Том 18 № 2 2012

УДК 517.956.45

ПРИМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕНИЕМ[1]

А. Л. Казаков

С использованием ранее предложенного автором обобщения известного метода характеристических рядов (А. Ф. Сидоров) исследуются краевые задачи для нелинейных дифференциального уравнения и системы с частными производными параболического типа с вырождением. Доказаны новые теоремы существования решений рассмотренных задач в классе аналитических функций. В том числе обобщены известные решения нелинейного уравнения теплопроводности со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, краевая задача, теорема существования, характеристический ряд.

A. L. Kazakov. Application of characteristic series for constructing solutions of nonlinear parabolic equations and systems with degeneracy.

An extension of the known method of characteristic series (A.F. Sidorov) proposed by the author earlier is used to investigate boundary value problems for a nonlinear differential equation and a nonlinear parabolic system of partial differential equations with degeneracy. New existence theorems for solutions of these problems in the class of analytic functions are proved. In particular, known solutions of the nonlinear heat equation with power dependence of thermal conductivity on temperature are generalized.

Keywords: partial differential equations, boundary value problem, existence theorem, characteristic series.

Введение

Суть метода характеристических рядов состоит в том, что решение с характеристическим разрывом строится в следующем виде (функция $\varphi(t,\mathbf{x}) = 0$ определяет характеристическую поверхность):

$$u(t,\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(t,\mathbf{x})\varphi^k, \quad \mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n).$$

Первоначально идея данного метода была предложена Р. Курантом (R. Courant) [1] и реализована для линейных уравнений гиперболического типа [2; 3].

На гораздо более трудный и содержательный случай нелинейных уравнений и систем [4] данный подход был перенесен А. Ф. Сидоровым в 60-х годах прошлого века [5]. В дальнейшем метод характеристических рядов, а также разработанный на его основе метод специальных рядов успешно применялись в работах как самого Анатолия Федоровича [5], так и его учеников (см., например, [6–8]). При этом были построены решения различных задач математической физики, которые ранее иными методами решить не удавалось. Подробную библиографию привести здесь не представляется возможным, так как она насчитывает более сотни статей. Удалось также распространить метод характеристических рядов на случай нелинейных [9] параболических уравнений с вырождением [10] (см. также [11; 12]).

Развивая идеи А. Ф. Сидорова, автор ранее [13; 14] предложил для построения решений квазилинейных уравнений и систем, имеющих более одного характеристического разрыва,

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-07-00245).

использовать кратные характеристические ряды. Применение данного подхода, в частности, позволило построить решение новой начально-краевой задачи для системы квазилинейных гиперболических уравнений, в том числе доказать аналог теоремы Коши — Ковалевской. Кроме того, предложенный метод был использован при решении некоторых модельных газодинамических задач.

В данной статье подход, примененный [13] для исследования уравнений и систем гиперболического типа, переносится на случай нелинейных уравнений параболического типа с вырождением [15]. Получено новое решение начально-краевой задачи для уравнения нелинейной теплопроводности (фильтрации, диффузии) со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры. Данный подход также распространен на случай системы параболического типа. Для рассмотренных задач доказаны теоремы существования решений в классе аналитических функций, одна из которых обобщает известную теорему о движении тепловой волны по холодному фону [12].

1. Теорема для уравнения нелинейной теплопроводности

Рассмотрим уравнение нелинейной теплопроводности (диффузии, фильтрации) со степенной зависимостью коэффициента теплопроводности от температуры $K(T) = \alpha T^\sigma$

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T). \tag{1.1}$$

Здесь $T = T(t, \mathbf{x})$ — искомая функция (температура, плотность газа в пористом грунте); t — время; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор пространственных координат; $\operatorname{div}, \nabla$ — операторы дивергенции и градиента по пространственным координатам; $\alpha > 0, \sigma > 0$ — известные константы, которые характеризуют свойства процесса.

Стандартная замена $u = T^\sigma, t' = \alpha t$ приводит уравнение (1.1) к виду

$$u_t = u\Delta u + \frac{1}{\sigma}(\nabla u)^2, \tag{1.2}$$

где Δ — оператор Лапласа по пространственным координатам. В случае, когда $u > 0$, свойства решения уравнения (1.2) качественно такие же, как и у линейного уравнения теплопроводности. В частности, если на любой времени-подобной поверхности задать аналитические данные Коши, то будут выполняться условия теоремы Коши — Ковалевской. Однако при $u = 0$ коэффициент перед старшими производными обращается в нуль и параболический тип уравнения (1.2) вырождается. Этот случай является предметом дальнейшего исследования.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) + \dfrac{1}{\sigma}\left(u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2\right), \\ u|_{x_1=a(t)} = f(t, x_1, x_2)|_{x_1=a(t)}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что известные функции $a(t), f(t, x_1, x_2)$ являются аналитическим и удовлетворяют условиям

$$a(0) = 0, \quad a'(0) \neq 0, \quad f(t, a(t), 0) = 0, \quad f_{x_2}(t, a(t), 0) = 0. \tag{1.4}$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $f \equiv 0$ получается известная задача о тепловой волне, которая движется по холодному фону [12].

Теорема 1. *Если функции $a(t)$ и $f(t, x_1, x_2)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точек $t = 0$ и $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$ соответственно и удовлетворяют условиям (1.4), то задача (1.3) имеет два аналитических решения в некоторой окрестности точки $(t = 0, x_1 = 0, x_2 = 0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем строить решение в виде ряда

$$u=\sum_{k,l=0}^{\infty}u_{k,l}(t)\frac{[x_1-a(t)]^k\,x_2^l}{k!l!}. \tag{1.5}$$

Для удобства определения коэффициентов ряда (1.5) сделаем в задаче (1.3) замену независимых переменных:

$$\begin{cases} y=x_1-a(t),\\ z=x_2,\\ \tau=t. \end{cases} \tag{1.6}$$

Якобиан замены (1.6) $J=1$, т. е. замена (1.6) невырожденная. При такой замене производные меняются как

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial z},\quad \frac{\partial}{\partial t}=-a'(\tau)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \tau}$$

и задача (1.3) примет вид

$$\begin{cases} u_\tau-a'(\tau)u_y=u\left(u_{yy}+u_{zz}\right)+\dfrac{1}{\sigma}\left(u_y^2+u_z^2\right),\\ u\big|_{y=0}=\phi(\tau,z), \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\phi(\tau,z)=f(\tau,a(\tau),z)$. Из аналитичности a и f вытекает, что функция $\phi(\tau,z)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки $(\tau=0,z=0)$, т. е. может быть разложена в сходящийся ряд

$$\phi=\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n(\tau)\frac{z^n}{n!},\quad \phi_n=\frac{\partial^n\phi}{\partial z^n}\Big|_{z=0},$$

причем из (1.4) следует, что $\phi(\tau,0)=\phi_z(\tau,0)=0$, т. е. $\phi_0=\phi_1=0$.

Решение задачи (1.7) будем искать в виде

$$u=\sum_{k,l=0}^{\infty}u_{k,l}(\tau)\frac{y^k}{k!}\frac{z^l}{l!},\quad u_{k,l}(\tau)=\frac{\partial^{k+l}u}{\partial y^k\partial z^l}\Big|_{\substack{y=0\\ z=0}}. \tag{1.8}$$

Символы $u_{k,l}$ в формулах (1.5) и (1.8) обозначают одни и те же функции (с заменой t на τ).

Коэффициенты ряда (1.8) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n=k+l$. Из граничных условии имеем, что $u_{0,l}(\tau)=\phi_l(\tau)$, $l=0,1,\ldots$. В том числе

$$u_{0,0}=\phi_0\equiv 0,\quad u_{0,1}=\phi_1\equiv 0.$$

Для определения $u_{1,0}(\tau)$, положив в уравнении (1.7) $y=z=0$, получим уравнение

$$u_{1,0}\Big(\frac{1}{\sigma}u_{1,0}+a'(\tau)\Big)=0. \tag{1.9}$$

При нахождении корней (1.9) необходимо рассматривать д в а с л у ч а я: $u_{1,0}\equiv 0$ и $u_{1,0}\neq 0$.

1. Рассмотрим сначала с л у ч а й $u_{1,0}\neq 0$. Тогда решение уравнения (1.9) имеет вид $u_{1,0}=-\sigma a'(\tau)$, все производные первого порядка найдены. Далее найдем вторые производные. Из граничных условий $u_{0,2}=\phi_2$. Для нахождения $u_{1,1}$ продифференцируем уравнение (1.7) по z и положим $z=y=0$. Подставив известные величины, получим уравнение $-a'(\tau)u_{1,1}=-2a'(\tau)u_{1,1}$, откуда имеем, что $u_{1,1}=0$. Аналогично, продифференцировав (1.7) по y, положив $y=z=0$, подставив известные величины и приведя подобные слагаемые, получим, что

$$u_{2,0}=\frac{\sigma\left(a''-a'\phi_2\right)}{(1+\sigma)a'}.$$

По условию теоремы $a'(0) \neq 0$, а значит, $a'(\tau) \neq 0$ в некоторой окрестности нуля, т. е. знаменатель последней дроби отличен от нуля. Таким образом, все производные второго порядка найдены, база индукции установлена.

Пусть найдены производные до порядка n включительно, т. е. предполагаются известными все $u_{i,k}$ при $i+k=0,\ldots,n$. Тогда $u_{0,n+1}=\phi_{n+1}$. Продифференцировав уравнение (1.7) k раз по y, $n-k$ раз по z и положив $z=y=0$, получим соотношение

$$u'_{k,n-k} - a' u_{k+1,n-k} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j}\left(u_{i+2,j}+u_{i,j+2}\right)$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \left(u_{k-i+1,n-k-j}u_{i+1,j}+u_{k-i,n-k-j+1}u_{i,j+1}\right) \tag{1.10}$$

При $k=0$ имеем уравнение $u'_{0,n} - a'u_{1,n} = \frac{2}{\sigma}u_{1,0}u_{1,n} + g_{0,n}$, из которого однозначно определяется $u_{1,n}$:

$$u_{1,n} = -\frac{\phi'_n}{a'} + \frac{g_{0,n}}{a'},$$

где функция

$$g_{0,n} = \sum_{j=0}^{n-2} C_n^j u_{0,n-j}\left(u_{2,j}+u_{0,j+2}\right) + \frac{1}{\sigma}\sum_{j=1}^{n-1} C_n^j \left(u_{1,n-j}u_{1,j}+u_{0,j+1}u_{0,n-j+1}\right)$$

зависит от производных порядка не выше n, которые известны в силу предположения индукции. И так далее: последовательно вычисляются

$$u_{k+1,n-k} = \frac{-k\sigma a' u_{k-1,n-k+2} + g_{k,n-k} - u'_{k,n-k}}{a'(1+k\sigma)}, \quad k=1,\ldots,n,$$

где функции

$$g_{k,n-k} = \sum_{\substack{i=0\\ i+j\le n-2}}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j}\left(u_{i+2,j}+u_{i,j+2}\right)$$

$$+\frac{1}{\sigma}\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0,\\ i+j\neq n}}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i+1,j}u_{k-i+1,n-k-j} + \frac{1}{\sigma}\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0,\\ i+j\neq n}}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j+1}u_{k-i,n-k-j+1}$$

зависят от величин, которые известны в силу предположения индукции.

Таким образом, для случая $u_{1,0}\neq 0$ формальное решение задачи (1.7) построено.

2. Рассмотрим теперь с л у ч а й $u_{1,0}=0$. Отметим, что в задаче о движении теплового фронта по холодному фону этот случай приводит к тривиальному решению. Однако, если среди ϕ_n есть хотя бы одна ненулевая функция, решение в этом случае также будет ненулевым.

Процедура построения решения здесь такая же, как и в первом случае. При этом получаются следующие соотношения: $u_{0,2}=\phi_2,\ u_{1,1}=0,\ u_{2,0}=0$. Пусть найдены все производные до порядка n включительно. Тогда из (1.10), так как $u_{1,0}=0$, получаем, что

$$u_{k+1,n-k} = \frac{-g_{k,n-k}+u_{k,n-k}}{a'(\tau)}.$$

Таким образом, оба формальных решения задачи (1.7) построены.

Сходимость построенных рядов доказывается методом мажорант, причем для первого и второго случаев строится одна и та же мажоранта. Подробное доказательство здесь не приводится, поскольку при этом используется стандартная процедура, которая подробно излагается применительно к теореме 2.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. Два найденных аналитических решения задачи (1.7) позволяют строить кусочно-аналитические решения задачи (1.3), непрерывно состыкованные на поверхности $x_1 = a(t)$. В частном случае $f \equiv 0$ одно из этих решений является тривиальным (задача о движении тепловой волны по холодному фону). С этой точки зрения теорема 1 является обобщением теорем 2.1 и 3.1 из работы [12].

2. Задача с краевым режимом для параболической системы

Некоторые из результатов, ранее полученных для уравнения нелинейной теплопроводности [10–12], могут быть перенесены на более общий случай нелинейных систем параболического типа.

В этом разделе объектом исследования будет система вида

$$\begin{cases} u_t = u\Delta u + v\Delta v + \dfrac{1}{\alpha}(\nabla u)^2, \\ v_t = u\Delta u + v\Delta v + \dfrac{1}{\beta}(\nabla v)^2, \end{cases} \tag{2.1}$$

где α, β — положительные константы. Подобного рода системы (в линейном случае) иногда называют системами А. В. Лыкова [16], они применяются для описания процессов взаимосвязанного тепло- и массопереноса.

В данном разделе рассматривается следующая краевая задача для системы (2.1) в случае плоской симметрии:

$$\begin{cases} u_t = uu_{xx} + vv_{xx} + \dfrac{1}{\alpha}u_x^2, \\ v_t = uu_{xx} + vv_{xx} + \dfrac{1}{\beta}v_x^2, \end{cases} \tag{2.2}$$
$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=a(t)} = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Теорема 2. *Если функция $a(t)$ является аналитической в некоторой окрестности точки $t = 0$, то задача (2.2) при условии $a'(0) \neq 0$ имеет в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$ единственное аналитическое решение, удовлетворяющее неравенствам $u_x(0,0) \neq 0, v_x(0,0) \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале проведем построение формального решения в виде рядов, а затем докажем их сходимость.

Будем строить решение задачи (2.2) в виде

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\frac{[x-a(t)]^k}{k!}, \quad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)\frac{[x-a(t)]^k}{k!}. \tag{2.3}$$

Для удобства построения коэффициентов рядов (2.3) сделаем в задаче (2.2) замену независимых переменных

$$\begin{cases} z = x - a(t), \\ \tau = t. \end{cases}$$

Легко убедиться, что данная замена является невырожденной, задача (2.2) после этого примет вид

$$\begin{cases} u_\tau - a'(\tau)u_z = uu_{zz} + vv_{zz} + \dfrac{1}{\alpha}u_z^2, \\ v_\tau - a'(\tau)v_z = uu_{zz} + vv_{zz} + \dfrac{1}{\beta}v_z^2, \end{cases} \tag{2.4}$$
$$u\big|_{z=0} = 0, \qquad v\big|_{z=0} = 0.$$

Ряды (2.3) в новых переменных записываются как

$$u(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\tau)\frac{z^k}{k!}, \quad u_k(\tau) = \frac{\partial^k u}{\partial z^k}\Big|_{z=0}; \quad v(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(\tau)\frac{z^k}{k!}, \quad v_k(\tau) = \frac{\partial^k v}{\partial z^k}\Big|_{z=0}.$$

Из краевых условий следует, что $u_0(\tau) = v_0(\tau) = 0$. Тогда из уравнений системы (2.4) имеем, что

$$\begin{cases} -a'(\tau)u_1(\tau) = \dfrac{1}{\alpha}u_1^2(\tau), \\ -a'(\tau)v_1(\tau) = \dfrac{1}{\beta}v_1^2(\tau), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\alpha a'(\tau), \\ v_1 = -\beta a'(\tau), \end{cases}$$

так как по условию теоремы $u_1(0) = u_z(0,0) = u_x(0,0) \neq 0, v_1(0) = v_z(0,0) = v_x(0,0) \neq 0$.

Продифференцируем обе части системы (2.4) по z и положим $z = 0$. Получим, что

$$\begin{cases} u_1' - a'(\tau)u_2 = u_1u_2 + v_1v_2 + \dfrac{2}{\alpha}u_1u_2, \\ v_1' - a'(\tau)v_2 = v_1v_2 + u_1u_2 + \dfrac{2}{\beta}v_1v_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

Подставив сюда выражения для u_1 и v_1, придем к системе вида

$$\begin{cases} (1+\alpha)u_2 + \beta v_2 = \dfrac{\alpha a''}{a'}, \\ \alpha u_2 + (1+\beta)v_2 = \dfrac{\beta a''}{a'}. \end{cases}$$

Определитель этой системы $\Delta_2 = 1 + \alpha + \beta > 0$, решение определяется по формулам

$$v_2 = \frac{a''\left(-\alpha^2 + \alpha\beta + \beta\right)}{a'\left(1 + \alpha + \beta\right)}, \quad u_2 = \frac{a''\left(-\beta^2 + \alpha\beta + \alpha\right)}{a'\left(1 + \alpha + \beta\right)}.$$

И так далее. Пусть найдены коэффициенты ряда с номерами до k включительно. Тогда u_{k+1}, v_{k+1} определяются из соотношений

$$\begin{cases} u_k' - a'(\tau)u_{k+1} = ku_1u_{k+1} + kv_1v_{k+1} + \dfrac{2}{\alpha}u_1u_{k+1} + F_{k+1}, \\ v_k' - a'(\tau)v_{k+1} = ku_1u_{k+1} + kv_1v_{k+1} + \dfrac{2}{\beta}v_1v_{k+1} + G_{k+1}, \end{cases}$$

где F_{k+1}, G_{k+1} известны в силу предположения индукции,

$$F_{k+1} = \sum_{i=2}^{k} C_k^i(u_iu_{k+2-i} + v_iv_{k+2-i}) + \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i u_{i+1}u_{k+1-i},$$

$$G_{k+1} = \sum_{i=2}^{k} C_k^i(u_iu_{k+2-i} + v_iv_{k+2-i}) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{k-1} C_k^i v_{i+1}v_{k+1-i}.$$

После подстановки известных значений и приведения подобных слагаемых получим следующую систему:

$$\begin{cases} (1+k\alpha)\,u_{k+1} + k\beta v_{k+1} = \dfrac{-u_k' + F_{k+1}}{a'(\tau)}, \\ k\alpha u_{k+1} + (1+k\beta)\,v_{k+1} = \dfrac{-v_k' + G_{k+1}}{a'(\tau)}. \end{cases}$$

Определитель данной системы $\Delta_k = (1+k\alpha)(1+k\beta) - k^2\alpha\beta = 1 + k\alpha + k\beta > 0$, т. е. имеет место однозначная разрешимость

$$u_{k+1} = \frac{1}{\Delta_k a'(\tau)}\left[(1+k\beta)(-u_k' + F_{k+1}) - k\beta(-v_k' + G_{k+1})\right],$$
$$v_{k+1} = \frac{1}{\Delta_k a'(\tau)}\left[-k\alpha(-u_k' + F_{k+1}) + (1+k\alpha)(-v_k' + G_{k+1})\right].$$

Таким образом, формальное решение задачи (2.4) построено.

Перейдем теперь к доказательству сходимости рядов (2.3). Введем новые искомые функции U и V по формулам

$$u(\tau,z) = u_0 + u_1 z + z^2 U(\tau,z) = -\alpha a'(\tau)z + z^2 U, \quad v(\tau,z) = v_0 + v_1 z + z^2 V(\tau,z) = -\beta a'(\tau)z + z^2 V.$$

Тогда производные искомых функций преобразуются как

$$\begin{cases} u_\tau = -\alpha a'' z + z^2 U_\tau, \\ u_z = -\alpha a' + 2zU + z^2 U_z, \\ u_{zz} = 2U + 4zU_z + z^2 U_{zz}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_\tau = -\beta a'' z + z^2 V_\tau, \\ v_z = -\beta a' + 2zV + z^2 V_z, \\ v_{zz} = 2V + 4zV_z + z^2 V_{zz}, \end{cases}$$

а система (2.4) после приведения подобных и деления обеих частей уравнений на z примет вид

$$\begin{cases} 2(\alpha+1)U + (1+4\alpha)zU_z + \alpha z^2 U_{zz} + 2\beta V + 4\beta z V_z + \beta z^2 V_{zz} \\ = \dfrac{1}{a'(\tau)}\Big\{\alpha a'' + z\Big[2\Big(1+\dfrac{2}{\alpha}\Big)U^2 - U_\tau\Big] + z^2\Big[4\Big(1+\dfrac{1}{\alpha}\Big)UU_z\Big] + z^3\Big[UU_{zz} + \dfrac{1}{\alpha}U_z^2\Big] \\ \ + 2zV^2 + 4z^2 V_z + z^3 V V_{zz}\Big\}, \\ 2(\beta+1)V + (1+4\beta)zV_z + \beta z^2 V_{zz} + 2\alpha U + 4\alpha z U_z + \alpha z^2 U_{zz} \\ = \dfrac{1}{a'(\tau)}\Big\{\beta b'' + z\Big[2\Big(1+\dfrac{2}{\beta}\Big)V^2 - V_\tau\Big] + z^2\Big[4\Big(1+\dfrac{1}{\beta}\Big)VV_z\Big] + z^3\Big[VV_{zz} + \dfrac{1}{\beta}V_z^2\Big] \\ \ + 2zU^2 + 4z^2 U_z + z^3 U U_{zz}\Big\} \end{cases}$$

или (в более компактной форме)

$$\begin{cases} A_1 U + B_1 z U_z + C_1 z^2 U_{zz} + A_2 V + B_2 z V_z + C_2 z^2 V_{zz} = g_0 + z g_1 + z^2 g_2 + z^3 g_3, \\ A_3 U + B_3 z U_z + C_3 z^2 U_{zz} + A_4 V + B_4 z V_z + C_4 z^2 V_{zz} = h_0 + z h_1 + z^2 h_2 + z^3 h_3, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $A_i, B_i, C_i,\ \ i = 1,\ldots,4$ — положительные константы, а функции g_j, h_j, $j = 0,\ldots,3$ в силу условия теоремы — аналитические.

Будем строить решение системы (2.6) в виде степенных рядов

$$U(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\tau)\frac{z^k}{k!}, \quad V(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(\tau)\frac{z^k}{k!},$$

для их коэффициентов справедливы формулы

$$\begin{cases} [A_1 + B_1 k + C_1 k(k-1)]\,U_k + [A_2 + kB_2 + k(k-1)C_2]\,V_k = G_k, \\ [A_3 + B_3 k + C_3 k(k-1)]\,U_k + [A_4 + kB_4 + k(k-1)C_4]\,V_k = H_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \ldots\ .$$

Здесь выражения для G_k, H_k получаются при k-кратном дифференцировании правых частей и подстановке $z = 0$. Они зависят только от младших коэффициентов ряда.

Определители данных систем $\Delta(k) = (k+1)^2\left[(k+1)\alpha + (k+1)\beta + 1]\right] > 0$.

Теперь построим мажоранту W для функций U и V. Пусть

$$A = \min\{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \quad B = \min\{B_1, B_2, B_3, B_4\}, \quad C = \min\{C_1, C_2, C_3, C_4\},$$

а $G_i,\ i = 0, \ldots, 3$ — мажоранты для функций f_i, h_i, стоящих в правых частях. Тогда если

$$D = \max_k \frac{k(k-1)+1}{A + kB + k(k-1)C},$$

то W является решением уравнения

$$W_{zz} = D\Big[zG_3 + G_2 + \frac{\partial G_1}{\partial z} + \frac{\partial G_1}{\partial W}W_z + \frac{\partial G_1}{\partial W_\tau}W_{z\tau} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2}\Big].$$

Если продифференцировать обе части по z и выразить W_{zzz}, то вместе с условиями $W(0,\tau) = W_0(\tau) \gg U_0(\tau), V_0(\tau);\ W_z(0,\tau) = W_1(\tau) \gg U_1(\tau), V_1(\tau);\ W_{zz}(0,\tau) = W_2(\tau) \gg U_2(\tau), V_2(\tau)$ получим задачу Коши типа Ковалевской, которая по теореме Коши — Ковалевской имеет единственное аналитическое решение.

Данное решение по построению функции W мажорирует функции U и V, т. е. ряды, задающие эти функции, сходятся. Следовательно, сходятся ряды для функций u и v.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Случаи $u_1 \equiv 0, v_1 = -\beta a'(t) \neq 0$ и $u_1 = -\alpha a'(t) \neq 0, v_1 \equiv 0$ рассматриваются аналогично и, вообще говоря, приводят к нетривиальным решениям (см. (2.5)). В случае $u_1 \equiv 0, v_1 \equiv 0$ задача (2.2) имеет только тривиальное решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. **Бабич В.М.** Об элементарных решениях гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1959. Т. 21, № 3. С. 479–481.
3. **Ludvig D.** Exact and asymptotic solutions of the Cauchy problem // Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13, no. 3. P. 473–508.
4. **Дородницын А.А.** Некоторые случаи осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 77–88.
5. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
6. **Рубина Л.И.** Приближенный метод расчета одной задачи об истечении в вакуум с помощью характеристических рядов // Методы решения краевых задач механики сплошной среды / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978. С. 47–51.
7. **Филимонов М.Ю.** О применении специальных рядов при решении смешанных задач для нелинейных уравнений в частных производных // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1987. С. 124–139.
8. **Filimonov M.Yu., Korzunin L.G., Sidorov A.F.** Approximate methods for solving nonlinear initial boundary-value problems based on special constructions of series // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, № 2. P. 101–125.
9. **Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь.** Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22. С. 667–704.
10. **Сидоров А.Ф.** Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.
11. **Ваганова Н.А.** Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
12. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 87 с.

13. **Казаков А.Л.** Применение обобщенного метода характеристических рядов при построении решения одной начально-краевой задачи для системы квазилинейных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 91–109.
14. **Казаков А.Л.** Из письма в редакцию // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 285.
15. **Титов С.С.** Решение уравнений с особенностями в аналитических шкалах банаховых пространств. Екатеринбург: УрГАХА, 1999. 264 с.
16. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 599 с.

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
e-mail: kazakov@icc.ru

Поступила 30.03.2011
Окончательный вариант 26.09.2011