

Общероссийский математический портал

В. Ф. Журавлёв, Д. М. Климов, П. К. Плотников, Новая модель шимми,  
*Труды МИАН*, 2013, том 281, 32–41

<https://www.mathnet.ru/tm3464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.169

18 апреля 2025 г., 15:36:21



УДК 531

## Новая модель шимми

В. Ф. Журавлёв<sup>1</sup>, Д. М. Климов<sup>1</sup>, П. К. Плотников<sup>2</sup>

Поступило в сентябре 2012 г.

Шимми представляет собой явление интенсивных угловых автоколебаний колеса экипажа. Подобные автоколебания — серьезная угроза безопасности движения, чем и объясняется огромный интерес исследователей к этому явлению. Наиболее острой эта проблема является для передних колес самолетов. Обычно рассматривают деформацию пневматика в качестве основной причины шимми. Не подвергая сомнению этот тезис, тем не менее заметим, что эта причина не единственна. Явление шимми можно наблюдать в быту и в случае разнообразных ручных колясок, где ссылка на упругость пневматика чаще всего неуместна, если колеса жесткие. Ниже будет показано, что теория поликомпонентного сухого трения вполне объясняет явление шимми для абсолютно жестких колес и, следовательно, служит по крайней мере одной из причин этого явления в общем случае. Причиной игнорирования сухого трения исследователями в объяснении шимми была неразвитость представлений об этом трении до настоящего времени, а объяснить шимми в рамках прежних представлений не удавалось.

DOI: 10.1134/S0371968513020040

## 1. УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЕРЕДНЕГО КОЛЕСА

В работах [1–6] рассмотрен ряд конструктивных схем и моделей автоколебаний колеса экипажа. Здесь исследуется другая, не связанная с деформацией пневматика [2] модель шимми.

Рассмотрим простейшую из возможных конструкций (рис. 1). Колесо крепится к самолету (экипажу) при помощи вертикальной стойки, обладающей упругостью в направлении оси  $x$  движения самолета со скоростью  $V$ , упругостью в боковом направлении  $y$  и упругостью на кручение вокруг вертикальной оси  $z$ .

Выпишем уравнения переднего колеса самолета (без выноса)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + px &= F_x, \\ m\ddot{y} + py &= F_y, \\ C\ddot{\beta} &= M_r - F_x R, \\ A\ddot{\gamma} + q\gamma &= M_z + F_0\gamma\Delta + F_0\frac{R}{l}y. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $m$  — масса колеса,  $p$  — изгибная жесткость стойки, предполагаемая одинаковой в обоих направлениях,  $C$  — полярный момент инерции колеса,  $A$  — его экваториальный момент инерции,  $q$  — крутильная жесткость стойки,  $F_x$ ,  $F_y$  — проекции силы трения скольжения на оси  $x$  и  $y$ ,  $M_r$  — момент трения качения, возникающий из-за деформации диаграммы распределения нормальных напряжений в сторону качения [7, 8],  $\Delta = M_r/N$  — смещение центра приложения вертикальной реакции  $N$ , вызывающее появление момента трения качения,  $l$  — высота стойки,  $R$  — радиус колеса,  $M_z$  — момент трения верчения,  $F_0 = fN$ ,  $f$  — коэффициент сухого трения.

Появление членов  $F_0\gamma\Delta$  и  $F_0(R/l)y$  в последнем уравнении системы поясняется на рис. 2.

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия.

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., Саратов, Россия.

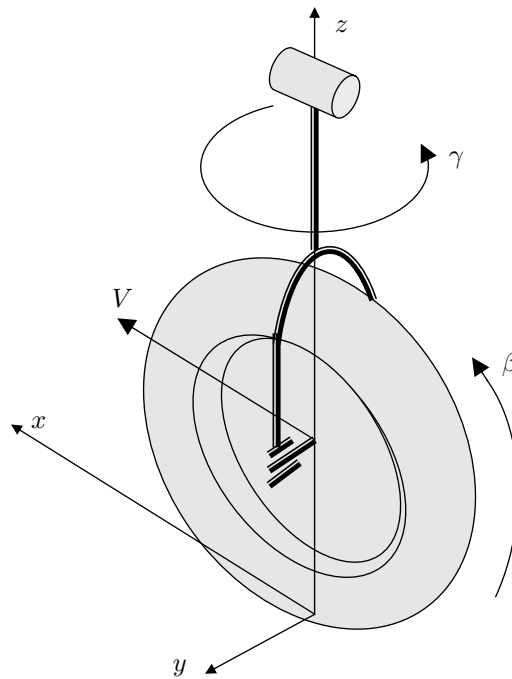


Рис. 1

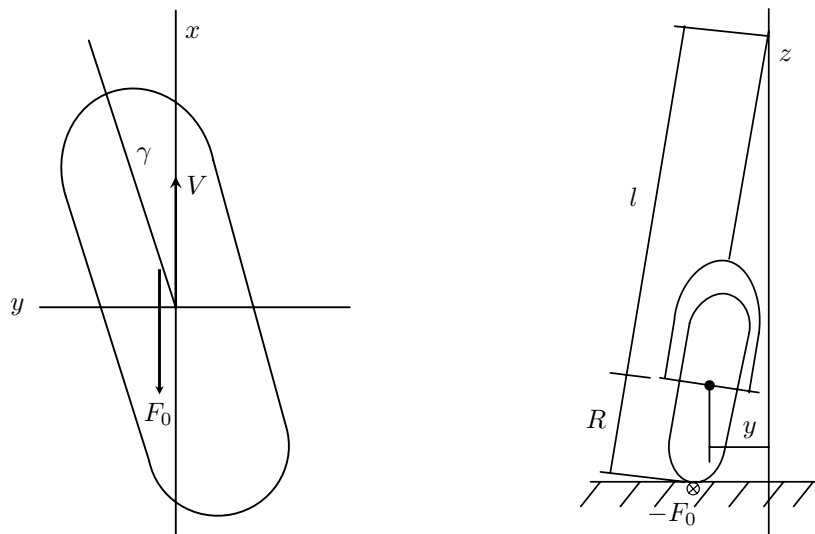


Рис. 2

## 2. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОЛЕСА С ДОРОЖНЫМ ПОЛОТНОМ

Колесо, вращаясь с угловой скоростью  $\dot{\beta}$ , проскальзывает со скоростью  $v = V - R\dot{\beta}$ , взаимодействуя с дорожным полотном посредством сил сухого трения. Пусть  $\varepsilon$  есть радиус пятна контакта, которое для простоты полагаем круговым. Введем имеющее размерность линейной скорости обозначение для угловой скорости верчения  $u = \varepsilon\dot{\gamma}$ , где  $\dot{\gamma}$  — угловая скорость верчения. Будем пользоваться для верчения и скольжения, когда они присутствуют порознь, моделью сухого трения Кулона:

$$M = M_0 \operatorname{sgn} u, \quad u \neq 0, \quad \text{если } v \equiv 0;$$

$$F = F_0 \operatorname{sgn} v, \quad v \neq 0, \quad \text{если } u \equiv 0.$$

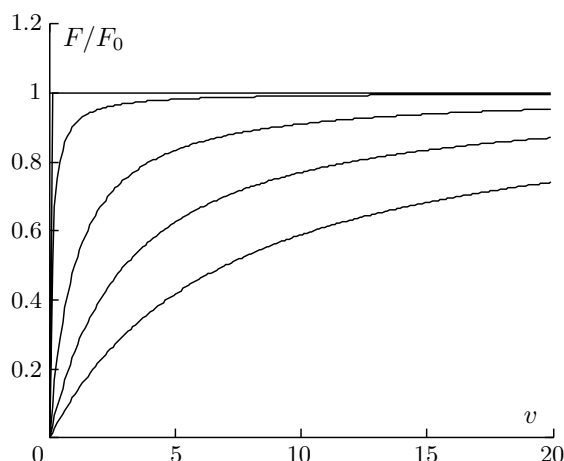


Рис. 3

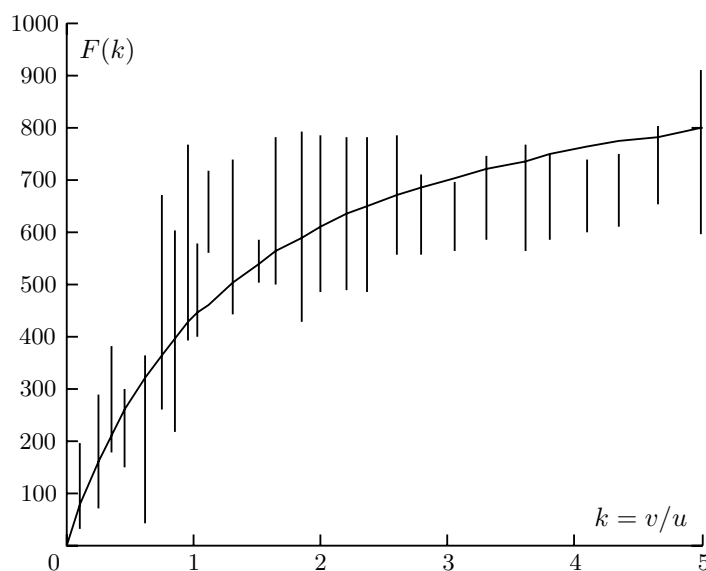


Рис. 4

Если же верчение и скольжение присутствуют одновременно, то, как показано в [9, 10], связь момента трения и силы трения с угловой скоростью и линейной скоростью выражается так:

$$M = M_0 \frac{u}{|u| + av}, \quad F = F_0 \frac{v}{|v| + bu}, \quad u^2 + v^2 \neq 0.$$

На рис. 3 в качестве примера показан график зависимости силы  $F$  от линейной скорости  $v$  при нескольких значениях угловой скорости  $bu = 0, 0.1, 1, 3, 7$ .

Выражение для зависимости силы трения от кинематических компонент недавно экспериментально подтверждено в МФТИ С. Семендяевым (рис. 4).

Здесь сила трения направлена против вектора скорости скольжения. Если же площадка контакта несимметричная, то вектор силы не коллинеарен вектору скорости и для нахождения компоненты силы, поперечной скорости, воспользуемся идеей, представленной, например, в [7], в силу которой качение вызывает деформацию диаграммы распределения нормальных напряжений в контакте:

$$\sigma(\theta, \rho) = \frac{3N}{2\pi\epsilon^3} \sqrt{\epsilon^2 - \rho^2} (1 + h\rho \cos \theta), \quad h = |h| \operatorname{sgn} v.$$

Переменные  $\rho$  и  $\theta$  суть полярные координаты точки в круговой площадке контакта, качение предполагается происходящим вдоль оси  $x$ . Здесь  $\sigma(\rho, \theta)|_{h=0}$  представляет собой закон распределения Герца в случае точечного контакта.

Тогда для компоненты силы, перпендикулярной скорости, получим

$$F_y = -f \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\omega \rho^2 \cos \theta \sigma(\theta, \rho) d\rho d\theta}{\sqrt{\omega^2 \rho^2 - 2v\omega \rho \sin \theta + v^2}}.$$

После перехода к безразмерным переменным

$$(\rho, \omega) \rightarrow (r, u): \quad \rho = \varepsilon r, \quad \omega = \frac{u}{\varepsilon},$$

эта зависимость приводится к виду

$$F_y(k) = -k \frac{3Nfh\varepsilon}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \sqrt{1-r^2} \cos^2 \theta dr d\theta}{\sqrt{k^2 r^2 - 2kr \sin \theta + 1}}, \quad k = \frac{u}{v}.$$

Хотя этот интеграл может быть вычислен точно, воспользуемся аппроксимацией Паде, для чего подсчитаем

$$F_y(0) = 0, \quad F_y(\infty) = -\frac{3\pi Nfh\varepsilon}{32}, \quad \frac{dF_y}{dk}(0) = -\frac{Nfh\varepsilon}{5}.$$

Аппроксимация Паде имеет вид

$$F_y = -3\pi Nfh\varepsilon \frac{u}{15\pi v + 32u}.$$

Для трения качения имеем

$$M_r = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \sigma(\rho) \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta.$$

Выполняя интегрирование, находим

$$M_r = \frac{Nh\varepsilon^2}{5}.$$

### 3. МОДЕЛЬ ШИММИ

В итоге уравнения колебаний колеса на стойке получаются такими:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + px &= -\frac{F_0 v}{v + b|\varepsilon\dot{\gamma}|}, \\ m\ddot{y} + py &= -\frac{3F_0 \pi h \varepsilon^2 \dot{\gamma}}{15\pi v + 32|\varepsilon\dot{\gamma}|}, \\ \frac{C}{R} \dot{v} &= \frac{h\varepsilon^2 N}{5} - \frac{fRNv}{v + b|\varepsilon\dot{\gamma}|}, \\ A\ddot{\gamma} + q\gamma &= -\frac{M_0 \varepsilon \dot{\gamma}}{|\varepsilon\dot{\gamma}| + av} + fN\gamma \frac{h\varepsilon^2}{5} + fN \frac{R}{l} y \quad (0 \leq v \leq V). \end{aligned} \tag{3.1}$$

В случае точечного контакта по Герцу для аппроксимации Паде первого приближения  $a = 15\pi/16$ ,  $b = 8/3\pi$ .

Это и есть модель динамики переднего колеса самолета, взаимодействующего с дорожным полотном силами сухого трения.

Если колебаний колеса вокруг вертикали нет ( $\dot{\gamma} \equiv 0$ ), то третье уравнение полученной системы приобретает вид

$$\dot{v} = \frac{RN(h\varepsilon^2 - 5fR)}{5C}.$$

Если трение качения преобладает, т.е.  $h\varepsilon^2 > 5fR$  (например, на полосе обледенение), то скорость проскальзывания монотонно возрастает до значения  $v = V$ , т.е. вплоть до блокировки колеса. Обычно преобладает трение скольжения:  $h\varepsilon^2 < 5fR$ , и в отсутствие шимми проскальзывание монотонно убывает до нуля.

Рассмотрим теперь общий случай. При стационарном качении имеем

$$\ddot{\beta} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{h\varepsilon^2}{5} = \left\langle \frac{fRv}{v + b|\varepsilon\dot{\gamma}|} \right\rangle.$$

Угловыми скобками обозначено осреднение по времени вдоль решений невозмущенной (с нулевыми правыми частями) системы. Полученное соотношение позволяет найти проскальзывание

$$v = \frac{2hb\varepsilon^3\dot{\gamma}_0}{\pi(5fR - h\varepsilon^2)}.$$

Таким образом, стационарное проскальзывание может установиться при наличии шимми только в случае преобладания трения скольжения.

Для исследования устойчивости систему следует линеаризовать, полагая колебания вращения  $\varepsilon\dot{\gamma}$  малыми в сравнении со средним проскальзыванием  $V - \dot{\beta}R$ . При этом отделяются уравнение колебаний стойки поперек направления движения и уравнение крутильных колебаний [11]

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \lambda_1^2 y + L\dot{\gamma} &= 0, \\ \ddot{\gamma} + \xi\dot{\gamma} + \tilde{\lambda}_2^2 \gamma - Sy &= 0. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$\lambda_1^2 = \frac{p}{m}, \quad \tilde{\lambda}_2^2 = \lambda_2^2 - \frac{fNh\varepsilon^2}{5A}, \quad \lambda_2^2 = \frac{q}{A}, \quad \xi = \frac{M_0\varepsilon}{aAv}, \quad L = \frac{h\varepsilon^2 fN}{5mv}, \quad S = \frac{fNR}{Al}.$$

Применение к этой системе двух линейных уравнений критерия Рауса–Гурвица позволяет констатировать неустойчивость (шимми), если

$$5q < hF_0\varepsilon^2 \quad \text{или} \quad \xi(\tilde{\lambda}_2^2 - \lambda_1^2) < LS. \quad (3.2)$$

Используя введенные ранее обозначения, эти условия можно переписать иначе: неустойчивость имеет место, если

$$q < fM_r \quad \text{или} \quad 15\pi l mA(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) < (3\pi l m \varepsilon^2 + 16aRA)hF_0. \quad (3.3)$$

Полученные условия показывают, что для борьбы с шимми следует увеличивать крутильную жесткость стойки ( $q, \lambda_2^2$ ) и уменьшать трение скольжения ( $f, F_0$ ) и трение качения ( $h, M_r$ ). Положительный эффект дает уменьшение пятна контакта  $\varepsilon$  и увеличение массовых характеристик колеса ( $m, A$ ). Если частота крутильных колебаний не превосходит частоты изгибных колебаний, т.е.  $\lambda_2 \leq \lambda_1$ , то шимми неизбежно.

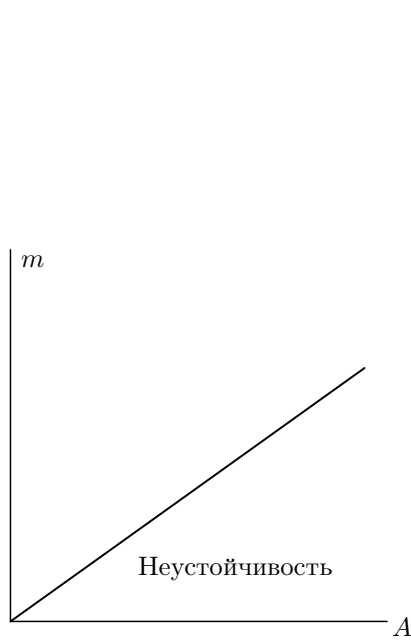


Рис. 5

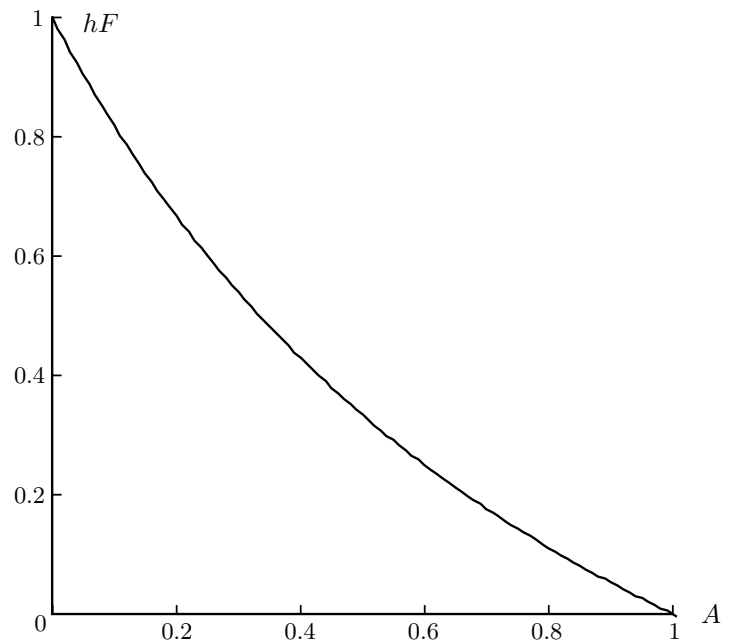


Рис. 6

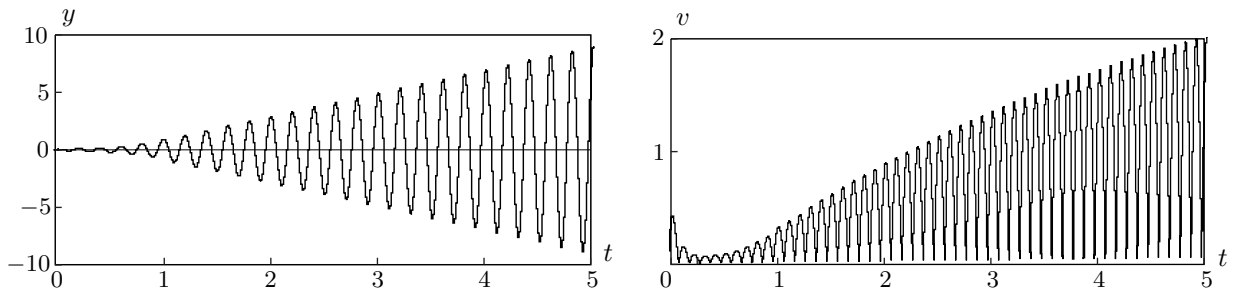


Рис. 7

Полученные условия неустойчивости равномерного прямолинейного скольжения (необходимые условия существования шимми) могут быть представлены в иной форме. Внесем во втором условии в (3.3) произведение массы колеса на его экваториальный момент инерции  $mA$  внутрь скобки. Это условие превращается тогда в линейное по  $m$  и  $A$  неравенство

$$3\pi l(5q - \varepsilon^2 hF_0)m < (16aRhF_0 + 15\pi lp)A. \tag{3.4}$$

Если выполнено первое неравенство в (3.2), т.е.  $5q < \varepsilon^2 hF_0$ , то неравенство (3.4) выполнено заведомо. Это означает, что единственным необходимым и достаточным условием неустойчивости (условие шимми) остается неравенство (3.4). Если же  $5q \geq \varepsilon^2 hF_0$ , то неравенство (3.4) ограничивает в плоскости  $(m, A)$  область неустойчивости, изображенную на рис. 5.

Условие неустойчивости (3.4) может быть разрешено относительно  $hF_0$ :

$$hF_0 > \frac{15\pi l(qm - pA)}{3\pi l m \varepsilon^2 + 16aRA}. \tag{3.5}$$

Тогда в осях  $(A, hF_0)$  область неустойчивости приобретает вид, изображенный на рис. 6. В этом представлении условия неустойчивости видно, что если  $F_0$ , как это обычно и бывает, зависит от величины скорости проскальзывания, то при достаточно большой скорости проскальзывания условие неустойчивости (3.5) может быть выполнено. Часто зависимость силы трения

от скорости записывают так:  $F_0 = (f - f'v + f''v^3)N$ . Это позволяет вычислить скорость проскальзывания, называемую *критической скоростью шимми*, на границе области устойчивости

$$(f - f'v_{\text{кр}} + f''v_{\text{кр}}^3)hN = \frac{15\pi l(qm - pA)}{3\pi l m \varepsilon^2 + 16arA}.$$

На рис. 7 изображено численное решение уравнений (3.1) по боковому смещению  $y$  и по проскальзыванию  $v$  в области неустойчивости.

#### 4. ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ И МЕТОДИКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ШИММИ

В качестве экспериментальной установки был использован вертикально-фрезерный станок марки F2-250 (Южная Корея) с установленным на нем макетом. На станочных тисках, установленных на подвижном столе станка, с помощью державки закреплялся макет для испытаний явления шимми (далее — макет шимми). В шпиндель станка вставлялся приводной стальной цилиндр с гладкой поверхностью, с которым посредством перемещений стола приводилось в соприкосновение колесо макета шимми. Соосность осей макета и цилиндра, величина нормального давления в контакте “колесо–цилиндр” обеспечивались величинами подачи стола по трем взаимно перпендикулярным осям. Вид части станка с двумя разновидностями макетов шимми (со стальным и плексигласовым колесами) представлен на рис. 8. В состав экспериментальной установки входила также видеокамера Panasonic и компьютер для обработки информации. Кинематическая схема макета шимми со стальным колесом представлена на рис. 9.

Конструктивно в каждом макете обеспечены две угловые степени свободы: вокруг оси собственного вращения колеса, параллельной оси  $Oy$ , и вокруг оси  $Oz$  крутильных колебаний подвижной части макета.

В состав макета входит колесо, закрепленное посредством пары шарикоподшипников в щеках вилки подвеса, в которой также с помощью двух шарикоподшипников установлена ось (валик) вилки. Свободный конец оси (валика) вилки центрируется с помощью еще двух разнесенных на 40 мм шарикоподшипников, укрепленных наружными кольцами в державке. Кроме того, он, благодаря посадке скольжения, может перемещаться вместе с вилкой и колесом вдоль оси  $Oz$  на величину до 29 мм, при которой происходит полное сжатие цилиндрической пружины, развивающей силу нормального давления 35 Н. Величина осевого хода подвижной части

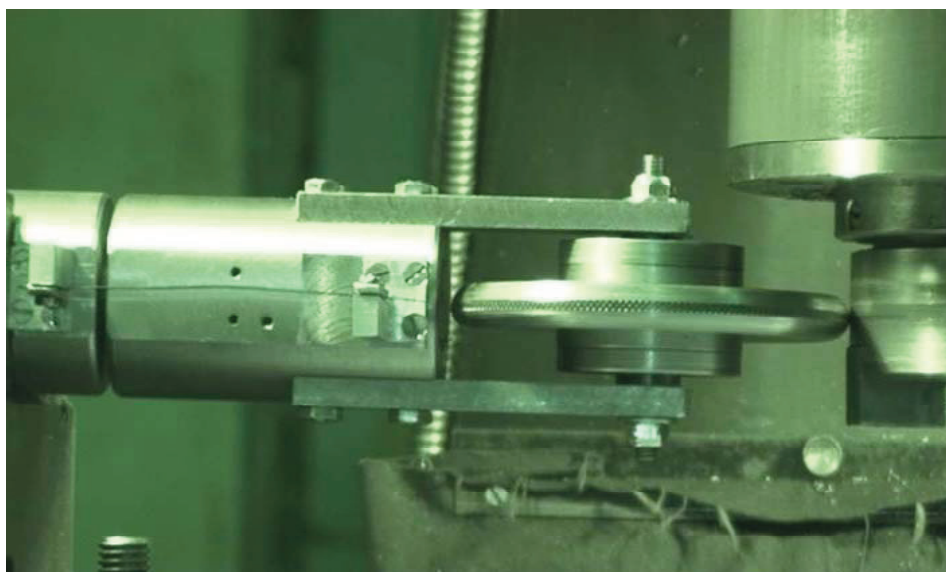


Рис. 8



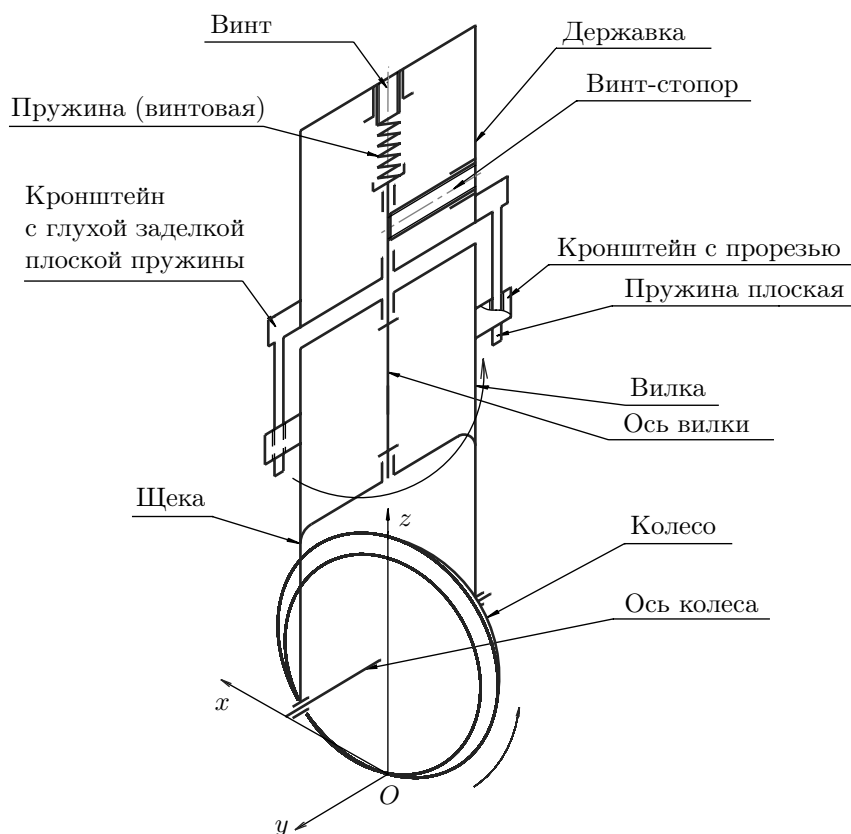


Рис. 9

регулируется верхним винтом. Винт-стопор служит для устранения поступательной и колебательной степеней свободы на стадии регулировок и калибровки макета. Плоские пружины обеспечивают установку подвижной части макета в исходное положение и создают угловую крутильную жесткость для подвижной части макета при ее поворотах.

Параметры макетов приведены в табл. 1, в которой  $J_y, J_z$  — осевые моменты инерции подвижных частей макета по рис. 9 вокруг соответствующих осей,  $K_z$  — коэффициент жесткости от пружин вокруг оси  $O_z$ .

Методика проведения экспериментов состояла в следующем. Макет фиксировался с помощью державки в струбине станочных тисков, она зажималась, затем с помощью приводных устройств стола устанавливался контакт колеса с цилиндром, с помощью продольного винта регулировалось нормальное давление в контакте. После этого включалось вращение в станке шпинделя и цилиндра с заданной фиксированной скоростью вращения в диапазоне от 63 до 2000 об/мин. За счет силы трения в контакте “цилиндр–колесо” приводилось во вращение колесо макета шимми. При возникновении колебаний шимми производилась съемка процесса на видеокамеру с частотой следования видеокадров либо 25 Гц для меньших (до 10 Гц),

Таблица 1

Макет	$J_z, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$K_z, \text{Н} \cdot \text{м/рад}$	$J_y, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Макет со стальным колесом	$7.78 \cdot 10^{-4}$	1.56	$8.31 \cdot 10^{-4}$
Макет с плексигласовым колесом	$1.64 \cdot 10^{-4}$	0.697	$1.45 \cdot 10^{-4}$
Макет с полиуретановым колесом	$1.64 \cdot 10^{-4}$	0.697	$1.45 \cdot 10^{-4}$

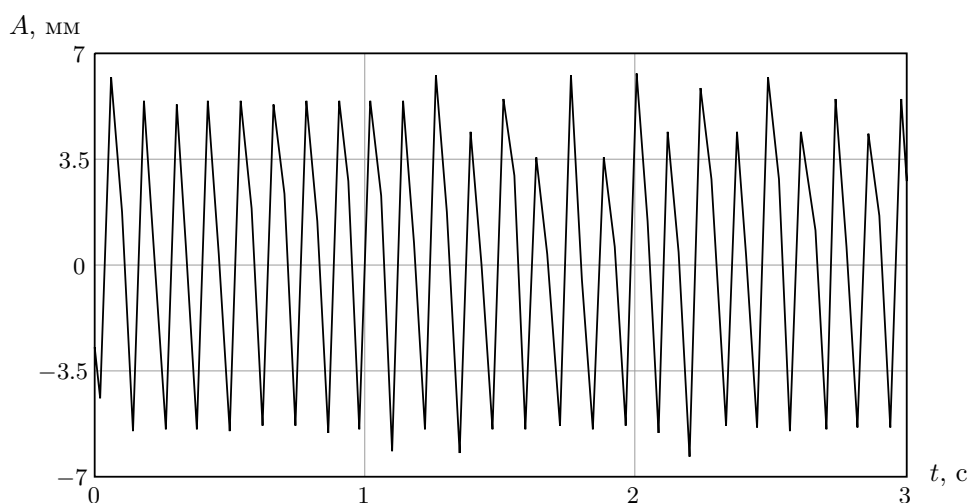


Рис. 10

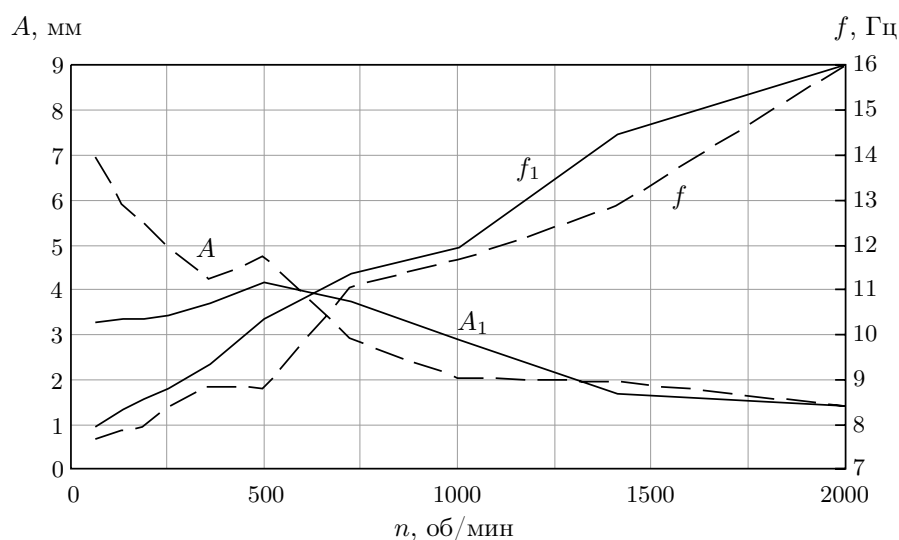


Рис. 11

либо 100 Гц для бóльших (до 20–25 Гц) частот колебаний подвижной части макета. Затем шпинделю задавалась другая скорость вращения, и при наличии колебаний операции повторялись во всем диапазоне угловых скоростей вращения шпинделя. После проведения аналоговой видеосъемки камера подключалась к компьютеру, после чего производилась оцифровка снятого клипа. Затем с помощью редактора VirtualDub снятый массив разбивался на кадры, следующие через интервалы 0.04 или 0.01 с в зависимости от частоты съемки.

Для производства измерений параметров колебаний каждый кадр на экране увеличивался, и затем производились измерения. Для этого на экран дисплея была прикреплена пленка с нанесенной квадратной сеткой, а также использовалась прозрачная линейка с разрешением 1 мм. При кадрировании изображения по горизонтали и вертикали имели место разные масштабы. Поэтому измеренные на экране размеры перемещений подвижной части макета по горизонтали и вертикали приводились к реальным размерам. Масштабы перевода размеров определялись путем измерения на экране размеров известных элементов — колеса, расстояния между щеками, толщины диска и определения отношений электронных размеров к реальным.

Представленный на рис. 10 пример графиков автоколебаний для угловой скорости вращения шпинделя  $n = 250$  об/мин соответствует плоским пружинам с пониженной жесткостью

по отношению к значению, приведенному в табл. 1. Для построения графиков (рис. 11) для частот  $f$  и амплитуд  $A$  автоколебаний (для наибольшей окружности колеса)  $n$  заданы в диапазоне значений от 63 до 2000 об/мин.

Графики на рис. 11 свидетельствуют, что с ростом  $n$  увеличивается частота автоколебаний подвижной части макета шимми, в то время как амплитуда  $A$  вначале растет, а затем уменьшается. При  $n = 500$  об/мин наблюдается резонанс колебаний. Частота автоколебаний изменялась от 7.1 до 16.7 Гц.

На рис. 11 приведены графики  $A_1(n)$  и  $f_1(n)$ , соответствующие более коротким плоским пружинам, обеспечившим больший примерно на 40% коэффициент жесткости. Характеристики в зоне малых значений  $n$ , лежащих в диапазоне от 63 до 750 об/мин, отличаются, хотя резонанс также соответствует  $n = 500$  об/мин. При больших  $n$  характеристики  $A$  и  $A_1$ ,  $f$  и  $f_1$  сближаются и при  $n = 2000$  практически совпадают. Это явление зависимости частот автоколебаний от скорости вращения шпинделя объясняется гироскопическим моментом колеса. В уравнениях (1.1) этот момент не учитывался, поскольку в горизонтальной реакции колеса силы сухого трения, имеющие порядок веса самолета, преобладают над гироскопическими силами колеса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гоздек В.С.* К постановке задачи о взаимодействии с землей катящегося колеса с упругой шиной при его колебаниях // ДАН СССР. 1969. Т. 186, № 5. С. 1031–1033.
2. *Келдыш М.В.* Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. С. 491–530.
3. *Колесников К.С.* Автоколебания управляемых колес автомобиля. М.: Гостехиздат, 1955.
4. *Medzorian J.* An investigation of landing gear shimmy: tire models, tire test methodologies, analysis and parameter studies: SAE tech. paper 1999-01-5527, 1999. doi: 10.4271/1999-01-5527
5. *Расејка Н.В.* Tyre and vehicle dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002.
6. *Rocard Y.* Dynamique générale des vibrations. Paris: Masson, 1949.
7. *Svendenius J.* Tire models for use in braking applications: Licentiate thesis. Lund: Dept. Autom. Control, Lund Univ., 2003.
8. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001.
9. *Журавлёв В.Ф.* О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 3. С. 58–76.
10. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 6. С. 157–168.
11. *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М.* О механизме явления шимми // ДАН. 2009. Т. 428, № 6. С. 761–764.