далее проверяем непосредственно, что $\|\cdot\|_i \leq 2\|\cdot\|_{l_{1D}}$; отсюда следует, что достаточно рассмотреть лишь начальные условия из l_{1D} и получить оценки также в норме пространства l_{1D} . Теперь $\|z(t) - \bar{z}(t)\|_{l_{1D}}$ оценивается аналогично (4).

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 2, а возмущенный п. р. г. $\bar{X}(t)$ таков, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|A(t) - \bar{A}(t)\| = 0$. Тогда для любого $x \in s$ $\|U(t)x - \bar{U}(t)x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $X(t)$ и $\bar{X}(t)$ имеют общий сильный предельный режим $Q(t)$. В частности:

- 1) если $A(t)$ T -периодична, то $Q(t)$ также T -периодичен;
- 2) если A постоянна, то $X(t)$, $\bar{X}(t)$ сильно эргодичны с общим предельным режимом Q .

5. Примеры. Рассмотрим финальную устойчивость некоторых моделей систем обслуживания. При этом в примерах 1—3 $X(t)$ есть число требований в системе в момент t .

Пример 1. $M(t)/M(t)/N/0$. Здесь $X(t)$ — п. р. г. с пространством состояний $\{0, 1, \dots, N\}$ и интенсивностями $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t)$, $\mu_n(t) = \mu(t)$, $1 \leq n \leq N$.

Положим $h(t) = \mu(t)$. При выполнении условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \tau)^{-1} \int_{\tau}^t h(t_1) dt_1 = h > 0 \quad (9)$$

уравнение (1) имеет о. г. п. в s [17].

Таким образом, при выполнении условия (9) с $h(t) = \mu(t)$ $X(t)$ финально устойчив (т. к. пространство состояний конечно, то сильная и равномерная устойчивости эквивалентны).

В частности, если $\lambda(t), \mu(t)$ асимптотически постоянны при $t \rightarrow \infty$, т.е. $\lambda(t) = \lambda + l(t)$, $\mu(t) = \mu + m(t)$, где $|l(t)| + |m(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то условие (9) выполняется при $\mu > 0$; при этом $X(t)$ эргодичен, а предельный режим можно вычислять по известным формулам.

Если $\lambda(t), \mu(t)$ периодичны с общим периодом T или асимптотически T -периодичны, то для выполнения условия (9) достаточно, чтобы интеграл по периоду от периодической составляющей $\mu(t)$ был положителен. При этом предельный режим $Q(t)$ T -периодичен.

Пример 2. $M(t)/M(t)/N$. Здесь $X(t)$ — п. р. г. с интенсивностями $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t)$, $\mu_n(t) = \mu(t) \min(n, N)$, $n \geq 1$.

Пусть для некоторого $d > 1$ при $h(t) = N\mu(t) - d\lambda(t)$ выполнено условие (9). Тогда при $d_n = d^n$ уравнение (1) имеет о. г. п. в s в пространстве l_{1D} [16]. Если, кроме того,

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} (\lambda(t) + \mu(t)) < \infty, \quad (10)$$

то $X(t)$ сильно финально устойчив.

В частности, если $\lambda(t), \mu(t)$ асимптотически постоянны, то для выполнения условия (9) достаточно, чтобы было $N\mu > \lambda$. При выполнении этого условия $X(t)$ сильно эргодичен, а предельный режим можно вычислять по известным формулам.

Если $\lambda(t), \mu(t)$ асимптотически T -периодичны, то для выполнения условия (9) достаточно, чтобы для периодических составляющих интенсивностей выполнялось условие $\int_0^T (N\mu(t) - \lambda(t)) dt > 0$. При этом предельный режим $Q(t)$ T -периодичен.

Пример 3. Система обслуживания с клиентами, боящимися очереди [18]. Здесь $X(t)$ — п. р. г. с интенсивностями $\lambda_{n-1}(t) = \lambda(t)/n$, $\mu_n(t) = \mu(t)$, $n \geq 1$.

Пусть для некоторого $a \in (0, 1)$ при $h(t) = \mu(t) - a\lambda(t)$ выполняется (9). Тогда при $d = ([a^{-1}] + 2)/([a^{-1}] + 1)$, $d_n = d^n$ уравнение (1) имеет о. г. п. в s в пространстве l_{1D} . Значит, при выполнении условия (10) $X(t)$ сильно финально устойчив. Если $\lambda(t), \mu(t)$ асимптотически постоянны, то (9) выполняется при $\mu > 0$ и $X(t)$ сильно эргодичен; если $\lambda(t), \mu(t)$ асимптотически T -периодичны, то (9) выполняется, если интеграл по периоду от периодической составляющей $\mu(t)$ положителен; при этом $Q(t)$ T -периодичен.

Пример 4. Замкнутая сеть массового обслуживания [19]. Здесь общее число требований в системе фиксировано (N), каждое требование может находиться в одном из K узлов ($K \leq \infty$); $X(t)$ есть K -мерный вектор объемов требований в узлах сети. Интенсивность перехода из состояния $m = (m_1, \dots, m_K)$ в состояние $n = (n_1, \dots, n_K)$ есть $\lambda_{m,n}(t)$; при этом $|m| = \sum m_i = |n| = \sum n_i = N$; а $\lambda_{m,n}(t) \neq 0$ только в случае, если найдутся i, j такие, что при $k \neq i, j$ $m_k = n_k$; $n_i = m_i + 1$, $n_j = m_j - 1$.

Пусть для простоты все $\lambda_{m,n}(t)$ T -периодичны. Пусть существуют $a > 0$, $R < \infty$ и вектор n ($|n| = N$) такие, что при любом $m \neq n$ найдется цепочка $m = m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(k)} = n$ длины не больше R такая, что для любого i

$$\int_0^T \lambda_{m^{(i)}, m^{(i+1)}}(t) dt \geq a.$$

Тогда уравнение (1) имеет о. г. п. в s в l_1 [10] и, следовательно, $X(t)$ равномерно финально устойчив. При этом предельный режим $Q(t)$ T -периодичен.

Отметим, что при $K < \infty$ сформулированное условие необходимо для финальной устойчивости $X(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников В. В. Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций.— М.: Наука, 1976.— 234 с.
2. Штойян Д. Качественные свойства и оценки стохастических моделей; Пер. с нем.— М.: Мир, 1979.— 268 с.
3. Карташов Н. В. Сильно устойчивые цепи Маркова // Тр. 5-го Всес. семин. Пробл. устойчивости стохастич. моделей.— М., 1981.— С. 54—59.
4. Карташов Н. В. Критерии равномерной эргодичности и сильной устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством // Теория вероятн. и мат. статистика.— Киев, 1984.— Вып. 30.— С. 65—81.
5. Карташов Н. В. Неравенства в теоремах эргодичности и устойчивости цепей Маркова с общим фазовым пространством. I, II // Теория вероятн. и ее примен.— 1985.— Т. 30.— № 2.— С. 230—240; — № 3.— С. 478—485.
6. Zeifman A. I. Stability for continuous-time nonhomogeneous Markov chains // Lect. Notes Math.— 1985.— V. 1155.— P. 401—414.
7. Анисимов В. В. Оценки отклонений переходных характеристик неоднородных марковских процессов // Укр. матем. журн.— 1988.— Т. 40.— № 6.— С. 699—704.
8. Далецкий Ю. Д., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1970.— 536 с.
9. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— 2-е изд.— М.: Наука, 1976.— 352 с.
10. Zeifman A. I. Quasi-ergodicity for continuous-time nonhomogeneous Markov chains // J. Appl. Probab.— 1989.— V. 26.— № 3.— P. 643—648.
11. Johnson J., Isaacson D. Conditions for strong ergodicity using intensity matrices // J. Appl. Probab.— 1988.— V. 25.— № 1.— P. 34—42.
12. Баруча-Рид А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения; Пер. с англ.— М.: Наука, 1969.— 512 с.
13. Goel N., Richter-Dyn N. Stochastic models in biology.— N. Y., 1974.— 269 p.
14. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.— 2-е изд.— М.: Наука, 1987.— 336 с.
15. Van Doorn E. Conditions for exponential ergodicity and bounds for the decay parameter of a birth-death process // Adv. Appl. Probab.— 1985.— V. 17.— № 3.— P. 514—530.
16. Зейфман А. И. Качественное исследование неоднородных процессов рождения и гибели // Тр. 5-го Всес. семин. Пробл. устойчивости стохастич. моделей.— М., 1988.— С. 32—40.
17. Зейфман А. И. Некоторые свойства системы с потерями в случае переменных интенсивностей // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 1.— С. 107—113.
18. Natvig B. On the transient state probabilities for a queueing model where potential customers are discouraged by queue length // J. Appl. Probab.— 1974.— V. 11.— № 2.— P. 345—354.
19. Башарин Г. П., Толмачев А. Л. Теория сетей массового обслуживания и ее применения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техн. ВИНТИ. Сер. теор. вероятностей, матем. стат., теор. кибернет.— 1983.— Т. 21.— С. 3—119.

г. Вологда

Поступили
первый вариант 29.01.1988
окончательный вариант 20.03.1989