



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Адельсон-Вельский, А. А. Леман, Об одном алгоритме быстрого отыскания относительных максимумов функции, заданной на целочисленной решетке, при ограниченной памяти, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 772–774

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

18 января 2025 г., 23:24:11



Г. М. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ, А. А. ЛЕМАН

**ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ БЫСТРОГО ОТЫСКАНИЯ
ПСЕВДОМАКСИМУМОВ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ
НА ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКЕ, ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ПАМЯТИ**

(Представлено академиком П. С. Новиковым 1 VII 1965)

1. Рассмотрим множество M узлов $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ k -мерной целочисленной решетки, координаты которых удовлетворяют соотношениям $1 \leq x_k \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq n$. Пусть на множестве M задана функция $f(X)$, такая, что $f(Y) \neq f(X)$, если $Y \neq X$. Один из алгоритмов узнавания, предложенный П. Е. Куниным, приводит к задаче о разбиении множества M , определяемом следующим образом. Пусть $X^I = (x_1^I, x_2^I, \dots, x_k^I)$ — точка множества M , в которой функция $f(X)$ достигает максимума. Исключим из рассмотрения все точки плоскостей $x_i = x_j^I$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. На оставшемся множестве снова найдем точку максимума функции $f(X)$ и, обозначив ее через $X^{II} = (x_1^{II}, x_2^{II}, \dots, x_k^{II})$, исключим из рассмотрения все точки плоскостей $x_i = x_j^{II}$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Продолжая этот процесс, мы получим некоторое разбиение R_f множества M . Очевидно, что разбиение R_f полностью определяется последовательностью $\Xi = \{X^I, X^{II}, \dots\}$; очевидно также, что последовательность Ξ состоит не более чем из n точек.

Понятно, что для определения разбиения R_f необходимо не менее чем Cn^k раз обратиться к вычислению функции $f(X)$, так как, например, все точки множества M должны быть просмотрены. Ясно также, что необходимый объем памяти не может быть меньше чем Cn , так как уже сама последовательность Ξ может содержать n точек.

Теорема 1. *Существует алгоритм отыскания разбиения R_f и последовательности Ξ , использующий $C_1 n^k$ обращений к вычислению функции $f(X)$ и требующий объема памяти $C_2 n$.*

2. Через $M(a)$ обозначим множество точек $X \in M$, хотя бы одна координата которых равна a .

О п р е д е л е н и е. Пусть N — некоторое подмножество множества M . Точка $\bar{X} \in N$ называется k -максимумом на множестве N , если $f(\bar{X}) > f(Y)$ при всех $Y \in N \cap \bigcup_{i=1}^k M(\bar{x}_i)$.

Л е м м а 1. *Пусть неким способом найдены некоторые точки совокупности Ξ и точки соответствующих плоскостей исключены из рассмотрения. Тогда всякий k -максимум на оставшемся множестве M' принадлежит Ξ .*

В самом деле, k -максимум $X^0 = (x_1^0, \dots, x_k^0)$ может быть исключен из множества M' только в том случае, если существует такое множество $M(x_s^0)$ и такая точка $Y \in M' \cap M(x_s^0)$, что $f(Y) > f(X^0)$. Последнее неравенство, однако, невозможно по определению k -максимума.

Предлагаемый алгоритм основан на последовательном отыскании k -максимумов.

О п р е д е л е н и е. Пусть N — некоторое подмножество множества M . Последовательность точек U^1, U^2, \dots, U^s множества N мы будем называть **п р а в и л ь н о й**, если выполнены следующие условия:

$$1. f(U^1) < f(U^2) < \dots < f(U^s).$$

$$2. U^a \in \bigcup_{i=1}^k M(u_i^b); a, b = 1, 2, \dots, k; a < b - 1.$$

Правильная последовательность называется *полной*, если U^s есть k -максимум на множестве N .

Укажем способ построения полных правильных последовательностей. Пусть U^1 — любая точка множества N . Если уже построена правильная последовательность U^1, U^2, \dots, U^i и точка U^i есть k -максимум, то полная правильная последовательность построена. В противном случае в качестве U^{i+1} выберем точку, в которой достигается максимум функции $f(X)$ на множестве $N \cap \bigcup_{j=1}^k M(u_j^i)$. Очевидно, что всякая правильная последовательность не более чем через n шагов достраивается до полной.

Построим на множестве M полную последовательность, начиная с произвольной точки $U^1: U^1, U^2, \dots, U^s$. По определению, U^s есть k -максимум и, в силу леммы 1, $U^s \in \Xi$. Исключив из множества M все точки $X \in \bigcup_{i=1}^k M(u_i^s)$, мы получим некоторое множество M^1 с уже построенной в нем правильной последовательностью U^1, U^2, \dots, U^{s-2} (легко видеть, что все эти точки не попали в число исключенных). Если последовательность U^1, U^2, \dots, U^{s-2} уже полная, то $U^{s-2} \in \Xi$; исключив из множества M^1 все точки $X \in \bigcup_{i=1}^k M(u_i^{s-2})$, мы получим множество M^2 и правильную последовательность U^1, U^2, \dots, U^{s-4} в нем и т. д.

Пусть мы получили таким образом некоторое множество M^l с правильной, но неполной последовательностью $U^1, U^2, \dots, U^{s-2l}$ в нем. Достроив эту последовательность до полной, мы получим новый k -максимум и т. д. Назовем объединение всех построенных таким способом правильных полных последовательностей с начальной точкой U^1 *деревом* U .

Пусть дерево U содержит m_u полных правильных последовательностей и, следовательно, m_u k -максимумов.

Л е м м а 2. *Общее количество вершин дерева U не превосходит $2m_u$.*

Действительно, пусть U^α — произвольная вершина дерева U , не являющаяся k -максимумом. Тогда точка U^α в некоторый момент была исключена из рассмотрения вместе с неким k -максимумом U^β . Однако в каждый момент в дереве присутствуют (и еще не являются исключенными) только вершины, принадлежащие одной правильной последовательности. Из определения правильной последовательности ясно, что вершина U^α может лишь непосредственно предшествовать k -максимуму U^β . Таким образом, все вершины дерева (кроме, быть может, вершины U^1) разбиваются на непересекающиеся пары, состоящие из k -максимумов и предшествующих им точек, что и доказывает лемму.

С л е д с т в и е. *Построение дерева U , содержащего m_u k -максимумов, требует не более чем $St_{n,k-1}$ обращений к вычислению функции $f(X)$.*

В самом деле, каждый шаг построения дерева связан с отысканием максимума функции $f(X)$ на некотором подмножестве одного из множеств $M(a)$. В каждой вершине U^i дерева U приходится привлекать в рассмотрение k таких множеств и притом столько раз, сколько существует k -максимумов вида U^{i+2} . Так как при этом число вершин дерева не превосходит $2m_u$, а количество точек решетки, содержащихся в множестве $M(a)$, равно C_{n+k-2}^{k-1} , то

$$C = \frac{3k}{(k-1)!} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{k-2}{n}\right) \leq \frac{3k}{(k-1)!} e^{2/3 k^2/n}.$$

Пусть дерево U окажется полностью построенным до того, как все точки множества M будут исключены (и, следовательно, до того, как все точ-

ки совокупности Ξ будут получены). Обозначим множество исключенных точек через M_u . На множестве $M \setminus M_u$ можно с помощью описанного процесса построить новое дерево, начав с любой точки V^1 , — дерево V . Если M_v — множество точек, исключенных при построении дерева V , и $M \neq M_u \cup M_v$, то наш процесс можно продолжить, начав с произвольной точки W^1 множества $M \setminus (M_u \cup M_v)$.

Так как всего может быть построено не более n деревьев, то с построением некоторого дерева T все точки множества M будут исчерпаны: $M = M_u \cup M_v \cup \dots \cup M_t$; при этом, очевидно, имеет место неравенство $m_u + m_v + \dots + m_t \leq n$. Объединяя это неравенство со следствием леммы 2, мы получаем доказательство первого утверждения теоремы:

$$\frac{3k}{(k-1)!} e^{2/3 k^2/n} (m_u + m_v + \dots + m_t) \leq \frac{3k}{(k-1)!} e^{2/3 k^2/n} n,$$

так что $C_1 \leq \frac{3k}{(k-1)!} e^{2/3 k^2/n}$.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно заметить, что общее количество точек во всех деревьях U, V, \dots, T не превосходит $2(m_u + m_v + \dots + m_t)$, что, как показано выше, не более $2n$. Так как последовательность Ξ также состоит не более чем из n точек, то необходимый объем памяти не превосходит $3n$; $C_2 \leq 3$.

З а м е ч а н и е 1. Константу C_2 в действительности можно понизить до значения $C_2 = 2$, так как нам достаточно помнить только точки совокупности Ξ и той правильной последовательности, которую мы достраиваем до полной; при этом, если уже найдены l точек совокупности Ξ , то длина последовательности не более $2n - l$.

З а м е ч а н и е 2. Требование $f(X) \neq f(Y)$ при $X \neq Y$ можно отбросить. При этом разбиение R_f определяется неоднозначно, и задача ставится так: найти какое-нибудь разбиение R_f множества M , последовательность $\Xi = \{X^I, X^{II}, \dots\}$, которого удовлетворяет условиям $f(X^I) \geq f(X^{II}) \geq \dots$. Теорема 1, очевидно, справедлива и для этого случая.

З а м е ч а н и е 3. Задачу, сформулированную в п. 1, можно обобщить следующим образом. Пусть дана функция $f(X)$, определенная на множестве K вершин $X(x_1, \dots, x_k)$ k -мерной целочисленной решетки, расположенных в кубе $1 \leq x_i \leq n$. Пусть G — некоторая подгруппа группы P_k перестановок из k элементов. Пусть, далее, известно, что $f(Y) = f(X)$ для всех тех и только тех точек Y , координаты которых получаются из координат точки X перестановками, принадлежащими подгруппе G .

Обозначим через M множество, получающееся из множества K после его факторизации по подгруппе G . Тогда разбиение R_f множества M и последовательность Ξ определяются совершенно аналогично тому, как это сделано в п. 1. Теорема 1 полностью переносится на этот случай. Отметим только, что вместо множеств $M(a)$ придется рассматривать множества, получающиеся после факторизации по подгруппе G из множеств точек плоскостей $x_i = a$.

Заметим также, что величина константы C_1 зависит, вообще говоря, от группы G ; значение же C_2 не превосходит 2.

Поступило
9 VI 1965