V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova, Sigma Functions and Lie Algebras of Schrödinger Operators,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 4, 3–16

Функциональный анализ и его приложения
2020, т. 54, вып. 4, с. 3–16

УДК 515.178.2+517.958+517.986

Сигма-функции и алгебры Ли операторов Шрёдингера[1]

© 2020. В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова

Посвящается памяти замечательного математика
Виктора Энольского (1945–2019)

В работе В. М. Бухштабера и Д. В. Лейкина, опубликованной в 2004 г. в журнале «Функциональный анализ и его приложения», для каждого $g>0$ определена система из $2g$ многомерных уравнений Шрёдингера в магнитных полях с квадратичными потенциалами. Такие системы эквивалентны системам уравнений теплопроводности в неголономном репере. Доказано, что такая система определяет сигма-функцию универсальной гиперэллиптической кривой рода g. Введена полиномиальная алгебра Ли, образующими которой являются $2g$ операторов Шрёдингера $Q_0, Q_2, \dots, Q_{4g-2}$.

В данной работе для каждого $g>0$ получен явный вид операторов Q_0, Q_2, Q_4 и рекуррентные формулы для Q_{2k} при $k>2$, выражающие эти операторы как элементы полиномиальной алгебры Ли при помощи скобок Ли операторов Q_0, Q_2 и Q_4.

В качестве приложения получен явный вид операторов $Q_0, Q_2, \dots, Q_{4g-2}$ при $g=1,2,3,4$.

DOI: https://doi.org/10.1134/faa3837

§ 1. Введение

Уравнение теплопроводности, эквивалентное уравнению Шрёдингера, играет фундаментальную роль в теории абелевых функций. Например, гл. I монографии [2] начинается с характеризации эллиптической тэта-функции как периодического фундаментального решения одномерного уравнения теплопроводности.

Непосредственно из конструкции функции $\theta(z,\Omega)$, где $z\in\mathbb{C}^g$ и Ω — симметрическая $(g\times g)$-матрица, следует, что эта функция удовлетворяет классической системе многомерных уравнений теплопроводности. В этой системе роль времен играют $g(g+1)/2$ независимых параметров многообразия симметрических $(g\times g)$-матриц Ω. Векторные поля вдоль времен образуют голономный репер.

При $g>3$ размерность многообразия симметрических $(g\times g)$-матриц, являющихся матрицами периодов неособой римановой поверхности рода g, меньше числа $g(g+1)/2$. Возникает широко известная проблема Римана–Шоттки, которая была решена Шиотой (см. [3]) на основе гипотезы С. П. Новикова, в терминах уравнения Кадомцева–Петвиашвили.

В рамках проблемы Ф. Клейна по каждой неособой римановой поверхности V рода g строится целая функция на $\mathbb{C}^g$, а именно, многомерная сигма-функция. Ее логарифмические производные порядка 2 и выше порождают все поле мероморфных функций на якобиане кривой V (см. [4]). В первых конструкциях эта

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №20-11-19998).

многомерная сигма-функция вводилась как модификация многомерной тэта-функции. Эффективность ее реализации достигается за счет правильного выбора модели кривой. В результате получается целая функции, разложение которой в ряд по векторному аргументу $z \in \mathbb{C}^g$ приводит к ряду над кольцом полиномов от параметров уравнения кривой. Фиксируя семейство кривых (семейство гиперэллиптических кривых и более широкое семейство (n, s)-кривых), мы можем представить тэта-функции этих кривых как модифицированные сигма-функции этих кривых. Эффективное описание таких модификаций дает решение проблемы Римана–Шоттки, учитывающее специфику рассматриваемого семейства кривых. Но в этом случае мы не можем использовать классическую систему уравнений теплопроводности для характеризации полученных тэта-функций, так как векторные поля вдоль времен, соответствующих вариациям периодов, могут пересекать дискриминанты кривых. Это также связано с проблемой Римана–Шоттки.

В работе [1] была построена система уравнений теплопроводности, характеризующая многомерные сигма-функции. В этой системе векторные поля вдоль времен, соответствующих вариациям параметров уравнений кривых, образуют уже неголономный репер. Возникают уравнения Шрёдингера в магнитных полях.

Естественно встал вопрос об эффективном описании этой системы уравнений. Решению этого вопроса в случае семейства гиперэллиптических кривых посвящена настоящая работа.

§ 2. Постановка задачи в случае семейства гиперэллиптических кривых

Мы рассматриваем гиперэллиптические кривые рода $g \in \mathbb{N}$ в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^{2g+1} + \lambda_4 x^{2g-1} + \lambda_6 x^{2g-2} + \cdots + \lambda_{4g} x + \lambda_{4g+2}\}. \qquad (1)$$

Кривая зависит от параметров $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{2g}$ — подпространство таких параметров λ, что кривая $\mathcal{V}_\lambda$ невырожденна. Тогда $\mathcal{B} = \mathbb{C}^{2g} \backslash \Sigma$, где Σ — дискриминантная гиперповерхность универсальной кривой.

Для мероморфной функции f в $\mathbb{C}^g$ вектор $\omega \in \mathbb{C}^g$ является периодом, если $f(z + \omega) = f(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^g$. Если мероморфная функция f имеет $2g$ независимых периодов в $\mathbb{C}^g$, то она называется *абелевой функцией*. Таким образом, абелева функция — это мероморфная функция на комплексном торе $T^g = \mathbb{C}^g/\Gamma$, где Γ — решетка периодов.

Для каждого $\lambda \in \mathcal{B}$ набор периодов голоморфных дифференциалов на кривой $\mathcal{V}_\lambda$ порождает решетку Γ_λ ранга $2g$ в $\mathbb{C}^g$. *Гиперэллиптической функцией рода g* (см. [5]–[7]) называется мероморфная функция в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B}$, такая, что для каждого $\lambda \in \mathcal{B}$ ее ограничение на $\mathbb{C}^g \times \lambda$ является абелевой функцией, где тор T^g — это якобиан $\mathcal{J}_\lambda = \mathbb{C}^g/\Gamma_\lambda$ кривой $\mathcal{V}_\lambda$. Обозначим через $\mathcal{F}$ поле гиперэллиптических функций рода g. Свойства этого поля см. в [6], [7].

Обозначим координаты в $\mathbb{C}^g$ через $z = (z_1, z_3, \ldots, z_{2g-1})$. Индексы координат $z = (z_1, z_3, \ldots, z_{2g-1}) \in \mathbb{C}^g$ и параметров $\lambda = (\lambda_4, \lambda_6, \ldots, \lambda_{4g}, \lambda_{4g+2}) \in \mathbb{C}^{2g}$

определяют их градуировку: $\operatorname{wt} z_k = -k$, $\operatorname{wt} \lambda_k = k$. Обозначим через P кольцо полиномов от $\lambda \in \mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{2g}$.

Мы рассматриваем полиномиальные алгебры Ли [8] векторных полей, касающихся дискриминанта Σ в $\mathbb{C}^{2g}$. Их образующие $L_0, L_2, L_4, \dots, L_{4g-2}$ — векторные поля

$$L_{2k} = \sum_{s=2}^{2g+1} v_{2k+2,2s-2}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda_{2k}}, \quad \text{где } v_{2k+2,2s-2}(\lambda) \in P.$$

В точке $\lambda \in \mathcal{B}$ эти векторные поля определяют $2g$-мерный неголономный репер. Структура алгебры Ли как P-модуля с образующими $1, L_0, L_2, L_4, \dots, L_{4g-2}$ определяется полиномиальными матрицами $V(\lambda) = (v_{2i,2j}(\lambda))$, где $i, j = 1, \dots, 2g$, и $C(\lambda) = \{c_{2i,2j}^{2k}(\lambda)\}$, где $i, j, k = 0, \dots, 2g-1$, такими, что

$$[L_{2i}, L_{2j}] = \sum_{k=0}^{2g-1} c_{2i,2j}^{2k}(\lambda) L_{2k}, \quad [L_{2i}, \lambda_{2q}] = v_{2i+2,2q-2}(\lambda), \quad [\lambda_{2q}, \lambda_{2r}] = 0. \tag{2}$$

Здесь λ_q — оператор умножения на функцию λ_q в P.

Явные выражения для матрицы $V(\lambda)$ можно найти в [9, §4.1] (см. также [8] и [10, лемма 3.1]). Для удобства положим $\lambda_s = 0$ при $s \notin \{0, 4, 6, \dots, 4g, 4g+2\}$ и $\lambda_0 = 1$. Для $k, m \in \{1, \dots, 2g\}$, $k \leqslant m$, положим

$$v_{2k,2m}(\lambda) = \sum_{s=0}^{k-1} 2(k+m-2s) \lambda_{2s} \lambda_{2(k+m-s)} - \frac{2k(2g-m+1)}{2g+1} \lambda_{2k} \lambda_{2m},$$

а для $k > m$ положим $v_{2k,2m}(\lambda) = v_{2m,2k}(\lambda)$.

Векторное поле L_0 — эйлерово векторное поле, а именно, поскольку $\operatorname{wt} \lambda_{2k} = 2k$, имеем

$$[L_0, \lambda_{2k}] = 2k \lambda_{2k}, \qquad [L_0, L_{2k}] = 2k L_{2k}. \tag{3}$$

Эти выражения определяют веса векторных полей L_k, а именно, $\operatorname{wt} L_{2k} = 2k$. Структура алгебры Ли, описанная выше, дает в этом случае градуированную полиномиальную алгебру Ли [8], которую мы обозначим через $\mathscr{L}_L$. Структурные полиномы $c_{2i,2j}^{2s}(\lambda)$ описаны в [1, теорема 2.5].

Широко известна алгебра Ли–Витта $W_{\geqslant}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, порожденная операторами l_{2i}, где $i = 0, 1, 2, \dots$, и коммутационными соотношениями

$$[l_{2i}, l_{2j}] = 2(j-i) l_{2(i+j)}.$$

Относительно скобки $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ алгебра Ли–Витта $W_{\geqslant}$ порождена тремя операторами l_0, l_2, l_4. Градуированная полиномиальная алгебра Ли $\mathscr{L}_L$ над P является деформацией алгебры Ли–Витта $W_{\geqslant}$. Она также порождена всего тремя операторами L_0, L_2 и L_4. Имеет место соотношение (см. лемму 4.3)

$$[L_2, L_{2k}] = 2(k-1) L_{2k+2} + \frac{4(2g-k)}{(2g+1)} (\lambda_{2k+2} L_0 - \lambda_4 L_{2k-2}).$$

Теперь мы вводим операторы Шрёдингера. Мы рассматриваем пространство $\mathbb{C}^{3g}$ с координатами (z,λ). Обозначим через $\mathcal{C}(z,\lambda)$ кольцо дифференцируемых функций по z и λ. Положим

$$Q_{2k} = L_{2k} - H_{2k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2g-1, \tag{4}$$

где

$$H_{2k} = \frac{1}{2}\sum (\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda)\partial_a\partial_b + 2\beta_{a,b}^{(k)}(\lambda)z_a\partial_b + \gamma_{a,b}^{(k)}(\lambda)z_a z_b) + \delta^{(k)}(\lambda) \tag{5}$$

и суммирование ведется по нечетным a, b от 1 до $2g-1$. В [1] дано решение следующей задачи.

Задача 2.1. *Найти достаточные условия на* $\{\alpha^{(i)}(\lambda), \beta^{(i)}(\lambda), \gamma^{(i)}(\lambda), \delta^{(i)}(\lambda)\}$, *при которых операторы* (4) *дают представление алгебры Ли* (2) *в кольце операторов на* $\mathcal{C}(z,\lambda)$.

Определение 2.2. Система уравнений на $\varphi = \varphi(z,\lambda)$

$$Q_{2k}\varphi = 0 \tag{6}$$

называется *системой уравнений теплопроводности*. Операторы Q_{2k} называются *операторами Шрёдингера.*

Мы используем теорию гиперэллиптических функций Клейна (см. [6], [11], [12], [4], а также [13] для эллиптических функций). Возьмем координаты (z,λ) в $\mathbb{C}^g \times \mathcal{B} \subset \mathbb{C}^{3g}$. Пусть $\sigma(z,\lambda)$ — гиперэллиптическая сигма-функция (или эллиптическая сигма-функция в случае рода $g=1$). Положим $\partial_k = \partial/\partial z_k$. Следуя работам [5], [7], [14], мы используем обозначения

$$\zeta_k = \partial_k \ln\sigma(z,\lambda), \qquad \wp_{k_1,\ldots,k_n} = -\partial_{k_1}\cdots\partial_{k_n}\ln\sigma(z,\lambda), \tag{7}$$

где $n \geqslant 2$, $k_s \in \{1,3,\ldots,2g-1\}$. Функции $\wp_{k_1,\ldots,k_n}$ дают примеры гиперэллиптических функций. Поле $\mathcal{F}$ является полем частных кольца полиномов $\mathcal{P}$, порожденного функциями $\wp_{k_1,\ldots,k_n}$, где $n \geqslant 2$, $k_s \in \{1,3,\ldots,2g-1\}$.

Как показано в [1], система уравнений теплопроводности (6) для операторов Q_{2k}, представляющих собой решение задачи 1.1, задает гиперэллиптическую сигма-функцию $\sigma(z,\lambda)$, что позволяет строить теорию гиперэллиптических функций Клейна, начиная с таких операторов.

Конструкция операторов Q_{2i} в [1] использует условие (см. [1, уравнение (1.3)]), что коммутатор операторов $[Q_{2i}, Q_{2j}]$ задается формулой над P с теми же коэффициентами, что и в формуле для $[L_{2i}, L_{2j}]$. То есть полиномиальная алгебра, порожденная операторами Q_{2i} при $i = 0, 1, \ldots,$ является еще одной реализацией деформации алгебры Ли–Витта $W_{\geqslant}$. Таким образом, для эффективного описания полиномиальной алгебры Ли $\mathscr{L}_Q$ необходимо получить явные формулы для операторов Q_0, Q_2 и Q_4. Эти формулы являются основным результатом данной работы. В качестве приложения мы приводим явный вид дифференциальных операторов в случае универсальной гиперэллиптической кривой рода 4.

§ 3. Производящие функции для операторов Шрёдингера

В этом параграфе мы представляем в случае модели (1) явный вид решения задачи 2.1 из [1, теорема 2.6]. Мы заменим некоторые обозначения для согласования с формулами настоящей работы.

Обозначим через $q(a(x), b(x))$ частное при евклидовом делении полинома $a(x)$ на полином $b(x)$ и через $r(a(x), b(x))$ остаток при евклидовом делении полинома $a(x)$ на полином $b(x)$. Положим (см. (1))

$$f(x) = x^{2g+1} + \sum_{k=0}^{2g-1} \lambda_{2(2g+1-k)} x^k.$$

Определим производящие функции для операторов L_{2k} и H_{2k} по формулам

$$L(x) = x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} L_{2k}, \qquad H(x) = x^{2g-1} \sum_{k=0}^{2g-1} x^{-k} H_{2k}. \tag{8}$$

Для $R_i(x) = x^{g-i+1} \partial_x q(f(x), x^{2g-2i+2})$ мы полагаем

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{i=1}^{g} x^{g-i} \partial_{2i-1} + R_i(x) z_{2i-1}, \\ t(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g} (g-i+1) z_{2i-1}^2 q(R_i(x), x^{g-i+2}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{g-1} \sum_{j=i+1}^{g} (g-j+1) z_{2j-1} q(x^{g-i}\partial_{2i-1} + R_i(x) z_{2i-1}, x^{g-j+2}). \end{aligned}$$

Тогда имеет место соотношение (см. [1, теорема 2.6])

$$H(x) = r\Big(-\frac{1}{4} f''(x) + 2f(x)t(x) + \frac{1}{2} h(x) \circ h(x), f'(x) \Big), \tag{9}$$

где $\circ$ обозначает композицию операторов.

Функция $Q(x) = L(x) - H(x)$ является производящей функцией для операторов Шрёдингера.

Лемма 3.1. *Для операторов Шрёдингера в формуле* (5)

$$\begin{aligned} &\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda) = 1 \quad \textit{при} \ \ a+b = 2k, \ a,b \in 2\mathbb{N}+1, \\ &\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda) = 0 \quad \textit{при} \ \ a+b \neq 2k, \ a,b \in 2\mathbb{N}+1, \\ &\delta^{(k)}(\lambda) = \left(-\frac{1}{4}(2g-k+1)(2g-k) + \frac{1}{2}\left(g + \left[\frac{k+1}{2}\right] - k\right)\left(g - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)\right)\lambda_{2k}. \end{aligned}$$

Доказательство. Коэффициент при $\partial_a \partial_b$ в $H(x)$ получается из слагаемого $\frac{1}{2} h(x) \circ h(x)$, в развернутом виде $\sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} x^{2g-i-j} \partial_{2i-1} \partial_{2j-1}$, и мы получаем из (9) выражения для $\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda)$.

Выражение для $\delta^{(k)}(\lambda)$ получается из слагаемых $-\frac{1}{4}f''(x)$ и $\frac{1}{2}h(x)\circ h(x)$. Первое дает $-\frac{1}{4}(2g-k+1)(2g-k)\lambda_{2k}$, а второе дает $\frac{1}{2}(g+[\frac{k+1}{2}]-k)(g-[\frac{k+1}{2}])\lambda_{2k}$, что приводит к нужному результату.

Замечание 3.2. Далее мы покажем, что для операторов Шрёдингера в выражении (5)

$$\beta_{a,b}^{(k)}(\lambda) \text{ — линейная функция по } \lambda,$$
$$\gamma_{a,b}^{(k)}(\lambda) \text{ — квадратичная функция по } \lambda.$$

См. лемму 4.2.

§ 4. Явный вид операторов Шрёдингера

Напомним, что в наших обозначениях $\lambda_s = 0$ для $s \notin \{0,4,6,\dots,4g,4g+2\}$ и $\lambda_0 = 1$.

Теорема 4.1. *Имеют место явные выражения*

$$\begin{aligned}
H_0 &= \sum_{s=1}^{g}(2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s-1} - \frac{g(g+1)}{2},\\
H_2 &= \frac{1}{2}\partial_1^2 + \sum_{s=1}^{g-1}(2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s+1} - \frac{4}{2g+1}\lambda_4\sum_{s=1}^{g-1}(g-s)z_{2s+1}\partial_{2s-1}\\
&\quad + \sum_{s=1}^{g}\left(\frac{2s-1}{2}\lambda_{4s} - \frac{2(g-s+1)}{2g+1}\lambda_4\lambda_{4s-4}\right)z_{2s-1}^2,\\
H_4 &= \partial_1\partial_3 + \sum_{s=1}^{g-2}(2s-1)z_{2s-1}\partial_{2s+3} + \lambda_4\sum_{s=1}^{g-1}(2s-1)z_{2s+1}\partial_{2s+1}\\
&\quad - \frac{6}{2g+1}\lambda_6\sum_{s=1}^{g-1}(g-s)z_{2s+1}\partial_{2s-1}\\
&\quad + \sum_{s=1}^{g}\left((2s-1)\lambda_{4s+2} - \frac{3(g-s+1)}{2g+1}\lambda_6\lambda_{4s-4}\right)z_{2s-1}^2\\
&\quad + \sum_{s=1}^{g-1}(2s-1)\lambda_{4s+4}z_{2s-1}z_{2s+1} - \frac{g(g-1)}{2}\lambda_4.
\end{aligned}$$

Доказательство. Явные выражения для $\alpha_{a,b}^{(k)}(\lambda)$ и $\delta^{(k)}(\lambda)$ были получены в лемме 3.1. Мы видим, что для $k=0,1,2$ они совпадают с представленными в теореме. Напомним, что $\lambda_0 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

В (9) коэффициент при $z_{2j-1}\partial_{2i-1}$ равен

$$r(2(g-j+1)f(x)q(x^{g-i},x^{g-j+2}) + x^{g-i}R_j(x), f'(x)).$$

Для выражения H_0 нам нужен коэффициент при x^{2g-1} в этом полиноме, для H_2 — коэффициент при x^{2g-2}, для H_4 — коэффициент при x^{2g-3}.

При $j < i+1$ этот полином принимает вид

$$r(x^{g-i}R_j(x), f'(x)) = x^{g-i}R_j(x),$$

поскольку степень полинома $R_j(x)$ по x равна $g+j-1$, а степень полинома $f'(x)$ равна $2g$. Таким образом, мы получаем коэффициент $2j-1$ для $j=i$ в H_0, для $j=i-1$ в H_2 и для $j=i-2$ в H_4, а также коэффициент $(2j-3)\lambda_4$ для $j=i\geqslant 2$ в H_4; остальные коэффициенты нулевые.

При $j=i+1$ этот полином принимает вид

$$\begin{aligned} &r(x^{g-i}R_j(x), f'(x)) \\ &\quad = r(x^{2g-2i}\partial_x q(f(x), x^{2g-2i}), f'(x)) \\ &\quad = r((2i+1)x^{2g}, f'(x)) + \sum_{k=2g-2i+1}^{2g-1}(k-2g+2i)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1} \\ &\quad = -\frac{2i+1}{2g+1}\sum_{k=0}^{2g-1}k\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1} + \sum_{k=2g-2i+1}^{2g-1}(k-2g+2i)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем, что коэффициент в H_0 нулевой, коэффициент в H_2 равен $-\frac{4}{2g+1}(g-i)\lambda_4$ и коэффициент в H_4 равен $-\frac{6}{2g+1}(g-i)\lambda_6$.

При $j\geqslant i+2$ этот полином принимает вид

$$\begin{aligned} &r(2(g-j+1)x^{j-i-2}f(x) + x^{2g-i-j+1}\partial_x q(f(x), x^{2g-2j+2}), f'(x)) \\ &\quad = r(f'(x)x^{j-i+1} + \sum_{k=0}^{2g-2j+2}(2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k+j-i-2}, f'(x)) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{2g-2j+2}(2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k+j-i-2}. \end{aligned}$$

Поскольку $j\geqslant i+2\geqslant 3$, коэффициенты в H_0, H_2 и H_4 нулевые.

В (9) коэффициент при z_{2i-1}^2 равен

$$r\Big((g-i+1)f(x)q(R_i(x), x^{g-i+2}) + \frac{1}{2}R_i(x)^2, f'(x)\Big). \tag{10}$$

Для $i=1$ обратим внимание, что $R_1(x)=x^g$ и выражение (10) принимает вид

$$\frac{1}{2}r(x^{2g}, f'(x)) = -\frac{1}{2(2g+1)}\sum_{k=1}^{2g-1}k\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1}.$$

В этом выражении коэффициент при x^{2g-1} нулевой, коэффициенты при x^{2g-2} и x^{2g-3} дают соответствующие коэффициенты в H_2 и в H_4 при z_1^2.

Для $i > 1$ имеем

$$\begin{aligned}
&r\biggl((g-i+1)f(x)q(R_i(x),x^{g-i+2})+\frac{1}{2}R_i(x)^2, f'(x)\biggr)\\
&\quad= r\biggl(\frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\Bigl(2(g-i+1)x^{-1}f(x)+x^{g-i+1}R_i(x)\Bigr)\\
&\qquad\qquad - (g-i+1)f(x)x^{-1}r(x^{-g+i-1}R_i(x),x), f'(x)\biggr)\\
&\quad= r\biggl(\frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\Bigl(f'(x)+x^{-1}\sum_{k=0}^{2g-2i+1}(2g-2i+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\Bigr)\\
&\qquad\qquad - (g-i+1)f(x)x^{-1}r(x^{-g+i-1}R_i(x),x), f'(x)\biggr)\\
&\quad= \frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\Bigl(x^{-1}\sum_{k=0}^{2g-2i+1}(2g-2i+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\Bigr)\\
&\qquad - (g-i+1)r(x^{-g+i-1}R_i(x),x)x^{-1}(f(x)-x^{2g+1})\\
&\qquad - (g-i+1)r(x^{-g+i-1}R_i(x),x)r(x^{2g},f'(x))\\
&\quad= \frac{1}{2}R_i(x)x^{-g+i-1}\Bigl(x^{-1}\sum_{k=0}^{2g-2i+1}(2g-2i+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\Bigr)\\
&\qquad - (g-i+1)\lambda_{4(i-1)}x^{-1}\Bigl(\sum_{k=0}^{2g-1}\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\Bigr)\\
&\qquad + \frac{(g-i+1)}{(2g+1)}\lambda_{4(i-1)}\Bigl(\sum_{k=1}^{2g-1}k\lambda_{2(2g+1-k)}x^{k-1}\Bigr).
\end{aligned}$$

Это полином степени $2g-2$. Таким образом, коэффициент в H_0 нулевой. Коэффициенты в H_2 и H_4 совпадают с соответствующими коэффициентами в теореме.

В (9) коэффициент при $z_{2i-1}z_{2j-1}$, $j > i$, равен

$$\begin{aligned}
&r\biggl(R_i(x)x^{-g+j-2}\Bigl(2(g-j+1)f(x)+x^{g-j+2}R_j(x)\Bigr), f'(x)\biggr)\\
&\quad= r\biggl(R_i(x)x^{-g+j-2}\Bigl(xf'(x)+\sum_{k=0}^{2g-2j+1}(2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\Bigr), f'(x)\biggr)\\
&\quad= R_i(x)x^{-g+j-2}\Bigl(\sum_{k=0}^{2g-2j+1}(2g-2j+2-k)\lambda_{2(2g+1-k)}x^k\Bigr).
\end{aligned}$$

Это полином степени $2g+i-j-2 \leqslant 2g-3$, причем равенство достигается при $j = i+1$. Таким образом, коэффициенты в H_0 и в H_2 нулевые, а коэффициент в H_4 для $j = i+1$ равен $(2i-1)\lambda_{4i+4}$.

Теорема доказана.

Лемма 4.2. *Для операторов Шрёдингера в* (5)

$$\beta_{a,b}^{(k)}(\lambda) \text{ — линейная функция по } \lambda,$$
$$\gamma_{a,b}^{(k)}(\lambda) \text{ — квадратичная функция по } \lambda.$$

Доказательство следует из явных выражений в доказательстве теоремы 4.1.

Лемма 4.3. *Имеет место соотношение*

$$[L_2, L_{2k}] = 2(k-1)L_{2k+2} + \frac{4(2g-k)}{(2g+1)}(\lambda_{2k+2}L_0 - \lambda_4 L_{2k-2}). \tag{11}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
L_{2k} = 2\sum_{m=2}^{k+1} \Bigg(\sum_{s=0}^{m-2} (k+m-2s)\lambda_{2s}\lambda_{2(k+m-s)} \\
- \frac{(m-1)(2g-k)}{2g+1}\lambda_{2(k+1)}\lambda_{2(m-1)} \Bigg) \frac{\partial}{\partial\lambda_{2m}} \\
+ 2\sum_{m=k+2}^{2g+1} \Bigg(\sum_{s=0}^{k} (k+m-2s)\lambda_{2s}\lambda_{2(k+m-s)} \\
- \frac{(k+1)(2g-m+2)}{2g+1}\lambda_{2(k+1)}\lambda_{2(m-1)} \Bigg) \frac{\partial}{\partial\lambda_{2m}},
\end{aligned}$$
$$L_2 = \sum_{m=2}^{2g+1} \left(2(m+1)\lambda_{2(m+1)} - \frac{4(2g-m+2)}{2g+1}\lambda_4\lambda_{2(m-1)} \right) \frac{\partial}{\partial\lambda_{2m}}.$$

Отсюда получаем (11) непосредственным вычислением коэффициентов.

Следствие 4.4. *Для* $k = 3, 4, 5, \ldots, 2g-1$ *имеет место равенство*

$$Q_{2k} = \frac{1}{2(k-2)}[Q_2, Q_{2k-2}] - \frac{2(2g-k+1)}{(k-2)(2g+1)}(\lambda_{2k}Q_0 - \lambda_4 Q_{2k-4}). \tag{12}$$

Это равенство рекуррентно задает операторы Q_{2k} для $k = 3, 4, 5, \ldots, 2g-1$, мы получаем явные выражения для этих операторов.

Доказательство следствия 4.4. Операторы Q_{2k} по построению (см. §3) дают решение задачи 2.1. Равенство (12) совпадает с равенством (11), переписанным в терминах операторов Q_{2k}.

§ 5. Явные формулы для операторов Шрёдингера в неголономном репере

Следующие операторы можно найти в [1], [5], [15], [16] в случае рода $g = 1$, в [5], [15], [16] в случае рода $g = 2$ и в [10], [17] в случае рода $g = 3$. Случай рода $g = 4$ является новым. Формулы для рода $g = 4$ следуют из выражений, полученных в §4.

5.1. Операторы Шрёдингера для рода $g = 1$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$H_0 = z_1\partial_1 - 1, \qquad H_2 = \tfrac{1}{2}\partial_1^2 - \tfrac{1}{6}\lambda_4 z_1^2.$$

5.2. Операторы Шрёдингера для рода $g = 2$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$\begin{aligned}
H_0 &= z_1\partial_1 + 3z_3\partial_3 - 3,\\
H_2 &= \tfrac{1}{2}\partial_1^2 - \tfrac{4}{5}\lambda_4 z_3\partial_1 + z_1\partial_3 - \tfrac{3}{10}\lambda_4 z_1^2 + (\tfrac{3}{2}\lambda_8 - \tfrac{2}{5}\lambda_4^2)z_3^2,\\
H_4 &= \partial_1\partial_3 - \tfrac{6}{5}\lambda_6 z_3\partial_1 + \lambda_4 z_3\partial_3 - \tfrac{1}{5}\lambda_6 z_1^2 + \lambda_8 z_1 z_3 + (3\lambda_{10} - \tfrac{3}{5}\lambda_4\lambda_6)z_3^2 - \lambda_4,\\
H_6 &= \tfrac{1}{2}\partial_3^2 - \tfrac{3}{5}\lambda_8 z_3\partial_1 - \tfrac{1}{10}\lambda_8 z_1^2 + 2\lambda_{10} z_1 z_3 - \tfrac{3}{10}\lambda_4\lambda_8 z_3^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_6.
\end{aligned}$$

5.3. Операторы Шрёдингера для рода $g = 3$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$\begin{aligned}
H_0 &= z_1\partial_1 + 3z_3\partial_3 + 5z_5\partial_5 - 6,\\
H_2 &= \tfrac{1}{2}\partial_1^2 - \tfrac{8}{7}\lambda_4 z_3\partial_1 + (z_1 - \tfrac{4}{7}\lambda_4 z_5)\partial_3 + 3z_3\partial_5 - \tfrac{5}{14}\lambda_4 z_1^2 + (\tfrac{3}{2}\lambda_8 - \tfrac{4}{7}\lambda_4^2)z_3^2\\
&\quad + (\tfrac{5}{2}\lambda_{12} - \tfrac{2}{7}\lambda_4\lambda_8\tfrac{5}{2})z_5^2,\\
H_4 &= \partial_1\partial_3 - \tfrac{12}{7}\lambda_6 z_3\partial_1 + (\lambda_4 z_3 - \tfrac{6}{7}\lambda_6 z_5)\partial_3 + (z_1 + 3\lambda_4 z_5)\partial_5 - \tfrac{2}{7}\lambda_6 z_1^2 + \lambda_8 z_1 z_3\\
&\quad + (3\lambda_{10} - \tfrac{6}{7}\lambda_4\lambda_6)z_3^2 + 3\lambda_{12} z_3 z_5 + (5\lambda_{14} - \tfrac{3}{7}\lambda_6\lambda_8)z_5^2 - 3\lambda_4,\\
H_6 &= \tfrac{1}{2}\partial_3^2 + \partial_1\partial_5 - \tfrac{9}{7}\lambda_8 z_3\partial_1 - \tfrac{8}{7}\lambda_8 z_5\partial_3 + (\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5)\partial_5 - \tfrac{3}{14}\lambda_8 z_1^2 + 2\lambda_{10} z_1 z_3\\
&\quad + (\tfrac{9}{2}\lambda_{12} - \tfrac{9}{14}\lambda_4\lambda_8)z_3^2 + \lambda_{12} z_1 z_5 + 6\lambda_{14} z_3 z_5 + (\tfrac{3}{2}\lambda_4\lambda_{12} - \tfrac{4}{7}\lambda_8^2)z_5^2 - 2\lambda_6,\\
H_8 &= \partial_3\partial_5 - (\tfrac{6}{7}\lambda_{10} z_3 - \lambda_{12} z_5)\partial_1 - \tfrac{10}{7}\lambda_{10} z_5\partial_3 + \lambda_8 z_5\partial_5 - \tfrac{1}{7}\lambda_{10} z_1^2 + 3\lambda_{12} z_1 z_3\\
&\quad + (6\lambda_{14} - \tfrac{3}{7}\lambda_4\lambda_{10})z_3^2 + 2\lambda_{14} z_1 z_5 + \lambda_4\lambda_{12} z_3 z_5\\
&\quad + (3\lambda_4\lambda_{14} + \lambda_6\lambda_{12} - \tfrac{5}{7}\lambda_8\lambda_{10})z_5^2 - \lambda_8,\\
H_{10} &= \tfrac{1}{2}\partial_5^2 - (\tfrac{3}{7}\lambda_{12} z_3 - 2\lambda_{14} z_5)\partial_1 - \tfrac{5}{7}\lambda_{12} z_5\partial_3 - \tfrac{1}{14}\lambda_{12} z_1^2 + 4\lambda_{14} z_1 z_3\\
&\quad - \tfrac{3}{14}\lambda_4\lambda_{12} z_3^2 + 2\lambda_4\lambda_{14} z_3 z_5 + (2\lambda_6\lambda_{14} - \tfrac{5}{14}\lambda_8\lambda_{12})z_5^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_{10}.
\end{aligned}$$

5.4. Операторы Шрёдингера для рода $g = 4$. В этом случае явные формулы для $\{H_{2k}\}$ в (4) следующие:

$$\begin{aligned}
H_0 &= z_1\partial_1 + 3z_3\partial_3 + 5z_5\partial_5 + 7z_7\partial_7 - 10,\\
H_2 &= \tfrac{1}{2}\partial_1^2 + z_1\partial_3 + 3z_3\partial_5 + 5z_5\partial_7 - \tfrac{4}{9}\lambda_4(3z_3\partial_1 + 2z_5\partial_3 + z_7\partial_5) - \tfrac{7}{18}\lambda_4 z_1^2\\
&\quad + (\tfrac{3}{2}\lambda_8 - \tfrac{2}{3}\lambda_4^2)z_3^2 + (\tfrac{5}{2}\lambda_{12} - \tfrac{4}{9}\lambda_4\lambda_8)z_5^2 + (\tfrac{7}{2}\lambda_{16} - \tfrac{2}{9}\lambda_4\lambda_{12})z_7^2,\\
H_4 &= \partial_1\partial_3 + z_1\partial_5 + 3z_3\partial_7 + \lambda_4(z_3\partial_3 + 3z_5\partial_5 + 5z_7\partial_7)\\
&\quad - \tfrac{2}{3}\lambda_6(3z_3\partial_1 + 2z_5\partial_3 + z_7\partial_5) - \tfrac{1}{3}\lambda_6 z_1^2 + \lambda_8 z_1 z_3 + (3\lambda_{10} - \lambda_4\lambda_6)z_3^2\\
&\quad + 3\lambda_{12} z_3 z_5 + (5\lambda_{14} - \tfrac{2}{3}\lambda_6\lambda_8)z_5^2 + 5\lambda_{16} z_5 z_7 + (7\lambda_{18} - \tfrac{1}{3}\lambda_6\lambda_{12})z_7^2 - 6\lambda_4,\\
H_6 &= \tfrac{1}{2}\partial_3^2 + \partial_1\partial_5 - \tfrac{5}{3}\lambda_8 z_3\partial_1 - \tfrac{16}{9}\lambda_8 z_5\partial_3 + \tfrac{5}{3}(\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5 - \tfrac{8}{9}\lambda_8 z_7)\partial_5\\
&\quad + (z_1 + 3\lambda_4 z_5 + 4\lambda_6 z_7)\partial_7 - \tfrac{5}{18}\lambda_8 z_1^2 + 2\lambda_{10} z_1 z_3 + \lambda_{12} z_1 z_5\\
&\quad - (\tfrac{5}{6}\lambda_4\lambda_8 - \tfrac{9}{2}\lambda_{12})z_3^2 + 6\lambda_{14} z_3 z_5 + 3\lambda_{16} z_3 z_7 + (\tfrac{3}{2}\lambda_4\lambda_{12} - \tfrac{8}{9}\lambda_8^2 + \tfrac{15}{2}\lambda_{16})z_5^2\\
&\quad + 10\lambda_{18} z_5 z_7 - (\tfrac{4}{9}\lambda_8\lambda_{12} - \tfrac{5}{2}\lambda_4\lambda_{16})z_7^2 - \tfrac{9}{2}\lambda_6,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_8 &= \partial_3\partial_5 + \partial_1\partial_7 - (\tfrac{4}{3}\lambda_{10}z_3 - \lambda_{12}z_5)\partial_1 - \tfrac{20}{9}\lambda_{10}z_5\partial_3 + (\lambda_8 z_5 - \tfrac{10}{9}\lambda_{10}z_7)\partial_5 \\
&\quad + (\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5 + 3\lambda_8 z_7)\partial_7 - \tfrac{2}{9}\lambda_{10}z_1^2 + 3\lambda_{12}z_1z_3 + 2\lambda_{14}z_1z_5 + \lambda_{16}z_1z_7 \\
&\quad - (\tfrac{2}{3}\lambda_4\lambda_{10} - 6\lambda_{14})z_3^2 + (\lambda_4\lambda_{12} + 9\lambda_{16})z_3z_5 + 6\lambda_{18}z_3z_7 \\
&\quad - (\tfrac{10}{9}\lambda_8\lambda_{10} - \lambda_6\lambda_{12} - 3\lambda_4\lambda_{14} - 10\lambda_{18})z_5^2 + 3\lambda_4\lambda_{16}z_5z_7 \\
&\quad - (\tfrac{5}{9}\lambda_{10}\lambda_{12} - 2\lambda_6\lambda_{16} - 5\lambda_4\lambda_{18})z_7^2 - 3\lambda_8, \\
H_{10} &= \tfrac{1}{2}\partial_5^2 + \partial_3\partial_7 - (\lambda_{12}z_3 - 2\lambda_{14}z_5 - \lambda_{16}z_7)\partial_1 - \tfrac{5}{3}\lambda_{12}z_5\partial_3 - \tfrac{4}{3}\lambda_{12}z_7\partial_5 \\
&\quad + (\lambda_8 z_5 + 2\lambda_{10}z_7)\partial_7 - \tfrac{1}{6}\lambda_{12}z_1^2 + 4\lambda_{14}z_1z_3 + 3\lambda_{16}z_1z_5 + 2\lambda_{18}z_1z_7 \\
&\quad - (\tfrac{1}{2}\lambda_4\lambda_{12} - \tfrac{15}{2}\lambda_{16})z_3^2 + (2\lambda_4\lambda_{14} + 12\lambda_{18})z_3z_5 + \lambda_4\lambda_{16}z_3z_7 \\
&\quad - (\tfrac{5}{6}\lambda_8\lambda_{12} - 2\lambda_6\lambda_{14} - \tfrac{9}{2}\lambda_4\lambda_{16})z_5^2 + (2\lambda_6\lambda_{16} + 6\lambda_4\lambda_{18})z_5z_7 \\
&\quad - (\tfrac{2}{3}\lambda_{12}^2 - \tfrac{3}{2}\lambda_8\lambda_{16} - 4\lambda_6\lambda_{18})z_7^2 - 2\lambda_{10}, \\
H_{12} &= \partial_5\partial_7 - (\tfrac{2}{3}\lambda_{14}z_3 - 3\lambda_{16}z_5 - 2\lambda_{18}z_7)\partial_1 - (\tfrac{10}{9}\lambda_{14}z_5 - \lambda_{16}z_7)\partial_3 - \tfrac{14}{9}\lambda_{14}z_7\partial_5 \\
&\quad + \lambda_{12}z_7\partial_7 - \tfrac{1}{9}\lambda_{14}z_1^2 + 5\lambda_{16}z_1z_3 + 4\lambda_{18}z_1z_5 - (\tfrac{1}{3}\lambda_4\lambda_{14} - 9\lambda_{18})z_3^2 \\
&\quad + 3\lambda_4\lambda_{16}z_3z_5 + 2\lambda_4\lambda_{18}z_3z_7 - (\tfrac{5}{9}\lambda_8\lambda_{14} - 3\lambda_6\lambda_{16} - 6\lambda_4\lambda_{18})z_5^2 \\
&\quad + (\lambda_8\lambda_{16} + 4\lambda_6\lambda_{18})z_5z_7 - (\tfrac{7}{9}\lambda_{12}\lambda_{14} - \lambda_{10}\lambda_{16} - 3\lambda_8\lambda_{18})z_7^2 - \lambda_{12}, \\
H_{14} &= \tfrac{1}{2}\partial_7^2 - (\tfrac{1}{3}\lambda_{16}z_3 - 4\lambda_{18}z_5)\partial_1 - (\tfrac{5}{9}\lambda_{16}z_5 - 2\lambda_{18}z_7)\partial_3 - \tfrac{7}{9}\lambda_{16}z_7\partial_5 - \tfrac{1}{18}\lambda_{16}z_1^2 \\
&\quad + 6\lambda_{18}z_1z_3 - \tfrac{1}{6}\lambda_4\lambda_{16}z_3^2 + 4\lambda_4\lambda_{18}z_3z_5 - (\tfrac{5}{18}\lambda_8\lambda_{16} - 4\lambda_6\lambda_{18})z_5^2 \\
&\quad + 2\lambda_8\lambda_{18}z_5z_7 - (\tfrac{7}{18}\lambda_{12}\lambda_{16} - 2\lambda_{10}\lambda_{18})z_7^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_{14}.
\end{aligned}
$$

§ 6. Приложение: операторы дифференцирования для рода $g = 4$

Напомним, что $\mathcal{F}$ — поле гиперэллиптических функций рода g. В этом параграфе мы изучаем задачу построения алгебры Ли дифференцирований поля $\mathcal{F}$, т. е. задачу нахождения $3g$ независимых дифференциальных операторов $\mathcal{L}$, таких, что $\mathcal{L}\mathcal{F} \subset \mathcal{F}$. Постановку этой задачи, а также общий подход к ее решению можно найти в работах [15], [16]. Обзор представлен в [7]. В [18], [5], [14] явное решение этой задачи получено в случаях $g = 1, 2, 3$. Здесь мы даем явный ответ в случае рода $g = 4$.

Введем кольцо функций $\mathcal{R}_\varphi$. Образующими этого градуированного кольца над $\mathbb{Q}[\lambda]$ являются функции $\psi_{k_1\dots k_n} = -\partial_{k_1}\cdots\partial_{k_n}\ln\varphi$, где $n \geqslant 2$, $k_s \in \{1, 3, \dots, 2g-1\}$, и $\operatorname{wt}\psi_{k_1\dots k_n} = k_1 + \ldots + k_n$, $\operatorname{wt}\lambda_k = k$. Мы вводим операторы

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= L_0 - z_1\partial_1 - 3z_3\partial_3 - 5z_5\partial_5 - 7z_7\partial_7, \\
\mathcal{L}_2 &= L_2 - \psi_1\partial_1 + \tfrac{4}{3}\lambda_4 z_3\partial_1 - (z_1 - \tfrac{8}{9}\lambda_4 z_5)\partial_3 - (3z_3 - \tfrac{4}{9}\lambda_4 z_7)\partial_5 - 5z_5\partial_7, \\
\mathcal{L}_4 &= L_4 - \psi_3\partial_1 - \psi_1\partial_3 - 2\lambda_6 z_3\partial_1 - (\lambda_4 z_3 - \tfrac{4}{3}\lambda_6 z_5)\partial_3 - (z_1 + 3\lambda_4 z_5 - \tfrac{2}{3}\lambda_6 z_7)\partial_5 \\
&\qquad - (3z_3 + 5\lambda_4 z_7)\partial_7, \\
\mathcal{L}_6 &= L_6 - \psi_5\partial_1 - \psi_3\partial_3 - \psi_1\partial_5 + \tfrac{5}{3}\lambda_8 z_3\partial_1 + \tfrac{16}{9}\lambda_8 z_5\partial_3 \\
&\qquad - (\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5 - \tfrac{8}{9}\lambda_8 z_7)\partial_5 - (z_1 + 3\lambda_4 z_5 + 4\lambda_6 z_7)\partial_7, \\
\mathcal{L}_8 &= L_8 - \psi_7\partial_1 - \psi_5\partial_3 - \psi_3\partial_5 - \psi_1\partial_7 + (\tfrac{4}{3}\lambda_{10}z_3 - \lambda_{12}z_5)\partial_1 + \tfrac{20}{9}\lambda_{10}z_5\partial_3 \\
&\qquad - (\lambda_8 z_5 - \tfrac{10}{9}\lambda_{10}z_7)\partial_5 - (\lambda_4 z_3 + 2\lambda_6 z_5 + 3\lambda_8 z_7)\partial_7,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{10} &= L_{10} - \psi_7\partial_3 - \psi_5\partial_5 - \psi_3\partial_7 + (\lambda_{12}z_3 - 2\lambda_{14}z_5 - \lambda_{16}z_7)\partial_1 \\
&\qquad + \tfrac{5}{3}\lambda_{12}z_5\partial_3 + \tfrac{4}{3}\lambda_{12}z_7\partial_5 - (\lambda_8 z_5 + 2\lambda_{10}z_7)\partial_7, \\
\mathcal{L}_{12} &= L_{12} - \psi_7\partial_5 - \psi_5\partial_7 + (\tfrac{2}{3}\lambda_{14}z_3 - 3\lambda_{16}z_5 - 2\lambda_{18}z_7)\partial_1 \\
&\qquad + (\tfrac{10}{9}\lambda_{14}z_5 - \lambda_{16}z_7)\partial_3 + \tfrac{14}{9}\lambda_{14}z_7\partial_5 - \lambda_{12}z_7\partial_7, \\
\mathcal{L}_{14} &= L_{14} - \psi_7\partial_7 + (\tfrac{1}{3}\lambda_{16}z_3 - 4\lambda_{18}z_5)\partial_1 + (\tfrac{5}{9}\lambda_{16}z_5 - 2\lambda_{18}z_7)\partial_3 + \tfrac{7}{9}\lambda_{16}z_7\partial_5.
\end{aligned}$$

Обозначим алгебру Ли с этими образующими через $\mathscr{L}_{\mathcal{L}}$.

Теорема 6.1. *Если функция φ удовлетворяет системе уравнений теплопроводности в неголономном репере для рода 4, то алгебра $\mathscr{L}_{\mathcal{L}}$ является алгеброй дифференцирований кольца $\mathcal{R}_\varphi$.*

Доказательство следует из доказательства теоремы 5.9 в [17].

Следствие 6.2. *Для $g = 4$ алгебра $\mathscr{L}_{\mathcal{L}}$ при $\varphi = \sigma$ является алгеброй дифференцирований поля $\mathcal{F}$.*

Положим

$$\begin{aligned}
& w_{0,1} = \psi_1, \quad w_{0,3} = 3\psi_3, \quad w_{2k,5} = 5\psi_5, \quad w_{0,7} = 7\psi_7, \\
& w_{2,1} = \tfrac{1}{2}\psi_{111} + \psi_3 - \tfrac{7}{9}\lambda_4 z_1, \\
& w_{2,3} = \tfrac{1}{2}\psi_{113} - \tfrac{4}{3}\lambda_4\psi_1 + 3\psi_5 + (3\lambda_8 - \tfrac{4}{3}\lambda_4^2)z_3, \\
& w_{2,5} = \tfrac{1}{2}\psi_{115} - \tfrac{8}{9}\lambda_4\psi_3 + 5\psi_7 + (5\lambda_{12} - \tfrac{8}{9}\lambda_4\lambda_8)z_5, \\
& w_{2,7} = \tfrac{1}{2}\psi_{117} - \tfrac{4}{9}\lambda_4\psi_5 + (7\lambda_{16} - \tfrac{4}{9}\lambda_4\lambda_{12})z_7, \\
& w_{4,1} = \psi_{113} + \psi_5 - \tfrac{2}{3}\lambda_6 z_1 + \lambda_8 z_3, \\
& w_{4,3} = \psi_{133} - 2\lambda_6\psi_1 + \lambda_4\psi_3 + 3\psi_7 + \lambda_8 z_1 + (6\lambda_{10} - 2\lambda_4\lambda_6)z_3 + 3\lambda_{12}z_5, \\
& w_{4,5} = \psi_{135} - \tfrac{4}{3}\lambda_6\psi_3 + 3\lambda_4\psi_5 + 3\lambda_{12}z_3 + (10\lambda_{14} - \tfrac{4}{3}\lambda_6\lambda_8)z_5 + 5\lambda_{16}z_7, \\
& w_{4,5} = \psi_{137} - \tfrac{2}{3}\lambda_6\psi_5 + 5\lambda_4\psi_7 + 5\lambda_{16}z_5 + (14\lambda_{18} - \tfrac{2}{3}\lambda_6\lambda_{12})z_7, \\
& w_{6,1} = \tfrac{1}{2}\psi_{133} + \psi_{115} + \psi_7 - \tfrac{5}{9}\lambda_8 z_1 + 2\lambda_{10}z_3 + \lambda_{12}z_5, \\
& w_{6,3} = \tfrac{1}{2}\psi_{333} + \psi_{135} - \tfrac{5}{3}\lambda_8\psi_1 + \lambda_4\psi_5 + 2\lambda_{10}z_1 - (\tfrac{5}{3}\lambda_4\lambda_8 - 9\lambda_{12})z_3 \\
& \qquad\quad + 6\lambda_{14}z_5 + 3\lambda_{16}z_7, \\
& w_{6,5} = \tfrac{1}{2}\psi_{335} + \psi_{155} - \tfrac{16}{9}\lambda_8\psi_3 + 2\lambda_6\psi_5 + 3\lambda_4\psi_7 + \lambda_{12}z_1 + 6\lambda_{14}z_3 \\
& \qquad\quad + (3\lambda_4\lambda_{12} - \tfrac{16}{9}\lambda_8^2 + 15\lambda_{16})z_5 + 10\lambda_{18}z_7, \\
& w_{6,7} = \tfrac{1}{2}\psi_{337} + \psi_{157} - \tfrac{8}{9}\lambda_8\psi_5 + 4\lambda_6\psi_7 + 3\lambda_{16}z_3 + 10\lambda_{18}z_5 - (\tfrac{8}{9}\lambda_8\lambda_{12} - 5\lambda_4\lambda_{16})z_7, \\
& w_{8,1} = \psi_{135} + \psi_{117} - \tfrac{4}{9}\lambda_{10}z_1 + 3\lambda_{12}z_3 + 2\lambda_{14}z_5 + \lambda_{16}z_7, \\
& w_{8,3} = \psi_{335} + \psi_{137} - \tfrac{4}{3}\lambda_{10}\psi_1 + \lambda_4\psi_7 \\
& \qquad\quad + 3\lambda_{12}z_1 - (\tfrac{4}{3}\lambda_4\lambda_{10} - 12\lambda_{14})z_3 + (\lambda_4\lambda_{12} + 9\lambda_{16})z_5 + 6\lambda_{18}z_7, \\
& w_{8,5} = \psi_{355} + \psi_{157} + \lambda_{12}\psi_1 - \tfrac{20}{9}\lambda_{10}\psi_3 + \lambda_8\psi_5 + 2\lambda_6\psi_7 + 2\lambda_{14}z_1 \\
& \qquad\quad + (\lambda_4\lambda_{12} + 9\lambda_{16})z_3 - (\tfrac{20}{9}\lambda_8\lambda_{10} - 2\lambda_6\lambda_{12} - 6\lambda_4\lambda_{14} - 20\lambda_{18})z_5 + 6\lambda_4\lambda_{16}z_7, \\
& w_{8,7} = \psi_{357} + \psi_{177} - \tfrac{10}{9}\lambda_{10}\psi_5 + 3\lambda_8\psi_7 \\
& \qquad\quad + \lambda_{16}z_1 + 6\lambda_{18}z_3 + 3\lambda_4\lambda_{16}z_5 - (\tfrac{10}{9}\lambda_{10}\lambda_{12} - 4\lambda_6\lambda_{16} - 10\lambda_4\lambda_{18})z_7, \\
& w_{10,1} = \tfrac{1}{2}\psi_{155} + \psi_{137} - \tfrac{1}{3}\lambda_{12}z_1 + 4\lambda_{14}z_3 + 3\lambda_{16}z_5 + 2\lambda_{18}z_7,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_{10,3} &= \tfrac{1}{2}\psi_{355} + \psi_{337} - \lambda_{12}\psi_1 + 4\lambda_{14}z_1 - (\lambda_4\lambda_{12} - 15\lambda_{16})z_3 \\
&\qquad + (2\lambda_4\lambda_{14} + 12\lambda_{18)}z_5 + \lambda_4\lambda_{16}z_7, \\
w_{10,5} &= \tfrac{1}{2}\psi_{555} + \psi_{357} + 2\lambda_{14}\psi_1 - \tfrac{5}{3}\lambda_{12}\psi_3 + \lambda_8\psi_7 + 3\lambda_{16}z_1 + (2\lambda_4\lambda_{14} + 12\lambda_{18})z_3 \\
&\qquad - (\tfrac{5}{3}\lambda_8\lambda_{12} - 4\lambda_6\lambda_{14} - 9\lambda_4\lambda_{16})z_5 + (2\lambda_6\lambda_{16} + 6\lambda_4\lambda_{18})z_7, \\
w_{10,7} &= \tfrac{1}{2}\psi_{557} + \psi_{377} + \lambda_{16}\psi_1 - \tfrac{4}{3}\lambda_{12}\psi_5 + 2\lambda_{10}\psi_7 + 2\lambda_{18}z_1 + \lambda_4\lambda_{16}z_3 \\
&\qquad + (2\lambda_6\lambda_{16} + 6\lambda_4\lambda_{18})z_5 - (\tfrac{4}{3}\lambda_{12}^2 - 3\lambda_8\lambda_{16} - 8\lambda_6\lambda_{18})z_7, \\
w_{12,1} &= \psi_{157} - \tfrac{2}{9}\lambda_{14}z_1 + 5\lambda_{16}z_3 + 4\lambda_{18}z_5, \\
w_{12,3} &= \psi_{357} - \tfrac{2}{3}\lambda_{14}\psi_1 + 5\lambda_{16}z_1 - (\tfrac{2}{3}\lambda_4\lambda_{14} - 18\lambda_{18})z_3 + 3\lambda_4\lambda_{16}z_5 + 2\lambda_4\lambda_{18}z_7, \\
w_{12,5} &= \psi_{557} + 3\lambda_{16}\psi_1 - \tfrac{10}{9}\lambda_{14}\psi_3 + 4\lambda_{18}z_1 \\
&\qquad + 3\lambda_4\lambda_{16}z_3 - (\tfrac{10}{9}\lambda_8\lambda_{14} - 6\lambda_6\lambda_{16} - 12\lambda_4\lambda_{18})z_5 + (\lambda_8\lambda_{16} + 4\lambda_6\lambda_{18})z_7, \\
w_{12,7} &= \psi_{577} + 2\lambda_{18}\psi_1 + \lambda_{16}\psi_3 - \tfrac{14}{9}\lambda_{14}\psi_5 + \lambda_{12}\psi_7 + 2\lambda_4\lambda_{18}z_3 \\
&\qquad + (\lambda_8\lambda_{16} + 4\lambda_6\lambda_{18})z_7 - (\tfrac{14}{9}\lambda_{12}\lambda_{14} - 2\lambda_{10}\lambda_{16} - 6\lambda_8\lambda_{18})z_7, \\
w_{14,1} &= \tfrac{1}{2}\psi_{177} - \tfrac{1}{9}\lambda_{16}z_1 + 6\lambda_{18}z_3, \\
w_{14,3} &= \tfrac{1}{2}\psi_{377} - \tfrac{1}{3}\lambda_{16}\psi_1 + 6\lambda_{18}z_1 - \tfrac{1}{3}\lambda_4\lambda_{16}z_3 + 4\lambda_4\lambda_{18}z_5, \\
w_{14,5} &= \tfrac{1}{2}\psi_{577} + 4\lambda_{18}\psi_1 - \tfrac{5}{9}\lambda_{16}\psi_3 + 4\lambda_4\lambda_{18}z_3 - (\tfrac{5}{9}\lambda_8\lambda_{16} - 8\lambda_6\lambda_{18})z_5 + 2\lambda_8\lambda_{18}z_7, \\
w_{14,7} &= \tfrac{1}{2}\psi_{777} + 2\lambda_{18}\psi_3 - \tfrac{7}{9}\lambda_{16}\psi_5 + 2\lambda_8\lambda_{18}z_5 - (\tfrac{7}{9}\lambda_{12}\lambda_{16} - 4\lambda_{10}\lambda_{18})z_7.
\end{aligned}
$$

Мы получаем для рода $g = 4$ теорему, аналогичную теоремам 4.1, 4.2 и 4.3 из [17]:

Теорема 6.3. *Для $g = 4$ решение φ системы уравнений теплопроводности (6) дает решение $(\psi_1, \psi_3, \psi_5, \psi_7) = (\partial_1 \ln\varphi, \partial_3 \ln\varphi, \partial_5 \ln\varphi, \partial_7 \ln\varphi)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений, которые мы называем аналогом уравнения Бюргерса для рода $g = 4$:*

$$
\mathcal{L}_{2k}(\psi_1, \psi_3, \psi_5, \psi_7) = (w_{2k,1}, w_{2k,3}, w_{2k,5}, w_{2k,7}), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \tag{13}
$$

Доказательство можно получить непосредственным вычислением.

Литература

[1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Уравнения теплопроводности в неголономном репере*, Функц. анализ и его прил., **38**:2 (2004), 12–27.

[2] Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях*, Мир, М., 1988.

[3] T. Shiota, *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., **83**:2 (1986), 333–382.

[4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Hyperelliptic Kleinian functions and applications*, in: *Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, v. 179, Adv. Math. Sci., Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 33, Providence, RI, 1997, 1–34.

[5] В. М. Бухштабер, *Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза*, в кн.: *Современные проблемы математики, механики и математической физики*. II, *Сборник статей*, *Тр. МИАН*, т. 294, МАИК, М., 2016, 191–215.

[6] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Multi-dimensional sigma-functions*, arXiv: 1208.0990.

[7] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski, D. V. Leykin, *σ-functions: Old and new results*, in: *Integrable Systems and Algebraic Geometry*, v. 2, LMS Lecture Note Series, vol. 459, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019, 175–214; arXiv: 1810.11079.

[8] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Полиномиальные алгебры Ли*, Функц. анализ и его прил., **36**:4 (2002), 18–34.

[9] V. I. Arnold, *Singularities of Caustics and Wave Fronts*, Mathematics and its Applications, vol. 62, Kluwer Academic Publisher Group, Dordrecht, 1990.

[10] J. C. Eilbeck, J. Gibbons, Y. Onishi, S. Yasuda, *Theory of heat equations for sigma functions*, arXiv: 1711.08395.

[11] H. F. Baker, *On the hyperelliptic sigma functions*, Amer. J. Math., **20**:4 (1898), 301–384.

[12] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, *Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications*, Rev. Math. Math. Phys., **10**:2 (1997), 3–120.

[13] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Reprint of 4th (1927) ed., Vol 2. Transcendental functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[14] E. Yu. Bunkova, *Differentiation of genus* 3 *hyperelliptic functions*, Eur. J. Math., **4**:1 (2018), 93–112; arXiv: 1703.03947.

[15] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Дифференцирование абелевых функций по параметрам*, УМН, **62**:4(376) (2007), 153–154.

[16] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств* (n,s)*-кривых*, Функц. анализ и его прил., **42**:4 (2008), 24–36.

[17] В. М. Бухштабер, Е. Ю. Бунькова, *Алгебры Ли операторов теплопроводности в неголономном репере*, Матем. заметки, **108**:1 (2020), 17–32.

[18] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., **92** (1882), 311–337.

В. М. Бухштабер
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: buchstab@mi-ras.ru

Е. Ю. Бунькова
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, Москва, Россия
E-mail: bunkova@mi-ras.ru

Поступила в редакцию
21 августа 2020 г.
После доработки
21 августа 2020 г.
Принята к публикации
3 сентября 2020 г.