Р. Г. Мубаракзянов УДК 519.713

К ε-МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОВЕДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ

1. *Введение.* Не все автоматные преобразования можно моделировать конечными устройствами. Поэтому естественно рассматривать ε-моделирование автоматного поведения конечными автоматами. Для детерминированных автоматов (ДА) эту проблему рассматривал А. С. Строгалов [1], причем им получены отрицательные результаты о невозможности моделирования произвольных автоматов конечными. Так как этот факт не согласуется с интуитивными представлениями, то выбор метрики в [1] можно считать неудачным. В данной работе рассматривается широкий класс метрик на множестве функций, задающих преобразования вероятностными автоматами. Показано, при каких условиях на этом множестве существует конечная ε-сеть (определение см. в [2], с. 37), соответствующая конечно-автоматным преобразованиям, оценена мощность этой сети, причем класс конечно-автоматных преобразований сужается до класса каналов с конечным множеством состояний. Выбор именно этих объектов объясняется следующим. Автоматные преобразования удобно задавать на дереве. В случае детерминированных преобразований конечные преобразования задаются на конечном графе, получаемом из дерева отождествлением вершин. Для вероятностных автоматов ситуация меняется: конечный автомат может определять по-прежнему бесконечное дерево. Поэтому аналогом конечных детерминированных автоматов (КДА) в этом случае выступает уже не конечный вероятностный автомат, а канал с конечным множеством состояний.

2. *Определения.* Каждый вероятностный автомат (ВА) (определение см. в [2]) задает канал.

Определение 1. Каналом с входным алфавитом X и выходным алфавитом Y назовем функцию $\tau = \langle \tau(q/p) \mid (p, q) \in (X \times Y)^* \rangle : (X \times Y)^* \to R$, если существует вероятностный автомат A (не обязательно конечный) с такими же алфавитами и $\tau(q/p)$ есть вероятность получения на выходе A слова q при входном слове p.

Определение 2. Если $\tau(q/p) \neq 0$, то следующую функцию $\tau_{p,q}$ назовем состоянием канала τ:

$$\tau_{p,q}(q_1/p_1) = \tau(qq_1/pp_1)/\tau(q/p), \quad (p_1, q_1) \in (X \times Y)^*.$$

Каналу можно поставить во взаимно однозначное соответствие помеченное дерево так, что вершины соответствуют состояниям канала, а дуги соединяют соответствующие состояния: $\tau_{p,q}$ соединена дугой, помеченной $(x, y, \tau_{p,q}(y/x))$ с $\tau_{px,qy}$, где $\tau_{p,q}(y/x)$ — число. Алфавиты упорядочим: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, и будем строить дерево так, что:

1) вершина $\tau_{p,q}$ лежит выше τ_{p_1,q_1} тогда и только тогда, когда $|p| = |q| < |p_1| = |q_1|$;

2) вершина τ_{px_i,qy_j} лежит левее τ_{px_l,qy_r} тогда и только тогда, когда $i < l$ или $i = l$, $j < r$.

Тогда перечисление вершин (дуг) дерева слева направо и сверху вниз задает порядок на вершинах (дугах). В дальнейшем множества вершин (дуг) будем использовать упорядоченными. При построении дерева слова одинаковой длины t расположатся на одной горизонтали, будем называть эти состояния t-ярусом канала τ.

Определение 3. Вектором вершины графа (состояния) $\tau_{p,q}$ канала τ, соответствующим $x \in X$, назовем вектор $\tau_{p,q}(x) = (\tau_{p,q}(y_1/x), \tau_{p,q}(y_2/x), \ldots, \tau_{p,q}(y_m/x))$; конкатенацию всех векторов вершины $\tau_{p,q}$: $\boldsymbol{\tau}_{p,q} = (\boldsymbol{\tau}_{p,q}(x_1), \boldsymbol{\tau}_{p,q}(x_2), \ldots, \boldsymbol{\tau}_{p,q}(x_m))$ назовем просто вектором вершины; конкатенацию векторов всех вершин t-яруса $\boldsymbol{\tau}_t = (\boldsymbol{\tau}_{p_1,q_1}, \ldots, \boldsymbol{\tau}_{p_l,q_s})$ назовем вектором t-яруса.

Если отождествлять вершины, соответствующие одному состоянию: $\tau_{p,q} = \tau_{p_1,q_1}$, то получим представление канала на графе (для канала с конечным множеством состояний — на конечном графе). Будем различать в этом смысле граф и дерево канала. Определение 3 для каналов остается в силе из-за представления канала на дереве.

Определение 4. Диаметр протяженности (определение дано в [3], с. 47) графа канала τ назовем глубиной $g(\tau)$ канала τ.

Замечание. Классы каналов конечной глубины и каналов с конечным множеством состояний совпадают.

В качестве метрики в работе предлагается рассматривать следующие функции: для каналов τ, ν с алфавитами X, Y, $|X| = k$:

$$R_f(\tau, \nu) = \sup_{t \in N} \left(\sum_{p \in X^t} \max_{q \in Y^t} \frac{|\tau(q/p) - \nu(q/p)|}{f(p, q)} / k^t \right),$$

$$\overline{R}_f(\tau, \nu) = \sup_{t \in N} \left(\sum_{p \in X^t} \max_{\substack{q \in Y^t \\ (x,y) \in (X \times Y)}} \frac{|\tau'_{p,q}(y/x) - \nu'_{p,q}(y/x)|}{f(p, q)} / k^t \right), \tag{1}$$

где $\tau'_{p,q}(y/x) = \begin{cases} \tau_{p,q}(y/x), & \tau(q/p) \neq 0; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ аналогично определяется $\nu'_{p,q}(y/x)$; а f — произвольная функция: $(X \times Y)^* \to R$, $N = \{0, 1, \ldots\}$.

Прежде чем перейти к результатам, необходимы некоторые пояснения к определениям R_f, $\overline{R}_f$. Функции sup и max покомпонентной разности, фигурирующие в (1), в некотором смысле классические: они часто используются для нахождения разницы между функциями. Суммирование по словам из X^t и деление на k^t используется для усреднения разницы при фиксированной длине. Функция $f(p, q)$ задает некоторый нормировочный коэффициент: „вклад" в метрику для разных слов может быть различным (k^t не включено в функцию f, а рассматривается отдельно для удобства дальнейшего исследования). Необходимость рассмотрения функции $\overline{R}_f$, кроме функции R_f, связана с тем, что поведение канала лучше характеризуют условные вероятности и разница в поведении каналов, ВА лучше отражена в метрике $\overline{R}_f$.

Заметим, что если $f(p, q) \equiv 1$, а τ, ν соответствуют детерминированным автоматам, то R_f в точности совпадает с метрикой А. С. Строгалова [1]. Если же при $f \equiv 1$ $|X| = k = 1$, то канал определяет последовательность случайных кодов (ПСК) (или случайную последовательность) в алфавите Y. Функции R_f и $\overline{R}_f$ в данном случае задают метрику на пространстве ПСК [4]. Определения 2 — 4, данные для канала, имеют силу для ПСК.

3. *ε-сеть на пространстве каналов.* Обозначим пространство каналов через Q.

Теорема 1. *Если функция f положительна для всех $(p, q) \in (X \times Y)^*$, то R_f, $\overline{R}_f$ определяют метрики на пространстве Q.*

Доказательство. Симметричность и неотрицательность функций R_f, $\overline{R}_f$ очевидна. Докажем выполнение неравенства треугольника, напр., для функции R_f (для $\overline{R}_f$ доказательство аналогично).

Для любого числа $t \in N$ и любых каналов τ, ν, μ верно

$$R_f(\tau, \nu) + R_f(\nu, \mu) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{p \in X^t} \max_{q \in Y^t} \frac{|\tau(q/p) - \nu(q/p)|}{f(p, q)} + \sum_{p \in X^t} \max_{q \in Y^t} \frac{|\nu(q/p) - \mu(q/p)|}{f(p, q)} \right) / k^t \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{p\in X^t} \max_{q\in Y^t} \frac{|\tau(q/p)-\nu(q/p)|+|\nu(q/p)-\mu(q/p)|}{f(p,\ q)} /k^t \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{p\in X^t} \max_{q\in Y^t} \frac{|\tau(q/p)-\mu(q/p)|}{f(p,\ q)} /k^t = r_f(\tau,\ \mu,\ t),$$

а $R_f(\tau,\ \mu)=\sup\limits_{t\in N} r_f(\tau,\ \mu,\ t)$, следовательно, $R_f(\tau,\ \nu)+R_f(\nu,\ \mu)\geqslant R_f(\tau,\ \mu)$. Теорема доказана.

Таким образом, при определении метрики через R_f, $\overline{R_f}$ функция f может быть произвольной положительной. Конкретный ее вид может определяться практическими соображениями. Однако для дальнейшего исследования удобно ограничить класс функций f, а именно, представляется естественным, чтобы на словах одной длины f вела себя в некотором смысле одинаково: не было бы сильных изменений.

Определение 5. Словарную функцию $f:(X\times Y)^*\to R$ назовем поярусно-ограниченной, если существует функция $h:N\to R$ и константа M такие, что $h(|p|)\leqslant f(p,\ q)\leqslant M\cdot h(|p|)$, $(p,\ q)\in(X\times Y)^*$; здесь, как и в дальнейшем, $|p|$ — длина слова p.

Примером поярусно-ограниченной функции является функция вида $f(p,\ q)=h(|p|)$; напр., $f(p,\ q)\equiv 1$, или $f(p,\ q)=|p|$, или $f(p,\ q)=\lg|p|$ и т. д.

Теорема 2. *Для того чтобы на пространстве Q в метриках R_f, $\overline{R_f}$ для любого положительного ε существовала ε-сеть $Z_\varepsilon(Q)$ из каналов с конечным множеством состояний, достаточно, а если f поярусно-ограничена, то и необходимо, чтобы f стремилась к бесконечности: $f(p_n,\ q_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$, индекс n определяется согласно вышеуказанному порядку вершин дерева любого канала, причем $Z_\varepsilon(Q)$ конечна.*

Доказательство. Достаточность. Для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0: f(p_n,\ q_n)\geqslant 1/\varepsilon$, $n\geqslant n_0$, или существует $t: f(p,\ q)\geqslant 1/\varepsilon$, $(p,\ q)\in(X\times Y)^{\geqslant t}$. Следовательно, для любых каналов τ, μ

$$\sup_{t_1\geqslant t}\sum_{p\in X^{t_1}} \max_{q\in Y^{t_1}} \frac{|\tau(q/p)-\mu(q/p)|}{f(p,\ q)\cdot k^{t_1}} \leqslant \sup_{t_1\leqslant t} \frac{k^{t_1}}{1/\varepsilon\cdot k^{t_1}} = \varepsilon,$$

т. е. расстояние между каналами в метрике R_f превышает ε, если соответствующая разница достигается на словах длины меньшей t (то же верно и для метрики $\overline{R_f}$). Поэтому ε-сеть можно строить из каналов глубины t, т. е. из каналов с конечным множеством состояний.

Покажем, что существует и конечная ε-сеть. Пусть

$$M_f(t_1)=\min\{f(p,\ q)\,|\,(p,\ q)\in(X\times Y)^{t_1}\},$$

$$\varepsilon_f(t_1)=\varepsilon\cdot M_f(t_1),\ t_1\leqslant t.$$

1. Метрика R_f.

Пусть мощность $Y: |Y|=m$, а

$$\varepsilon_f'=\min\{\varepsilon_f(t),\ \varepsilon_f(t-1)/m,\ \ldots,\ \varepsilon_f(1)/m^{t-1}\}.$$

Рассмотрим множество векторов $\{\tilde{\tau}_t=(\tau(q_1/p_1),\ \ldots,\ \tau(q_s/p_l))\,|\,\tau\in Q\}$, где $\tau_{p_1,\ q_1},\ \ldots,$ $\tau_{p_l,\ q_s}$ есть t-ярус τ, $\tau_t=\tilde{\tau}_t$. Эти вектора образуют некоторое метрическое пространство, где расстоянием ρ является максимальная разность компонент. В этом пространстве для любого положительного ε' существует конечная

ε'-сеть $\overline{Z}_{\varepsilon'}$ (построение аналогично [2], с. 39). Вектора ε'_f-сети $\overline{Z}_{\varepsilon'_f}$ определяют ε-сеть Q:

$$Z_\varepsilon(Q) = \{\tau \mid \tilde{\tau}_t \in \overline{Z}_{\varepsilon'_f};\ \tau_{p,q} = \tau,\ (p, q) \in (X \times Y)^t\}.$$

Действительно, для любого канала ν рассмотрим $\tau \in Z_\varepsilon(Q)$ такой, что $\tilde{\tau}_t \in \overline{Z}_\varepsilon$ и $\rho(\tilde{\tau}_t, \tilde{\nu}_t) = \varepsilon'_f$. Следовательно, для любых $t_1 \leqslant t$, $(p, q) \in (X \times Y)^t$, $p_1 \in X^{t-t_1}$

$$|\nu(q/p) - \tau(q/p)| = \left| \sum_{q_1 \in Y^{t-t_1}} (\nu(qq_1/pp_1) - \tau(qq_1/pp_1)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon'_f m^{t-t_1} \leqslant \varepsilon_f(t_1) \frac{m^{t-t_1}}{m^{t-t_1}} = \varepsilon_f(t_1),$$

а значит,

$$R_f(\nu, \tau) \leqslant \max\left\{\varepsilon, \max_{t_1 \leqslant t} \sum_{p \in X^{t_1}} \max_{q \in Y^{t_1}} \frac{|\nu(q/p) - \tau(q/p)|}{f(p, q)\, k^{t_1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\varepsilon, \max_{t_1 \leqslant t} \frac{k^{t_1} \varepsilon_f(t_1)}{k^{t_1} M_f(t_1)} = \varepsilon\right\} = \varepsilon.$$

2. Метрика $\overline{R}_f$.

Множество каналов, образованных так, что на каждом ярусе $t_1 \leqslant t$ вектора ярусов τ_{t_1} выбираются из соответствующих $\varepsilon_f(t_1)$-сетей, а t-ярус отождествлен с начальным состоянием канала, образует конечное множество $\overline{Z}_\varepsilon(Q)$ каналов глубины не более $(t-1)$, являющееся ε-сетью пространства каналов Q в метрике $\overline{R}_f$. Действительно, для любого канала ν существует $\tau \in \overline{Z}_\varepsilon(Q)$ $\rho(\tau_{t_1}, \nu_{t_1}) \leqslant \varepsilon_f(t_1)$, $t_1 \leqslant t$. Следовательно,

$$\overline{R}_f(\nu, \tau) = \max\left\{\varepsilon, \max_{t_1 \leqslant t} \sum_{p \in X^{t_1}} \max_{\substack{q \in Y^{t_1} \\ (x, y) \in (X \times Y)}} \frac{|\tau'_{p,q}(y/x) - \nu'_{p,q}(y/x)|}{f(p, q)\, k^{t_1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\varepsilon, \max_{t_1 \leqslant t} \frac{k^{t_1} \rho(\tau_{t_1}, \nu_{t_1})}{k^{t_1} M_f(t_1)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\varepsilon, \max \frac{\varepsilon M_f(t_1)}{M_f(t_1)}\right\} = \varepsilon.$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть f ограничена сверху. Тогда существует число M_1 и бесконечная последовательность $\{(p_{n_i}, q_{n_i}),\ i \in N\}$ такие, что $f(p_{n_i}, q_{n_i}) \leqslant M$, $i \in N$. Выделим яруса для этих слов $T = \{t_1 = |p_{n_1}|, \ldots, t_i = |p_{n_i}|, \ldots\}$. Из поярусной ограниченности f следует существование функции h и числа M таких, что $h(t) \leqslant M_1$, $t \in T$, $f(p, q) \leqslant MM_1$, $|p| = |q| \in T$, $(p, q) \in (X \times Y)^*$.

Идея доказательства состоит в том, что предлагаются каналы для метрик R_f, $\overline{R}_f$, в ε-окрестности которых нет канала конечной глубины. Пусть $Y = \{a, b, \ldots\}$.

1) R_f. Обозначим через J_0 следующую последовательность:

$$J_0 = ababbabbba \ldots ab^i a \ldots$$

Через J_j^k обозначим подслово J_0, начинающееся с j-го символа J_0 и состоящее из k букв ($j \in N$, $k \in N$, $k \neq 0$).

Рассмотрим канал τ такой, что для любого $p \in X^k$ $\tau(J_0^k/p) = 1$. Пусть для некоторого канала μ $R_f(\tau, \mu) \leqslant \varepsilon < 1/(MM_1)$, а глубина $g(\mu) = l$. Тогда

$$R_f(\tau, \mu) \geqslant \sup_{t \in T} \sum_{p \in X^t} |\mu(J_0^t/p) - \tau(J_0^t/p)|/$$

$$/(k^t MM_1) \geqslant \sup_{t \in T} \left| \sum_{p \in X^t} \frac{\mu(J_0^t/p)}{k^t} - \sum_{p \in X^t} \frac{\tau(J_0^t/p)}{k^t} \right| / (MM_1) \geqslant \sup_{t \in T} |u(t) - 1| / (MM_1),$$

где $u(t) = \sum_{p \in X^t} \frac{\mu(J_0^t/p)}{k^t}$. Покажем, что $u(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$. При этом, очевидно, получим противоречие с конечностью глубины μ. Имеем

$$u(t+2l) = \sum_{p \in X^t} (\mu(J_0^t/p)/k^t \sum_{p_1 \in X^{2l}} \mu_{p, J_0^t}(J_t^{2l}/p_1)/k^{2l});$$

суммирование ведется лишь для таких слов, где состояние μ определено. Это же требование будет соблюдаться и в дальнейшем.

Если $t = 2ln$, то

$$u(t) = u(2ln) = \sum_{p_1 \in X^{2l}} (\mu(J_0^t/p)/k^{2l} \times$$

$$\times \sum_{p_2 \in X^{2l}} (\mu_{p_1, J_0^{2l}}(J_{2l}^{2l}/p)/k^{2l} \sum \ldots \sum_{p_n \in X^{2l}} \mu_{p_1 \ldots p_{n-1}, J_0^{2l(n-1)}}(J_{2l(n-1)}^{2l}/p)/k^{2l}) \ldots).$$

При $n \to \infty$ в множестве $\{J_{2li}^{2l} | \ i = \overline{1, n}\}$ бесконечно часто встречается слово $b^{2l-1}a = bb \ldots ba = \overline{q}$. Так как μ имеет глубину l, то не существует такого состояния $\mu_{p, q}$, что $\mu_{p, q}(\overline{q}/\overline{p}) = 1$ для любого $\overline{p} \in X^{2l}$. Поэтому ввиду конечности состояний μ существует такое число $\delta < 1$, что для любого $(p, q) \in (X \times Y)^*$

$$\sum_{\overline{p} \in X^{2l}} \mu_{p, q}(\overline{q}/\overline{p})/k^{2l} \leqslant \sigma,$$

если $\mu(q/p) \neq 0$. Следовательно, $u(2ln) \leqslant \sigma^{r_n}$, где r_n — число таких i из $\{1, \ldots, n\}$, что $J_{2li}^{2l} = \overline{q}$. При $n \to \infty$ $r_n \to \infty$, следовательно, $u(2ln) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, т. е. $u(n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, т. к. $u(n)$ — невозрастающая функция, что и требовалось доказать.

2) $\overline{R_f}$. Для любого $l \in N$, $l \neq 0$, определим множества $G_i(l) = \{i + ln | n \in N\}$, $i = \overline{0, l-1}$. Для любого l существует такое i, что $G_i(l) \cap T$ является бесконечным множеством. Обозначим это множество через $T(l)$. Можно построить последовательность

$$\overline{J_0} = \gamma_0 \gamma_1 \ldots \gamma_s \ldots; \ \gamma_i \in \{a, b\}, \ i \in N, \tag{2}$$

такую, что для любого $l \in N$, $l \neq 0$, в последовательности $\gamma_{i_1} \gamma_{i_2} \ldots \gamma_{i_s} \ldots$, $i_j \in T(l)$, $j \in N$, существует счетное множество символов a и счетное множество символов b. Для одного из возможных алгоритмов построения $\overline{J_0}$ рассмотрим следующую запись. Каждое число в этой записи кодирует шаг алгоритма.

1
1 2
1 2 3
1 2 3 4
. . . . .
. . . . .
. . . . .

Движение осуществляется слева направо, сверху вниз. Сначала находим минимальное число i в $T(1)$: γ_i присваиваем значение a. Следующая строка соответствует образованию символов b: минимальное число из еще невыбранных в $T(1)$, а затем в $T(2)$ обозначают индексы соответствующих элементов $\overline{J_0}$. Для третьей (и вообще для всех нечетных строк) строим a в позициях, соответствующих минимальным еще невыбранным числам $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$ (в дальнейшем, $T(1)$, $T(2)$, ..., $T(2s+1)$). Для четных

же строк аналогично строим b и т. д. На местах, не принадлежащих никакому $T(l)$, $l \in N$, может стоять произвольный символ, напр., a.

Канал τ обладает следующим свойством: для любого $s \in N$ вектор любого состояния s-яруса, соответствующий любому $x \in X$, равен $(1-\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2)$, если в (2) $\gamma_s = a$, или $(\delta_2, 1-\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_2)$, если $\gamma_s = b$, где δ_1, δ_2 — сколь угодно малые положительные числа. Заметим, что $\tau(q/p) \neq 0$, $(p, q) \in (X \times Y)^*$. Если для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\mu \in Q$ $\overline{R}_f(\tau, \mu) \leqslant \varepsilon$, то для любого $l \in N$, $l \neq 0$

$$\varepsilon \geqslant \sum_{p \in X^t} \max_{\substack{q \in Y^t \\ x \in X}} \frac{|\mu'_{p,q}(\gamma_t/x) - 1 + \delta_1|}{MM_1 k^t}, \quad t \in T(l). \tag{3}$$

Если в множестве X^t доля слов p таких, что для любого $q \in Y^t$ $\mu(q/p) \neq 0 \to$ $\to (\mu_{p,q}(\gamma_t/x) \geqslant 1/2)$, меньше $2/3$, т. е. число таких p меньше $2/3 \cdot k^t$, то, преобразуя правую часть вышеуказанного неравенства, получим

$$\varepsilon \geqslant \frac{1}{3} \frac{1/2 - \delta_1}{MM_1} \geqslant \frac{1}{7MM_1}, \text{ если } \delta_1 < 1/14. \tag{4}$$

Пусть μ имеет конечное множество состояний. Покажем, что либо для $\gamma_t = a$, либо для $\gamma_t = b$ вышеуказанное свойство выполняется.

Для любого $p \in X^*$ определим множество $\Sigma(p) = \{\mu_{p,q} \mid |q| = |p|\}$. Пусть $\Sigma_t = \{\Sigma(p) \mid |p| = t\}$ — множества различных множеств $\Sigma(p)$ на t-ярусе. Можно найти $t \in N$, $l \in N$ такие, что $\Sigma_t = \Sigma_{t+l}$ и $t \in T(l)$, следовательно, $\Sigma_t = \Sigma_{t+ln}$, $(t + ln) \in T(l)$, $n \in N$. Неравенство (3) верно и для этого l. Пусть $\Sigma_t = \{\Sigma(p_i) = \Sigma_t^{(i)} \mid i = \overline{1, n}\}$. Для любого $p \in X^l$ и любого $i = \overline{1, n}$, если $\mu_{p_i, q_i} \in \Sigma_t^{(i)}$, то существует j, $1 \leqslant j \leqslant n$, такой, что $\mu_{p_i p, q_i q} \in \Sigma_t^{(j)}$, $q \in Y^l$, если $\mu_{p_i, q_i}(q/p) \neq 0$. Иными словами, слово $p \in X^l$ осуществляет „переходы" из любого $\Sigma_t^{(i)}$ в фиксированное $\Sigma_t^{(j)}$. Поэтому можно образовать следующую цепь Маркова с n состояниями: $v = (v_1, \ldots, v_n)$, $D = [d_{ij}]_{n \times n}$, где $v_i = \tilde{v}_i/k^t$, $i = \overline{1, n}$, $\tilde{v}_i$ — мощность множества $\{p \mid p \in X^t, \Sigma(p) = \Sigma_t^{(i)}\}$, $d_{ij} = \tilde{d}_{ij}/k^l$, $i, j = \overline{1, n}$, $\tilde{d}_{ij}$ — мощность множества $\{p \mid p \in X^l, \Sigma(p_1) = \Sigma_t^{(i)} \to \Sigma(p_1 p) = \Sigma_t^{(j)}\}$. Тогда i-я компонента vD^r равна доле множеств $\Sigma_t^{(i)}$ среди $\Sigma(p)$ на $(t + lr)$-ярусе. Для $\gamma = \{a, b\}$ определим вектор-столбец $\omega(\gamma) = (\omega_1(\gamma), \ldots, \omega_n(\gamma))^T : \omega_i(\gamma) = 1$, если для любых $\mu_{p,q} \in \Sigma_t^{(i)}$, $x \in X$ $\mu_{p,q}(\gamma/x) > 1/2$; $\omega_i(\gamma) = 0$ в противном случае. Тогда $vD^r\,\omega(\gamma) = \lambda_r(\gamma)$ — доля слов p на $(t + lr)$-ярусе, удовлетворяющих условию, дающему неравенство (4) для $\gamma_{t+lr} = \gamma$.

Без ограничения общности можно считать, что эргодические множества цепи Маркова (v, D) образуют регулярные цепи [5], т. е. состоят из одного циклического класса, в противном случае можно увеличить l в необходимое число раз. Тогда vD^n сходится при $n \to \infty$ к некоторому стохастическому вектору v_0, $\lambda_n(\gamma)$ — к числу $\tilde{\lambda}(\gamma) \in [0, 1]$, $\tilde{\lambda}(a) + \tilde{\lambda}(b) \leqslant 1$, т. е. либо $\tilde{\lambda}(a) \leqslant 1/2$, либо $\tilde{\lambda}(b) \leqslant 1/2$. Иначе говоря, $\exists n \in N : \lambda_{n_1}(\gamma) \leqslant 2/3$ для некоторого $\gamma \in \{a, b\}$ и любого $n_1 \geqslant n$. Найдется $t_1 \in T(l)$, $t_1 \geqslant n$, $\gamma_{t_1} = \gamma$, поэтому будет верно неравенство (4):

$$\varepsilon \geqslant 1/(7MM_1),$$

т. е. ε не может быть произвольным. Это и заканчивает доказательство теоремы.

Таким образом, если возможно моделирование каналов с конечным множеством состояний, то возможно для некоторых метрик и приближенное моделирование произвольных автоматных преобразований с какой угодно наперед заданной точностью, причем условия теоремы 2, накладываемые на ρ, можно объяснить следующим. Если на длинных словах „разница" в поведении автоматов мала, то если затем на более длинных словах и появится

различие, „расстояние“ между автоматами не должно существенно увеличиться. При $f \equiv 1$ (отсутствие f), как, напр., в метрике А. С. Строгалова, на максимальном расстоянии могут находиться и автоматы, ведущие себя одинаково какое угодно большое время.

4. *Мощность минимальной ε-сети.* При выполнении условий теоремы 2 для любого положительного ε минимальная ε-сеть конечна. Проблема сложности приближенного моделирования в этом случае сводится к оценке мощности минимальной ε-сети. Принцип построения ε-сети приведен в доказательстве достаточного условия теоремы 1. Оценка мощности такой сети сводится к оценке мощности минимальной ε-сети дискретных вероятностных распределений. Эта задача рассматривалась, напр., в [2] (с. 37—40). Полученную здесь верхнюю оценку можно улучшить.

Пусть $F_m = \{\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \mid a_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} a_i = 1\}$ — множество m-мерных стохастических векторов с метрикой $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \max_{i=\overline{1,n}} |a_i - b_i|$. Каждый стохастический вектор соответствует разбиению отрезка $[0, 1]$ на отрезки длиной $a_1, \ldots, a_m$, т. е. выделению на $[0, 1]$ $(m-1)$-й точек: $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_1 + a_2, \ldots$ При рассмотрении ε-сети на F_m будем рассматривать лишь сети определенного вида. Отметим на отрезке $[0, 1]$ произвольное множество точек: $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t\}$. Выбор из этого множества $(m-1)$-й точек (возможно, выбор с повторением) соответствует какому-то m-мерному стохастическому вектору. Всевозможные подобные вектора будут образовывать ε-сеть множества F_m для некоторого $\varepsilon \leqslant 1$. Будем говорить, что такие сети образованы точками $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, причем примем, что для всех сетей $\alpha_1 = 0$, $\alpha_t = 1$. В [2] для $\varepsilon = 1/n$ рассматривалась ε-сеть, образованная точками $(1/n, 2/n, \ldots, 1)$. Такая сеть не минимальна. Будем пользоваться следующими обозначениями для числа x: $\{x\}$ — дробная часть, $[x]$ — целая часть, $]x[$ — наименьшее целое число такое, что $]x[\geqslant x$.

Теорема 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *сеть* $Z^t(F_m)$, *образованная точками* $(0, 1/t, \ldots, (t-1)/t, 1)$, $t =](m-1)/(m\varepsilon)[$, *является минимальной ε-сетью* F_m *среди всех сетей, образованных точками* $(0 = \beta_1, \ldots, \beta_{t'} = 1)$; *мощность сети* $Z^t(F_m)$ *равна* C_{m+t-1}^{m-1}.

Доказательство. Для доказательства необходимо показать, что предлагаемое множество является ε-сетью и что оно минимально. Пусть ε-сеть Z', образованная точками $(0 = \beta_1, \ldots, \beta_{t'} = 1)$, содержит меньше элементов, чем сеть $Z^t(F_m)$. Тогда $t' \leqslant t$. Пусть существует число $i: 1 \leqslant i \leqslant t'-1$ такое, что $\beta_{i+1} - \beta_i = B > m\varepsilon/(m-1)$. Тогда для вектора длины m $\boldsymbol{a} = (\beta_i + \beta/m, \beta/m, \ldots, \beta/m, 1 - (\beta_i + ((m-1)/m)\beta))$, если $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqslant \varepsilon$, $\boldsymbol{b} \in Z'$, то $(m-1)$-я точка, образующая $\boldsymbol{b}$, не может быть больше $\beta_i : (\beta_{i+1} - \beta_i) - \beta/m = ((m-1)/m)\beta > \varepsilon$. Следовательно, $|a_m - b_m| = |1 - (\beta_i + ((m-1)/m)\beta) - (1 - \beta_i)| = ((m-1)/m)\beta > ((m-1)/m) \times \times (m/(m-1))\varepsilon = \varepsilon$, т.е. если Z' есть ε-сеть, то $\beta_{i+1} - \beta_i \leqslant m\varepsilon/(m-1)$, $i = \overline{1, (t'-1)}$. Значит, $1 = \beta_{t'} - \beta_1 \leqslant (t'-1)\, m\varepsilon/(m-1) \leqslant (t-1)\, m\varepsilon/(m-1) < < (m-1)/(m\varepsilon + 1 - 1)(m\varepsilon/(m-1)) = 1$. Тем самым минимальность $Z^t(F_m)$ доказана.

Множество $Z^t(F_m)$ является ε-сетью. В [4] дано геометрическое доказательство этого факта. Можно предложить более простое доказательство. Для произвольного вектора $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in F_m$ выберем вектор $\boldsymbol{b} \in \in Z^t(F_m) : \rho(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \leqslant \varepsilon$, $\boldsymbol{b} = (k_1\beta, \ldots, k_m\beta)$, $\varepsilon \leqslant \beta = 1/t = 1/](m-1)/(m\varepsilon)[\leqslant \varepsilon + + \varepsilon/(m-1)$. Найдем $(k_1, \ldots, k_m)$.

Примем для $i = \overline{1, m}$:

$$\begin{aligned} &\text{если } \{a_i/\beta\} \leqslant 1/m, \text{ то } k_i = [a_i/\beta]; \\ &\text{если } \{a_i/\beta\} \leqslant (m-1)/m, \text{ то } k_i =]a_i/\beta[. \end{aligned} \tag{5}$$

Без ограничения общности можно считать, что для $a_1, \ldots, a_l$ $(0 \leqslant l \leqslant m)$ не выполняется (5), т. е. при $i = \overline{1, l}$ справедливо $\{a_i/\beta\} \in (1/m, (m-1)/m)$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{l} a_i = 1 - \sum_{i=l+1}^{m} a_i \leqslant 1 - \beta \sum_{i=l+1}^{m} \left(k_i - \frac{1}{m}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \beta \frac{m-1}{m} + 1 - \beta \sum_{i=l+1}^{m} \leqslant k_i \varepsilon + \left(1 - \beta \sum_{i=l+1}^{m} k_i\right).$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^{l} a_i \geqslant (1 - \beta \sum_{i=l+1}^{m} k_i) - \varepsilon,$$

т. е. если $\left(\frac{1}{\beta} - \sum_{i=l+1}^{m} k_i\right) = k$, то $k - \frac{\varepsilon}{\beta} \leqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{a_i}{\beta} \leqslant k + \frac{\varepsilon}{\beta}$.

Для $a_1, \ldots, a_l$ осуществим приближение следующим образом.

1) $k'_i = [a_i/\beta]$, $i = \overline{1, l}$, тогда $\sum_{i=1}^{l} k'_i \leqslant k$, т. к.

$$\sum_{i=1}^{l} [a_i/\beta] \leqslant [\sum_{i=1}^{l} a_i/\beta] < [k + \varepsilon/\beta].$$

2) Если $\sum_{i=1}^{l} k'_i < k$, то $k_1 = k'_1 + 1, \ldots, k_s = k'_s + 1, k_{s+1} = k'_{s+1}, \ldots, k_l = k'_l$, где $s = k - \sum_{i=1}^{l} k_i$. Эту процедуру можно осуществить, т. к.

$$\sum_{i=1}^{l}] a_i/\beta [\geqslant] \sum_{i=1}^{l} a_i/\beta [\geqslant] k - \varepsilon/\beta [= k.$$

Тогда

$$\beta \sum_{i=1}^{l} k_i + \beta \sum_{i=l+1}^{m} k_i = \beta k + \beta (1/\beta - k) = 1.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{b} = (k_1\beta, k_2\beta, \ldots, k_m\beta)$ искомый: $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqslant \varepsilon$.

Оценка мощности $Z^t(F_m)$: C_{m+t-1}^{m-1} — количество сочетаний из $(m + t - 1)$ по $(m - 1)$ очевидна. Теорема доказана.

Итак, найдена минимальная ε-сеть среди всех ε-сетей, образованных точками $(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{t-1}, 1)$. Но даже при снятии лишь ограничений $(\alpha_1 = 0, \alpha_t = 1)$ сеть $Z^t(F_m)$ может быть не минимальной: $\{(1/m, 1/m, \ldots, 1/m)\}$ есть $((m-1)/m)$-сеть пространства F_m, $|Z^t(F_m)| \geqslant m/(m-1)$. Вообще говоря, хотя любая сеть определяет множество точек на отрезке $[0, 1]$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$, но она может быть образована лишь некоторыми наборами из $m - 1$ точек, а не всевозможными. Будем говорить, что такие сети построены на точках $(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$. Для этих сетей верна

Теорема 4. *Сеть Z, построенная на точках $(0, 1/t, \ldots, (t-1)/t, 1)$, не является ε-сетью пространства F_m для всех ε таких, что $0 \leqslant \varepsilon < (m-1)/(mt)$. Для $\varepsilon = (m-1)/(mt)$ сеть Z является ε-сетью F_m в том и только том случае, если она образована точками.*

Действительно, если Z образована точками, то Z есть $((m-1)/m)$-сеть. Пусть Z построена на исходных точках, но не образована ими. Тогда существует вектор $\boldsymbol{a} = (k_1/t, \ldots, k_m/t)$ такой, что $\boldsymbol{a} \in F_m \setminus Z$. Для любого $\boldsymbol{b} \in Z$ $\rho(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geqslant 1/t$. Поэтому Z не может быть ε-сетью для любого $\varepsilon < 1/t$, в частности, для $\varepsilon = (m-1)/(mt) < 1/t$.

В реальных генераторах дискретных вероятностных распределений, как правило, имеется возможность точного моделирования вероятностей $\{k/t\}$ для

всех $k=\overline{0, t}$, но при этом существуют ограничения на t, т. е. имеется возможность моделировать сеть, построенную на точках $(0, 1/t, 2/t, \ldots, (t-1)/t, 1)$. На вопрос: для какого минимального ε полученное множество остается ε-сетью, отвечает теорема 4: $\varepsilon=(m-1)/(mt)$, если сеть при этом образована данными точками. Переход же при фиксированном t к ε-сетям с меньшим числом состояний требует увеличения t. Эти соображения позволяют ограничиться оценкой теоремы 3.

Пусть t, $\varepsilon_f(t_1)$, $t_1 \leqslant t$, ε'_f те, что предложены в доказательстве достаточного условия теоремы 2. Кроме того, введем

$$\tilde{\varepsilon}_f(t_1)=\varepsilon \max_{(p,\, q)\in(X\times Y)^*} \{f(p, q)\}, \quad \tilde{\varepsilon}'_f=\min_{t_1\leqslant t} \{\tilde{\varepsilon}_f(t_1)/m^{t_1}\}.$$

Тогда верна

Теорема 5. *Для мощностей минимальных ε-сетей в метриках R_f, $\overline{R}_f$ верны неравенства*

$$C^{m^t-1}_{m^t+t_1-1} \leqslant n^{\rho}_{\tilde{\varepsilon}'_f}(F_{m^t}) \leqslant |Z^{R_f}_{\varepsilon}(Q)| \leqslant |Z^{\rho}_{\varepsilon'_f}(F_{m^t})|^{k^t} \leqslant (C^{m^t-1}_{m^t+t_1-1})^{k^t};$$

$$\prod_{i=0}^{t} (C^{m-1}_{m+t_i^{(1)}-1})^{km^i} \leqslant \prod_{i=0}^{t} (n^{\rho}_{\tilde{\varepsilon}_f(i)}(F_m))^{km^i} \leqslant$$

$$\leqslant |Z^{\overline{R}_f}_{\varepsilon}(Q)| \leqslant \prod_{i=0}^{t} |Z^{\rho}_{\varepsilon_f(i)}(F_m)|^{(km)^i} \leqslant \prod_{i=0}^{t} (C^{m-1}_{m+t_i^{(2)}-1})^{(km)^i},$$

где $n^{\rho}_{\varepsilon}(F)$ — максимальное число элементов F, удаленных друг от друга на расстояние ρ более 2ε ([2], с. 38); *$Z^{\rho}_{\varepsilon}(F)$ — мощность минимальной ε-сети F в метрике ρ*; $t=[1/\varepsilon]$, $t_1=]1/(2\tilde{\varepsilon}'_f)[-1$, $t_2=](m-1)/(m\varepsilon'_f)[$; $t_i^{(1)}=]1/(2\tilde{\varepsilon}_f(i))[-1$, $t_2=](m-1)/(m\varepsilon_f(i))[$.

Доказательство. При рассмотрении метрики R_f в теореме 2 мы определили вектор $\tilde{\tau}_t$. Множество всевозможных подобных векторов образует пространство $\{\tilde{\tau}_t \mid \tau\in Q\}$ — пространство векторов, являющихся конкатенацией k^t стохастических векторов размерности m^t. В метрике ρ мощность минимальной ε'_f-сети этого пространства векторов равна произведению k^t мощностей $|Z^{\rho}_{\varepsilon'_f}(F_{m^t})|$. Мощность ε-сети снизу ограничена числом элементов, удаленных друг от друга на расстояние более 2ε. Так как метрика R_f определяется усреднением „расстояний" по всем словам из X^t и если каждое такое расстояние будет больше 2ε, то и расстояние в R_f будет больше 2ε. Для каждого $p\in X^t$ в $\tilde{\tau}_t$ имеем стохастический вектор длины m^t. Для пространства F_{m^t} нужно оценить снизу число $n^{\rho}_{\tilde{\varepsilon}'_f}(F_{m^t})$. Необходимая оценка дана на основе результата [2] (с. 39). Для метрики $\overline{R}_f$ рассуждения аналогичны. Каждому каналу можно поставить в соответствие вектор $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_t)$, полученный конкатенацией векторов i-ярусов, $i=\overline{0, t}$. Расстояние для этих векторов естественно переносится с $\overline{R}_f$, при этом ε-сеть на каналах определяется ε-сетью на соответствующих векторах, которая в свою очередь задается для каждого τ_i, $i=\overline{0, t}$, $\varepsilon_f(i)$-сетью для каждого из k^i стохастических векторов длины m, определяющих τ_i. Оценка снизу определяется через оценки типа n_{ε} для фиксированного $p\in X^t$. Однако в случае $\overline{R}_f$ „расстояние" при проверке слова $p\in X^t$ складывается из максимумов „расстояний" для всевозможных начал q и букв $x\in X$, поэтому $n^{\overline{R}_f}_{\varepsilon}(Q) \geqslant \prod_{i=0}^{t} (n^{\rho}_{\tilde{\varepsilon}_f(i)}(F_m))^{km^i}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Строгалов А. С. Об ε-моделировании конечных автоматов // Материалы Всес. семин. по дискретной матем. и ее прилож.— М.: Изд-во МГУ, 1986.— С. 42—56.
2. Бухараев Р. Г., Захаров В. М. Управляемые генераторы случайных кодов.— Казань, 1978.—160 с.
3. Оре О. Теория графов.— М.: Наука, 1968.—352 с.
4. Мубаракзянов Р. Г. Метрические свойства пространства последовательностей случайных кодов / Казан. ун-т.— Казань, 1987.—35 с.— Библиогр.: 21 назв.— Деп. в ВИНИТИ 12.02.87, № 1033 — В87.
5. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.—271 с.

г. Казань

Поступила
15.05.1989

Ю. Э. Сеницкий

УДК 517.958

МНОГОКОМПОНЕНТНОЕ ОБОБЩЕННОЕ КОНЕЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

Конечные интегральные преобразования (сокращенно КИП) представляют одну из наиболее эффективных форм метода разложения по собственным функциям. В последнее время широкое распространение получил структурный алгоритм метода КИП, в процедуре которого наряду с трансформантой определяется также ядро преобразования. Такой подход обобщен в монографиях [1], [2], причем в [1] предложена вектор-матричная форма метода КИП, а в [3] сформулированы необходимые и достаточные условия его применимости к линейным дифференциальным операторам второго и четвертого порядков.

Однако при исследовании нестационарных полей напряжений трехмерных тел со сложной кинематикой деформирования обычная вектор-матричная форма метода КИП [1], основанная на известных обобщенных соотношениях ортогональности [4], может оказаться непригодной. Это связано с тем, что отдельные дифференциальные уравнения разрешающих систем могут содержать несколько инерционных членов. Так, напр., в основу решения методом разложения по собственным вектор-функциям осесимметричной динамической задачи для жесткозащемленной трехслойной сферической оболочки положено такое сложное соотношение ортогональности [5]:

$$\int_0^{\theta_1} \sin\theta \{J_1 [K_1(\lambda_i, \theta) K_1(\lambda_j, \theta) + K_2(\lambda_i, \theta) K_2(\lambda_j, \theta)] + \alpha^2 J_3 K_3(\lambda_i, \theta) K_3(\lambda_j, \theta) +$$

$$+ J_2 [K_1(\lambda_i, \theta) K_3(\lambda_j, \theta) + K_1(\lambda_j, \theta) K_3(\lambda_i, \theta)]\} d\theta = \delta_i^j \|K_i\|^2, \qquad (0.1)$$

где K_1, K_2, K_3 — компоненты вектор-функции ядра КИП; $\sin\theta$ — весовая функция; J_1, J_2, J_3, α^2 — постоянные коэффициенты; δ_i^j — символ Кронекера; $\|K_i\|$ — норма ядровой функции в $\overline{L}_2$, т. е.

$$\|K_i\|^2 = \int_0^{\theta_1} \sin\theta [J_1 K_1^2(\lambda_i, \theta) + J_1 K_2^2(\lambda_i, \theta) +$$

$$+ \alpha^2 J_3 K_3^2(\lambda_i, \theta) + 2 J_2 K_1(\lambda_i, \theta) K_3(\lambda_i, \theta)] d\theta. \qquad (0.2)$$

В частном случае, когда $J_2 = 0$, из равенства (0.1) следует обычное соотношение обобщенной ортогональности для собственных вектор-функций [1], [4].

Для выражений, подобных (0.1), до сих пор не сформулированы соответствующие конечные интегральные преобразования. В данной работе производится формальное построение одного достаточно широкого класса КИП, основанного на более общем по сравнению с (0.1) соотношении ортогональности, и показана техника его применения на примере замкнутого решения