Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

D. Auckly, L. Kapitanski, J. M. Speight, Geometry and analysis in nonlinear sigma models,
Algebra i Analiz, 2006, Volume 18, Issue 1, 3–33

https://www.mathnet.ru/eng/aa58

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.88
January 14, 2026, 09:56:08

Алгебра и анализ
Том 18 (2006), №1

ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИГМА-МОДЕЛЯХ

© Д. ОКЛИ, Л. КАПИТАНСКИЙ, ДЖ. М. СПЕЙТ

Конфигурационное пространство нелинейных сигма-моделей — пространство отображений из одного многообразия в другое. Работа представляет собой обзор результатов, полученных авторами для сигма-моделей со значениями в однородных пространствах. Она начинается с описания компонент связности, фундаментальной группы и когомологий конфигурационных пространств и их физической интерпретации. Приведенные топологические доказательства обобщаются на случай соболевских отображений. Мы используем преимущества описания отображений в однородные пространства при помощи плоских связностей; описаны приложения к гомотопической теории соболевских отображений и задаче минимизации функционалов Скирма и Фаддеева. В заключение мы обсуждаем возможности использования нашей техники для построения новых инвариантов многообразий.

Оглавление

§1. Введение 4
§2. Топология конфигурационных пространств 5
2.1. Компоненты связности конфигурационных пространств . . 6
2.2. Фундаментальная группа конфигурационного пространства 13
2.3. Рациональные когомологии конфигурационного пространства 20
2.4. Другие топологические результаты 22
§3. Функционалы и аналитическая техника 23
3.1. Локальное представление функций при помощи плоских связностей 24
3.2. Гомотопическая теория отображений с конечной энергией 25
3.3. Минимизирующие функционалы 29
Список литературы 32

Первый автор частично поддержан NSF, грант DMS–0204651. Второй автор частично поддержан NSF, грант DMS–0436403. Третий автор частично поддержан EPSRC, грант GR/R66982/01.

§1. Введение

Вариационные принципы давно используются при описании физических явлений. Классические траектории динамической системы можно построить как стационарные точки функционала действия. Квантовомеханическое поведение системы можно описать с помощью лагранжева или гамильтонова формализма. В лагранжевом подходе используются интегралы по траекториям от экспоненты функционала действия. Такое описание служит мощным источником идей для построения физических моделей и развития математических методов. Гамильтонова точка зрения лучше понята с математической точки зрения, хотя и в этом случае остаются открытые проблемы [28].

Простейшая задача, изученная с помощью вариационного принципа — движения точечной частицы на конфигурационном многообразии. Статические конфигурации — это критические точки потенциальной энергии; общие классические траектории описываются системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений — уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала действия. Более сложный случай связан с изучением полей таких, как электромагнитное поле. Поле представляет собой вектор-функцию на многообразии или, более общим образом, сечение подходящего векторного расслоения. Классическая динамика поля задается системой, вообще говоря, нелинейных уравнений в частных производных (уравнений Максвелла для линейных расслоений со структурной группой $U(1)$ или уравнений Янга–Миллса для электро-слабых взаимодействий со структурной группой $SU(2) \times U(1)$). Эти уравнения также являются уравнениями Эйлера–Лагранжа для подходящих функционалов. Квантовое поведение этих систем описывает квантовая теория поля. Физики в настоящее время часто говорят более осторожно об „эффективных теориях поля“ [32]; другими словами, они допускают, что хотя квантовая теория поля дает очень точные предсказания, она, возможно, не является фундаментальной теорией. В определенном пределе физическое поведение системы может быть с большой точностью описано с помощью теоретико-полевой модели; в другом пределе точное описание может даваться какой-либо другой моделью. Естественно ожидать, что в подходящем пределе значения физических полей будут близки к критическому многообразию потенциальной энергии. Если потенциальная энергия инвариантна относительно действия группы, это критическое многообразие будет объединением некоторого множества орбит этой группы. Как хорошо известно, орбита гладкого группового действия гомеоморфна пространству классов смежности G/H. В такой ситуации простейший объект — это

множество отображений заданного многообразия в многообразие критических точек потенциальной энергии или в однородное пространство. Такая постановка задачи и приводит к изучению нелинейных сигма-моделей.

Нелинейная сигма-модель — это теоретико-полевая модель, конфигурационное пространство которой состоит из отображений из заданного многообразия M (играющего роль физического пространства) в многообразие значений N [6]. Использование техники теории многообразий позволяет изучить поведение сигма-моделей; с другой стороны, изучение сигма-моделей может оказаться полезным при изучении геометрии многообразий.

В этой работе мы рассматриваем геометрические и аналитические методы, которые оказались полезными при изучении двух специальных нелинейных сигма-моделей. В §2 рассматривается топология соответствующих конфигурационных пространств. В §3 обсуждается связанная с ними аналитическая техника.

§2. Топология конфигурационных пространств

Математические трудности при изучении нелинейных сигма-моделей связаны с тем, что пространство значений не является линейным или выпуклым пространством. Топология пространства значений позволяет ввести различные типы ограничений при постановке вариационной задачи. Эти ограничения являются естественной составляющей самой модели. Например, часто рассматривают задачу минимизации функционала энергии в заданном гомотопическом классе отображений. Если гомотопический класс не фиксирован, то минимум функционала может достигаться на тривиальном постоянном отображении.

В действительности можно рассматривать несколько различных, но связанных друг с другом конфигурационных пространств. Мы сосредоточим свое внимание на двух общих типах конфигурационных пространств: пространствах отображений в группу Ли и в сферу S^2. Пусть M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие и G — произвольная группа Ли. Первое из рассматриваемых нами конфигурационных пространств — пространство непрерывных отображений $M \to G$, переводящих отмеченную точку базы $x_0 \in M$ в единичный элемент $\mathbf{1} \in G$. Это пространство мы обозначим G^M. Второе интересующее нас пространство — пространство непрерывных отображений $(S^2)^M$.

В этом параграфе мы наделяем конфигурационные пространства компактно-открытой топологией. На практике более полезной является, по-видимому, соболевская топология, зависящая от выбора функционала энергии. Вопрос о распространении доказательств, основанных на алгебраической топологии, на соболевские отображения представляет отдельный интерес; мы рассмотрим его в следующем параграфе. Изучение алгебраической топологии конфигурационных пространств мотивировано физической интерпретацией сигма-моделей. Более подробную физическую и геометрическую интерпретацию топологических результатов этого параграфа можно найти в [5].

2.1. Компоненты связности конфигурационных пространств. Модель Скирма изучалась в связи с различными физическими задачами. Одно из ее применений — моделирование нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре атома. Мы предполагаем, что многообразие M — это пространство $\mathbb{R}^3$ (это разумное предположение при описании атомного ядра).

Рассматриваются поля со значениями в группе $\mathrm{Sp}(1)$ единичных кватернионов. Функционал энергии — интеграл от квадрата градиента поля; таким образом, для отображений с конечной энергией градиент поля имеет конечную L^2-норму. Естественно поэтому предположить, что поля стремятся к постоянному значению при $|\mathbf{x}| \to \infty$, где $\mathbf{x}$ обозначает положение в пространстве. Без ограничения общности можно считать, что это предельное значение есть 1. Таким образом, с учетом наложенных граничных условий конфигурационное пространство — это $\mathrm{Sp}(1)^{S^3}$ — пространство отображений из сферы S^3 в $\mathrm{Sp}(1)$, сохраняющих отмеченные точки. Заметим, что топологически $\mathrm{Sp}(1)$ совпадает с S^3. Гомотопическая классификация отображений сферы S^3 в себя дается целочисленной степенью отображения. Отображение с минимальной энергией степени 0 — это постоянное отображение, или вакуум, по терминологии физиков.

Линеаризация уравнений поля в окрестности вакуума приводит к волновому уравнению для поля со значениями в $\mathfrak{sp}(1) \cong \mathbb{R}^3$. Волновые решения этого уравнения можно отождествить с волновыми функциями π^+, π^- и π^0-мезонов, обмен которыми приводит к сильным взаимодействиям между нуклонами. После квантования коэффициенты Фурье общего решения волнового уравнения переходят в пионные операторы рождения-уничтожения. Частицы такого типа соответствуют описанию квантовой модели в рамках теории возмущений; в большинстве теорий (например, в квантовой электродинамике, описывающей электроны, позитроны и фотоны) это единственные существующие частицы. По поводу введения в квантово-полевую теорию возмущений см. [24]. Модель Скирма особенно интересна в силу

того, что в ней присутствуют дополнительные частицеподобные возбуждения, отсутствующие в рамках теории возмущений.

Протон и нейтрон возникают в этой модели как решения с минимальной энергией степени 1. Более точно, они представляют собой квантовые состояния с минимальной энергией, построенные с помощью классических решений с минимальной энергией степени 1. Какие из этих решений следует отождествить с протоном, а какие — с нейтроном — вопрос соглашения, поскольку модель описывает только сильные взаимодействия, которые нечувствительны к разнице между ними (на физическом языке, модель имеет изотопическую симметрию). Таким образом, основное состояние в секторе отображений степени 1 представляет собой статический нуклон. Применяя к этому состоянию преобразования Лоренца, мы получаем движущийся нуклон. Состояния с более высокой энергией составлены из нуклона и некоторого числа пионов, причем энергия возбужденного состояния пропорциональна числу пионов. Существует фундаментальная разница между пертурбативными частицами (пионами) и топологическими солитонами (нуклонами). Как мы вскоре покажем, число нуклонов дается степенью отображений, принадлежащих сектору, на котором сосредоточена соответствующая квантово-полевая волновая функция. Число пионов соответствует положению этой волновой функции на одном из собственных уровней энергии, аналогичных уровням энергии простого гармонического осциллятора. Описанная схема называется квазиклассическим квантованием; она подробно описана в [26] для несколько более простого случая по сравнению с моделью Скирма.

Вернемся к физической интерпретации степени. Квантовые состояния, связанные с классическими полевыми конфигурациями минимальной энергии степени B описывают связанные состояния B нуклонов, т.е. ядра с атомным весом B. Если рассматривать отображения минимальной энергии степени 1 как нуклоны, они соответствуют некоторому „размазыванию“ частиц в пространстве. Существует несколько способов определить центр такой частицы. Можно считать, что он совпадает с максимумом плотности энергии или с максимумом плотности числа частиц (последняя представляет собой внутреннее произведение формы объема в $\mathbb{R}^3$ на обратный образ формы объема на $\mathrm{Sp}(1)$). Еще один простой и удобный выбор — считать, что центр частицы — это точка, в которой значение поля максимально удалено от его предельного значения на бесконечности. Другими словами, мы считаем, что центр — точка, переходящая в $-1 \in \mathrm{Sp}(1)$. Можно считать, что поле представляет собой гладкий „горб“ в окрестности этой точки. Поле может также выглядеть как несколько горбов, соответствующих разным

частицам. С учетом ориентации положительно ориентированные горбы соответствуют частицам, а отрицательно ориентированные — античастицам. Степень может быть вычислена как число прообразов (с учетом знаков) точки общего положения (регулярного значения). Поскольку эти прообразы соответствуют нуклонам и антинуклонам, мы видим, что степень отображения совпадает с полным числом нуклонов в данной конфигурации поля. (В действительности квантовые состояния, построенные с помощью классических конфигураций с минимальной энергией степени 1, соответствуют классу элементарных частиц, называемых барионами; их возбужденные состояния („резонансы“) довольно экзотичны.) Компоненты связности конфигурационного пространства состоят из всех отображений фиксированной степени. Заметим, что рождение/уничтожение нуклон-антинуклонных пар не меняет компоненты связности. Полезно построить функционал, условие конечности которого автоматически заставляет полевую конфигурацию оставаться в заданной компоненте связности. Это соответствует закону сохранения: полное число нуклонов не меняется. Именно эти соображения привели физиков к вопросу о гомотопической классификации отображений. В случае, когда пространство значений — группа Ли, имеет место следующий результат [1].

Предложение 1. *Пусть G — компактная группа Ли и M — связное замкнутое трехмерное многообразие. Множество компонент связности $G^M/(G^M)_0$ пространства G^M изоморфно $H^3(M;\pi_3(G)) \times H^1(M;H_1(G))$.*

В том случае, когда пространство значений поля — группа Ли, конфигурационное пространство имеет структуру топологической группы; таким образом, множество компонент связности само имеет структуру группы. Было бы интересно получить ее явное описание. Причина, по которой предложение 1 описывает компоненты связности конфигурационного пространства лишь как абстрактное множество, состоит в том, что в работе [1] построена только короткая точная последовательность

$$0 \to H^3(M;\pi_3(G)) \to G^M/(G^M)_0 \to H^1(M;H_1(G)) \to 0.$$

Чтобы описать групповую структуру на множестве компонент связности, нужно иметь дополнительную информацию об этой последовательности (например, является ли она расщепляющейся). Это один из по-прежнему открытых вопросов; имеются аналогичные результаты для свободных отображений [1].

Гомотопическая классификация свободных отображений и отображений с отмеченной точкой из трехмерного многообразия (или трехмерного клеточного комплекса) в сферу S^2 была получена Понтрягиным много лет назад [25].

Теорема 2. *Пусть M — замкнутое связное ориентируемое трехмерное многообразие и μ_{S^2} — образующая группы $H^2(S^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. С любым отображением $\varphi : M \to S^2$ с отмеченной точкой можно связать класс когомологий $\varphi^*\mu_{S^2} \in H^2(M;\mathbb{Z})$. Любой двумерный класс когомологий может быть реализован с помощью подходящего отображения; отображения с разными когомологическими классами лежат в разных компонентах связности $(S^2)^M$. Множество компонент связности с заданным классом когомологий $\alpha \in H^2(M)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством $H^3(M)/(2\alpha \smile H^1(M))$.*

Физическое описание, интерпретирующее степень отображения как полное число частиц и античастиц, которое мы привели выше, лежит в основе конструкции Понтрягина–Тома. Мы приведем описание этой конструкции, поскольку она полезна для интерпретации сформулированных выше теорем в общем случае.

Мы будем следовать хорошо известному эвристическому принципу: рассуждать с помощью теории пересечений и доказывать с помощью когомологий. Комбинация двойственности Пуанкаре и конструкции Понтрягина–Тома дает мощные средства для наглядного представления результатов алгебраической топологии. Пусть W — n-мерное гомологическое многообразие. Двойственность Пуанкаре — это изоморфизм $H^k(W) \cong H_{n-k}(W)$. Полезно считать, что k-я группа когомологий двойственна k-й группе гомологий; это эвристическое представление недалеко от действительности. Объединяя этот принцип с двойственностью Пуанкаре, мы заключаем, что с каждым k-мерным классом когомологий однозначно связан $n-k$-мерный цикл (гомологический цикл коразмерности k); каноническое спаривание между k-циклом и обратным образом k-мерного коцикла есть индекс пересечения (с учетом кратностей) с соответствующим $n-k$-мерным циклом. Если рассматриваются гомологии и когомологии с коэффициентами в поле, это дает исчерпывающее описание, поскольку кручение отсутствует и соответствующая группа Ext тривиальна. Для других групп коэффициентов это описание дает правильный ответ с точностью до кручения. Конструкция Понтрягина–Тома связывает с каждым отображением $W \to S^k$ оснащенное k-мерное подмногообразие многообразия W; связанное с ним подмногообразие — это просто прообраз точки общего положения (регулярного значения). Конструкция оснащенного подмногообразия определена однозначно с точностью до кобордизма. Обратно, любое оснащенное подмногообразие порождает отображение $W \to S^k$, задаваемое с помощью экспоненциального отображения на слоях трубчатой окрестности подмногообразия, продолженного как постоянное отображение вне этой окрестности.

Таблица 1
Простые группы Ли

Группа G	Центр $Z(G)$	$H^*(G;\mathbb{Q})$
$A_n = \mathrm{SU}(n+1)$, $n \geqslant 2$	$\mathbb{Z}_{n+1}$	$\mathbb{Q}[x_3, x_5, \dots x_{2n+1}]$
$B_n = \mathrm{Spin}(2n+1)$, $n \geqslant 3$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Q}[x_3, x_7, \dots x_{4n-1}]$
$C_n = \mathrm{Sp}(n)$, $n \geqslant 1$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Q}[x_3, x_7, \dots x_{4n-1}]$
$D_n = \mathrm{Spin}(2n)$, $n \geqslant 4$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ for even n $\mathbb{Z}_4$ for odd n	$\mathbb{Q}[x_3, x_7, \dots x_{4n-5}, y_{2n-1}]$
E_6	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Q}[x_3, x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17}, x_{23}]$
E_7	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Q}[x_3, x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}, x_{35}]$
E_8	0	$\mathbb{Q}[x_3, x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47}, x_{59}]$
F_4	0	$\mathbb{Q}[x_3, x_{11}, x_{15}, x_{23}]$
G_2	0	$\mathbb{Q}[x_3, x_{11}]$

Рассмотрим сначала геометрическое описание компонент связности пространства отображений в группу G для компактных односвязных групп Ли. Любая такая группа — прямое произведение простых групп Ли. Все такие группы вместе с их центрами и рациональными группами когомологий перечислены в табл. 1. Рациональные кольца когомологий — свободные коммутативные алгебры с единицей, порожденные образующими, приведенными в таблице. Нижние индексы указывают степени образующих. В этом случае сомножитель $H^1(M; H_1(G))$ в формулировке предложения 1 тривиален и в случае, когда группа G проста и многообразие M ориентируемо и связно, множество компонент изоморфно $\mathbb{Z}$. Если группа G состоит из двух простых сомножителей и M ориентируемо и связно, $H^3(M; H_3(G)) \cong \mathbb{Z}^2$; эта группа задает числа частиц двух разных типов. Если M неориентируемо, то эта группа тривиальна. В действительности для неориентируемых многообразий подсчет числа частиц не имеет смысла, так как обход вокруг неориентируемой петли превращает частицу в античастицу.

Чтобы интерпретировать геометрически сомножитель $H^3(M; H_3(G))$ в формулировке предложения 1, мы воспользуемся формулой двойственности с универсальными коэффициентами, которая позволяет рассматривать элементы $H^3(M)$ как функционалы на $H_3(M)$. В силу двойственности Пуанкаре, мы можем отождествить $H_3(G)$ с $H^{\dim G-3}(G)$. Это позволяет интерпретировать элементы группы $H^3(M; H_3(G))$ как функции, сопоставляющие целое число любой паре, состоящей из 3-цикла в M и цикла коразмерности 3 в G. Любое отображение $u : M \to G$ порождает такую функцию, которая определяется как индекс пересечения образа 3-цикла в M и цикла коразмерности 3 в G. Это можно сформулировать еще и другим способом.

Зафиксируем тривиализацию нормального расслоения к циклу F коразмерности 3 в G. (Будем считать для простоты, что нормальное расслоение

к циклу F тривиально; это заведомо так вне подмножества коразмерности 2, см. [5].) Сопоставим отображению $u : M \to G$ (и паре из фундаментального цикла $[M]$ и цикла F коразмерности 3 в G) набор точек $u^{-1}(F)$. Точка имеет положительную ориентацию, если прямой образ ориентированного репера в этой точке имеет ту же ориентацию, что и слой тривиализованного нормального расслоения в ее образе. Обратно, любому набору ориентированных точек можно сопоставить отображение $u : M \to G$, переводящее отмеченную точку в единицу группы. А именно, пользуясь положительно или отрицательно ориентированным репером в каждой точке, мы можем построить диффеоморфизм замкнутой трубчатой окрестности любой точки на шар радиуса π в пространстве чисто мнимых кватернионов $\mathfrak{sp}(1)$. С помощью экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{sp}(1) \to \mathrm{Sp}(1)$, задаваемого формулой $\exp(x) = \cos(|x|) + \frac{\sin(|x|)}{|x|}x$, мы определяем отображение замкнутой трубчатой окрестности нашей точки в группу $\mathrm{Sp}(1)$. Построенное таким образом отображение можно продолжить на все M, отображая дополнение трубчатой окрестности в точку -1. Подправим наше отображение, умножив его на -1; таким образом, отмеченная точка перейдет в 1. Заметим, наконец, что группа $H_3(G)$ порождена образом $\mathrm{Sp}(1)$ при каноническом вложении, и, воспользовавшись этим каноническим вложением, мы можем продолжить наше отображение на группу G. Разумеется, мы предполагаем, что цикл F двойственен образу этой подгруппы.

Если группа G не предполагается простой, но компактна и односвязна, она есть прямое произведение простых групп; таким образом, отображение $M \to G$ задается набором отображений в сомножители этого прямого произведения и компоненты связности пространства отображений задаются прообразами подходящих циклов коразмерности 3, как описано выше. Если группа не предполагается односвязной, с произвольным отображением $u \in G^M$ можно связать элемент группы $H^1(M; H_1(G_0))$; этот элемент сопоставляет замкнутой петле в M замкнутую петлю в группе G_0 — ее образ при отображении u. Если u и v — два отображения, порождающие один и тот же элемент группы $H^1(M; H_1(G_0))$, отображение $u^{-1}v$ будет порождать тривиальный элемент и, таким образом, поднимается до отображения в универсальную накрывающую группу $\widetilde{G}$. Универсальная накрывающая компактной группы Ли — прямое произведение векторного пространства и компактной односвязной группы Ли и с точностью до гомотопии совпадает с компактной односвязной группой. Гомотопический класс поднятого отображения задается элементом группы $H^3(M; H_3(\widetilde{G}))$, как описано выше.

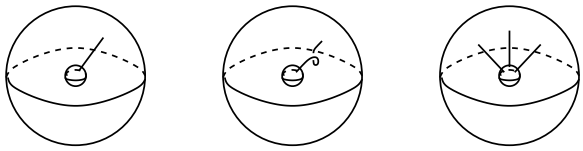

Рис. 1. Реализация Понтрягина–Тома отображений в S^2.

Зафиксируем отображение $\varphi : M \to S^2$ и обозначим $(S^2)^M_\varphi$ множество всех отображений $\psi \in (S^2)^M$, гомотопных φ. Конструкция Понтрягина–Тома и двойственность Пуанкаре приводят к красивому описанию множества компонент $(S^2)^M_\varphi$. Прообраз точки общего положения сферы S^2 двойствен по Пуанкаре множеству $\varphi^*\mu_{S^2}$. Этот прообраз представляет собой оснащенную петлю в M. Таким образом, отображение в сферу можно рассматривать как модель струноподобного возбуждения таким же образом, как отображение в группу может рассматриваться как модель частицеподобного возбуждения. Относительное число твистов оснащенной петли для другого отображения с тем же прообразом есть элемент группы $H^3(M;\mathbb{Z})/\langle 2\varphi^*\mu_{S^2}\rangle$. Чтобы прояснить ситуацию, мы отождествим S^2 с проективным пространством $\mathbb{CP}^1$ и рассмотрим несколько примеров. Рассмотрим отображения $\varphi_1, \varphi_1', \varphi_3 : \mathbb{CP}^1 \times S^1 \to \mathbb{CP}^1$, заданные формулами

$$\varphi_1([z:w],\lambda) = [z:w], \quad \varphi_1'([z:w],\lambda) = [\lambda z:w], \text{ и } \varphi_3([z:w],\lambda) = [z^3:w^3].$$

Мы можем рассматривать $\mathbb{CP}^1 \times S^1$ как произведение $S^2 \times [0,1]$ (сферический слой), в котором внутренняя и внешняя сферы ($S^2 \times \{0\}$ и $S^2 \times \{1\}$) отождествлены. Пользуясь этим соглашением, мы изобразили оснащенные одномерные многообразия, возникающие как прообразы точки общего положения, на рис. 1. На этом рисунке также указано оснащение (т.е. выбор сопутствующего репера). Первый вектор можно выбрать перпендикулярным плоскости рисунка, а второй получить как его векторное произведение с касательным вектором.

Может показаться, что с отображением в двумерную сферу связано корректно определенное число кручения (достаточно подсчитать число оборотов сопутствующего репера при обходе замкнутой петли). Однако в пространстве $\mathbb{CP}^1 \times S^1$ определен гомеоморфизм, задаваемый формулой $([z:w],\lambda) \mapsto ([\lambda z:w],\lambda))$, скручивающий двумерную сферу. Этот гомеоморфизм изменяет число оборотов сопутствующего репера, но не меняет относительного числа кручения. Причина, по которой относительное число кручения определено только с точностью до удвоенного класса когомологий $\varphi^*\mu_{S^2}$, объясняется на примере отображения φ_1 на рис. 2. В физике этот трюк (элементарное преобразование) известен как „ножницы Дирака“.

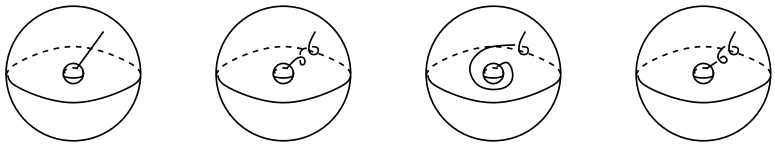

Рис. 2. Добавление $2d$ твистов.

Дирак использовал конфигурацию из двух гибких лент, натянутых на ножницы, чтобы иллюстрировать свойства частиц с полуцелым спином. Одна из любопытных ссылок по этому поводу — интернет-страница Хансена [19].

2.2. Фундаментальная группа конфигурационного пространства. Как мы видели, в типичной ситуации компоненты связности конфигурационного пространства соответствуют числу частиц в системе; другие топологические характеристики конфигурационного пространства можно использовать для учета дополнительных физических характеристик. Мы опишем ниже понятие статистики частиц и покажем, как можно использовать фундаментальную группу конфигурационного пространства для учета статистики топологических солитонов.

Напомним основное различие между бозонами и фермионами: в макроскопическом ансамбле идентичных бозонов произвольное число частиц может находиться в одном и том же состоянии, в то время как в ансамбле фермионов никакие две частицы не могут находиться в одинаковых состояниях. Примером бозонов являются фотоны, примером фермионов — электроны. Существует несколько теоретических моделей статистики частиц. В квантовой механике волновая функция многочастичного состояния симметрична относительно перестановки любой пары тождественных бозонов и антисимметрична относительно перестановки любой пары тождественных фермионов. В пертурбативной квантовой теории поля бозоны представляются с помощью квантовополевых операторов, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям, а фермионы — с помощью операторов, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям. Более точно, операторы рождения бозонов коммутируют друг с другом, а операторы рождения фермионов антикоммутируют. Однако в некоторых случаях фермионы появляются в рамках теории поля с чисто бозонными фундаментальными полями. Этот механизм появления фермионов целиком основан на топологических свойствах конфигурационного пространства теории.

Механизм появления фермионов иногда можно объяснить с помощью соображений симметрии. Симметрии классического конфигурационного пространства часто порождают симметрии пространства квантовых состояний.

Однако группа квантовых симметрий может отличаться от группы классических симметрий. Именно это различие можно использовать для объяснения появления фермионов [6, гл. 7]. Хорошо известный пример связан с вращающимся волчком. В этом случае классическая группа симметрии — группа $\mathrm{SO}(3)$, а квантовая группа симметрии (при некоторых способах квантования) — группа $\mathrm{SU}(2)$ [8, 27]. Другой хороший пример — электрон в поле магнитного монополя [5, гл. 7; 10, 33].

Если физическое пространство есть $\mathbb{R}^3$, так что пространство–время — обычное пространство Минковского, классическая симметрия относительно вращений порождает квантовые симметрии, связанные с представлениями спинорной группы. Эти представления нумеруются полуцелыми числами (половина числа клеток в диаграмме Юнга, задающей представление группы $\mathrm{SU}(2)$). Представления с целочисленным спином — точные представления группы вращений, а представления с полуцелым спином — нет. Теорема о связи спина со статистикой утверждает, что любая частица с полуцелым спином — фермион, а частица с целым спином — бозон.

Статистику составной частицы можно связать с четностью. Частица, состоящая из четного числа фермионов, — бозон, а частица, состоящая из нечетного числа фермионов, — фермион. Имея в виду это простое обстоятельство, рассмотрим пространство отображений из S^3 в $\mathrm{Sp}(1)$, сохраняющих отмеченные точки.

На приведенных ниже рисунках изображены некоторые нестягиваемые петли в этом конфигурационном пространстве. Петля в пространстве $\mathrm{Sp}(1)^{S^3}$ реализуется как отображение из $S^3 \times [0,1]$ в $\mathrm{Sp}(1)$. С таким отображением можно связать оснащенную петлю в $S^3 \times [0,1]$. Эта оснащенная петля есть прообраз стандартного репера в (тривиальном и тривиализованном) касательном расслоении над $\mathrm{Sp}(1)$ (над точкой общего положения). Обратно, по оснащенной петле в $S^3 \times [0,1]$ можно построить отображение $S^3 \times [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$, при котором слои замкнутой трубчатой окрестности отображаются в $\mathrm{Sp}(1)$ с помощью экспоненциального отображения (стабилизирующегося на границе), а дополнение к этой трубчатой окрестности переходит в единичный элемент. Эта конструкция в точности аналогична соответствию между ориентированными точками в S^3 и отображениями в $\mathrm{Sp}(1)$, описанному в предыдущем параграфе. Горизонтальное направление на рис. 3 и 4 соответствует параметру $t \in [0,1]$ в $S^3 \times [0,1]$. Диски изображают плоскость $x-y$, а координата z опущена. На рис. 3 показаны две копии типичной петли, реализующей элемент фундаментальной группы. На рис. 3 показан только первый вектор из сопутствующего репера; второй вектор получается как векторное произведение с касательным вектором к кривой, а третий задает z-направление. Легко видеть, что левая петля гомотопна

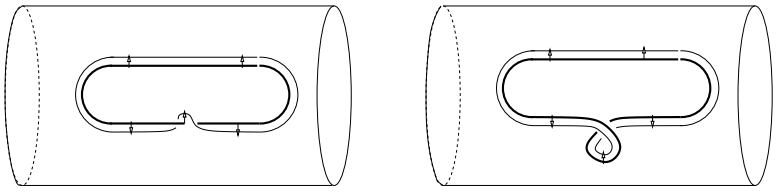

Рис. 3. Петля обмена

правой. Следуя нашей интерпретации прообразов точек при отображении $S^3 \to \mathrm{Sp}(1)$ как частицеподобных конфигураций, мы можем интерпретировать левую петлю как описание рождения нуклон-антинуклонной пары (на срезе петли слева прообраз точки $-\mathbf{1}$ пуст, т.е. нуклоны и антинуклоны отсутствуют; на срезе, сдвинутом немного вправо, точка $-\mathbf{1}$ имеет два противоположно ориентированных прообраза); далее, нуклон делает полный оборот (сопутствующий репер переворачивается) при движении среза дальше вправо, и, наконец, обе частицы аннигилируют (прообраз точки $-\mathbf{1}$ на срезе справа снова пуст). Второй рисунок описывает следующий процесс: рождается пара нуклон–антинуклон; затем рождается вторая пара; затем частицы обмениваются координатами без вращения (вторая нить снизу на левом срезе переходит в третью снизу на правом срезе, причем вектор, задающий оснащение, по-прежнему направлен вниз); после этого первый нуклон аннигилирует со вторым антинуклоном и, наконец, аннигилирует оставшаяся пара.

Заметим, что две частицы могут обменяться положениями двумя способами: они могут двигаться навстречу друг другу или к фиксированной точке. Если частицы двигаются навстречу друг другу, при обмене координатами они должны повернуться. Обмен координатами, изображенный на втором рисунке, происходит без вращения. Если представить себе частицы, как людей в комнате, они могут поменяться местами, идя в сторону, вперед/назад и снова в сторону, двигаясь в диаметрально противоположные стороны и глядя все время в одну точку (например, в дальний угол комнаты). Это обмен координатами без вращения, представленный на рис. 3. Этот обмен соответствует нетривиальному элементу группы $\pi_1(\mathrm{Sp}(1)^{S^3})$. Второй способ состоит в том, что люди двигаются по кругу в диаметрально противоположных точках, все время сохраняя направление движения, пока они не окажутся на месте партнера, смотря в противоположную сторону. Этот второй способ в действительности гомотопически тривиален. Так как оснащенные петли на рис. 3 не проходят через срезы $S^3 \times \{0, 1\}$, они реализуют стягиваемую петлю в конфигурационном пространстве.

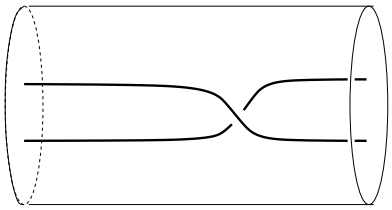

Рис. 4. Петля обмена степени 2

Оснащение петли можно задать, не рисуя третьего направления. Первый вектор сопутствующего репера выбирается перпендикулярно плоскости рисунка, второй есть векторное произведение первого с касательным вектором и третий соответствует не представленному на рисунке направлению оси z. Оснащение, полученное таким способом, называется стандартным (black board framing). Мы пользуемся стандартным оснащением на рис. 4. Пользуясь конструкцией Понтрягина–Тома, можно изобразить петли в других компонентах связности конфигурационного пространства. На рис. 4 представлена петля в компоненте отображений $S^3 \to \mathrm{Sp}(1)$ степени 2.

В действительности обменная петля, которую мы описали выше, имеет порядок 2 в группе $\pi_1(\mathrm{Sp}(1)^{S^3})$. Это можно показать следующим образом. Двукратный обход вокруг обменной петли есть граница пленки в конфигурационном пространстве. Так как проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ — результат отождествления точек на границе круга с помощью отображения степени 2, можно ожидать, что проективная плоскость вложена в конфигурационное пространство. В работе [30] Р. Соркин описывает такое вложение $f_{\mathrm{stat}} : \mathbb{R}P^2 \to \mathrm{Sp}(1)^{S^3}$. Мы кратко опишем эту изящную конструкцию.

Реализуем $\mathbb{R}P^2$ как двумерную сферу с отождествленными антиподальными точками. Добавляя, если нужно, нуклон-антинуклонные пары, мы можем считать, что исходная конфигурация содержит два нуклона. Мы можем поместить их центры в антиподальных точках сферы, пользуясь стандартными реперами, векторы которых параллельны координатным осям. Петля в конфигурационном пространстве, реализованная с помощью составной частицы, делающей полный оборот, стягиваема, если составная частица состоит из четного числа нуклонов и антинуклонов и нестягиваема, если их число нечетно. Это соображение лежит в основе метода Финкельштейна и Рубинштейна включения фермионных солитонов в модель Скирма [16].

Фундаментальные группы пространств отображений в группу Ли и в двумерную сферу вычислены в [5]. Эти результаты приведены ниже.

Теорема 3. *Пусть M — замкнутое, связное, ориентируемое трехмерное многообразие и G — произвольная группа Ли. Тогда*

$$\pi_1(G^M) \cong \mathbb{Z}_2^s \oplus H^2(M;\pi_3(G)).$$

Здесь s — число симплектических слагаемых в алгебре Ли группы G.

Теорема 4. *Пусть M замкнуто, связно и ориентируемо. Для любого $\varphi \in (S^2)^M$ фундаментальная группа пространства $(S^2)^M_\varphi$ есть*

$$\pi_1((S^2)^M_\varphi) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus H^2(M;\mathbb{Z}) \oplus \ker(2\varphi^*\mu_{S^2} \smile).$$

Отображение $2\varphi^*\mu_{S^2} \smile$: $H^1(M;\mathbb{Z}) \to H^3(M;\mathbb{Z})$ определено при помощи стандартного когомологического умножения.

Чтобы понять изоморфизм

$$\phi : \pi_1(G^M) \cong \mathbb{Z}_2^s \oplus H^2(M;\pi_3(G))$$

из теоремы 3, можно снова воспользоваться конструкцией Понтрягина–Тома. Петлю в $(G^M)_0$, отмеченная точка которой — постоянное отображение $u(x) = \mathbf{1}$, можно рассматривать как отображение $\gamma : M \times [0,1] \to G$ такое, что $\gamma(x,0) = \gamma(x,1) = \gamma(x_0,t) = \mathbf{1}$. Группа $\pi_3(G)$ порождена гомоморфным образом $\mathrm{Sp}(1)$. Пусть F — цикл коразмерности 3 в G, двойственный к фиксированной образующей $\pi_3(G)$ (как мы уже отмечали, нормальное расслоение $\nu(F)$ к такому циклу тривиально вне подмножества коразмерности 2). С отображением γ можно ассоциировать прообраз $\gamma^{-1}(F)$ этого цикла, снабженный оснащением, построенным как обратный образ произвольного репера в тривиализации $\nu(F)$. Обратно, по заданной оснащенной петле в $(M - p_0) \times (0,1)$ можно построить элемент группы $\pi_1(G^M)$. С помощью выбранного оснащения каждый слой в трубчатой окрестности петли можно отождествить с шаром радиуса π в $\mathfrak{sp}(1)$. Как и выше, с помощью экспоненциального отображения, умноженного на -1, можно построить отображение $\gamma : M \times [0,1] \to \mathrm{Sp}(1)$, которое в композиции с вложением $\mathrm{Sp}(1) \to G$ задает элемент группы $\pi_1(G^M)$.

Теперь мы в состоянии описать геометрический смысл изоморфизма в теореме 3. Для класса петель $[\gamma] \in (G^M)_0$ мы опишем изоморфизм $\phi(\gamma) = (\phi_1(\gamma), \phi_2(\gamma)) \in \mathbb{Z}_2^s \oplus H^2(M;\pi_3(G))$. Ограничимся случаем односвязных групп G и отождествим группу $\pi_3(G)$ с группой гомологий $H_3(G;\mathbb{Z}) \cong H^{\dim G-3}(G;\mathbb{Z})$. Элемент группы $H^2(M;\pi_3(G))$ можно интерпретировать как функцию, которая сопоставляет целое число паре, составленной из поверхности Σ в M и цикла F коразмерности 3. Пусть $\phi_2(\gamma)(\Sigma,F) = \#(\Sigma \times [0,1] \cap \gamma^{-1}(F))$. Заметим, что $\gamma^{-1}(F)$ наследует ориентацию из оснащения и ориентации M. С помощью двойственности Пуанкаре это можно сформулировать иначе: класс гомологий цикла $\gamma^{-1}(F)$ в $(M - p_0) \times (0,1)$

проектируется на элемент группы $H_1(M)$, двойственный элементу, порожденному $\phi_2(\gamma)$. Первая компонента изоморфизма $\varphi(\gamma)$ подсчитывает четность числа скручиваний оснащения.

Аналогичным образом мы можем описать смысл теоремы 4. Элемент группы $\pi_1((S^2)^M_\varphi)$ можно реализовать с помощью отображения $\gamma : M \times S^1 \to S^2$. Прообраз точки общего положения при этом отображении — двумерное подмногообразие; обозначим его Σ. По этим данным мы построим сейчас элемент группы $H^1(M;\mathbb{Z})$. С произвольным 1-циклом σ в M ассоциируем индекс пересечения Σ и $\sigma \times S^1$. Так как наша петля лежит в компоненте связности отображения φ, поверхность Σ параллельна прообразу точки общего положения при отображении φ. Отсюда следует, что элемент группы $H^1(M;\mathbb{Z})$ лежит в ядре отображения $2\varphi^*\mu_{S^2}\cup : H^1(M;\mathbb{Z}) \to H^3(M;\mathbb{Z})$. Выбрав любой элемент в этом ядре, мы можем построить петлю в $(S^2)^M_\varphi$ при помощи отображения $\mathfrak{q}$, которое мы сейчас определим. По построению $\mathfrak{q} : S^2 \times S^1 \to \mathrm{Sp}(1)$ задается формулой $\mathfrak{q}(x\mathbf{i}x^*, \lambda) = x\lambda x^*$. Легко проверить, что произвольный элемент сферы S^2 можно записать в виде $x\mathbf{i}x^*$ и что выражение $x\lambda x^*$ не зависит от произвола в выборе x. Построенную петлю можно перевести в γ с помощью подходящего отображения $u : M \times S^1 \to \mathrm{Sp}(1)$. Остающиеся гомотопические инварианты γ — это инварианты отображения u, которые мы описывали выше.

Чтобы дать некоторое представление о доказательствах этих результатов, мы приведем доказательство одного из ключевых утверждений, заимствованное из [5].

Предложение 5. *Точная последовательность*

$$0 \to \pi_4(G) \to \pi_1(G^M) \to H^2(M;\pi_3(G)) \to 0$$

расщепляется; ее расщепления задаются выбором Spin-структуры на M.

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение для $G = \mathrm{Sp}(1)$. Так как группа трехмерных спин-кобордизмов тривиальна, любое трехмерное многообразие получается из трехмерной сферы переклейкой по оснащенному зацеплению с четными числами самозацепления [22]. Такая переклейка индуцирует на M Spin-структуру. Пусть $M = S^3_L$ — такая переклейка; ориентируем зацепление и пусть $\{\mu_j\}_{j=1}^c$ — положительно ориентированные меридианы его компонент. Эти меридианы порождают группу $H_1(M) \cong H^2(M;\pi_3(\mathrm{Sp}(1)))$. (Последний изоморфизм — это двойственность Пуанкаре.) Определим расщепление нашей точной последовательности с

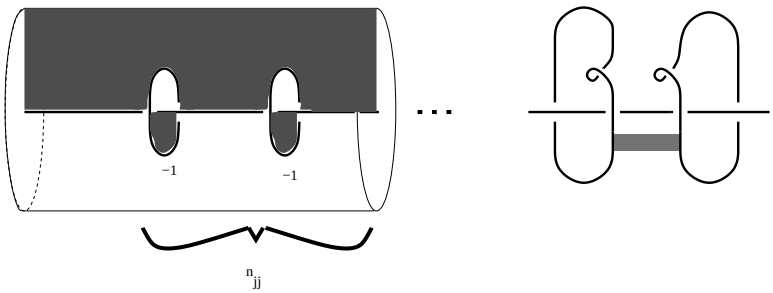

Рис. 5. 2-цикл

помощью отображения

$$s : H_1(M) \to \pi_1((\mathrm{Sp}(1))^M);$$
$$s(\mu_j) = PT\big(\mu_j \times \left\{\frac{1}{2}\right\},\ \textit{каноническое оснащение}\big).$$

Здесь PT — это конструкция Понтрягина–Тома, а каноническое оснащение строится следующим образом. Его первый вектор — это 0-оснащение на μ_j, рассматриваемом как незаузленное зацепление в S^3 (другими словами, индекс зацепления μ_j и кривой, полученной с помощью экспоненциального отображения к первому вектору, умноженному на достаточно малое число ϵ, равен нулю). Второй вектор строится как векторное произведение первого вектора и касательного вектора, а третий задает направление интервала $[0, 1]$. Проверим теперь, что это отображение согласовано с соотношениями в группе $H_1(M)$. Пусть $Q_L = (n_{jk})$ — матрица, построенная из чисел зацепления, так что $H_1(M) = \langle \mu_j | n_{jk}\mu_j = 0\rangle$. 2-цикл, задающий соотношения $n_{jk}\mu_j = 0$, можно реализовать как поверхность Зейферта, связанную с j-й компонентой зацепления, если рассматривать ее как узел в S^3. Пусть Σ_j — поверхность Зейферта. Тогда нужный нам 2-цикл есть $\widehat{\Sigma}_j = (\Sigma_j - \overset{\circ}{N}(L)) \cup \sigma_j$, где $\overset{\circ}{N}(L)$ — открытая трубчатая окрестность зацепления L. Здесь σ_j — поверхность в $S^1 \times D^2$ с n_{jj} меридианами, изображенными на рис. 5 слева.

Край поверхности $\widehat{\Sigma}_j$ в точности соответствует соотношению $n_{jk}\mu_j = 0$. Оснащение, индуцированное с этой поверхности на каждой из копий μ_k, $k \neq j$, согласовано с 0-оснащением. Оснащение на каждой копии μ_j есть $-\mathrm{sign}(n_{jj})$. Поверхность $\widehat{\Sigma}_j$ можно превратить в поверхность в $M \times [0,1] \times [0,1]$, приклеив к ее краю „воротник“ в направлении второго интервала, а затем по ленте для каждой пары μ_j, как показано

на рис. 5 Получившаяся поверхность снабжена каноническим оснащением, и гомотопия, задаваемая конструкцией Понтрягина–Тома, переводит петлю, соответствующую соотношению в $H_1(M)$, в незаузленную ± 2-оснащеннную петлю. Такая петля гомотопна нулю, что и требовалось доказать. •

Интересно заметить, что исследование топологии конфигурационных пространств оказалось связано со Spin-структурами. Это неудивительно, поскольку Spin-структуры впервые были введены как раз для изучения спина точечных частиц. Фундаментальную группу конфигурационного пространства можно использовать для изучения спина солитонов. В связи с другими аспектами теории возникают также Spin^c-структуры.

2.3. Рациональные когомологии конфигурационного пространства. Вторая группа когомологий конфигурационного пространства играет большую роль в квантовой теории. Полная группа рациональных когомологий также может появиться в качестве одной из топологических наблюдаемых теории. Чтобы понять роль вторых когомологий, напомним некоторые факты из теории геометрического квантования [28]. В квантовой теории алгебра наблюдаемых реализуется как набор операторов в некотором функциональном пространстве. По данному конфигурационному пространству (пространство координат) строится фазовое пространство (координат и импульсов); обычно это кокасательное расслоение к конфигурационному пространству, наделенное канонической симплектической структурой. В качестве пространства волновых функций выбирается пространство сечений комплексного линейного расслоения над фактор-пространством фазового пространства по интегрируемому изотропному распределению максимальной размерности (так называемой поляризации). Чаще всего используется вертикальная поляризация, слои которой совпадают со слоями кокасательного расслоения. В этом случае фактор-пространство естественно отождествляется с самим конфигурационным пространством.

Над данным пространством существует, вообще говоря, много комплексных линейных расслоений. В физической литературе с этим связывают неоднозначность квантования. Линейные расслоения над односвязной базой находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами второй группы когомологий с целочисленными коэффициентами. Если мы выберем на фазовом пространстве вертикальную поляризацию, неоднозначность квантования связана со вторыми когомологиями конфигурационного пространства. Как хорошо известно, вторые когомологии с целочисленными коэффициентами однозначно определяются по фундаментальной группе и вторым когомологиям с рациональными коэффициентами.

Кольцо вещественных когомологий $H^*((G^M)_0, \mathbb{R})$ вместе с его мультипликативной структурой описывается следующей теоремой [5]. Чтобы сформулировать ее, мы воспользуемся отображением

$$\mu : H_d(M; \mathbb{R}) \otimes H^j(G; \mathbb{R}) \to H^{j-d}(G^M; \mathbb{R}),$$

аналогичным отображению, которое используется в теории Янга–Миллса; кольцо когомологий порождается (как алгебра) образом этого отображения. Отображение μ порождает $(j-d)$-коцикл в G^M из d-цикла в M и j-коцикла в G. Мы опишем эту конструкцию на уровне цепей: пусть $e^d : D^d \to M$ — d-мерная клетка и x_j — замкнутая j-форма на G. Пусть $u : \Delta^{j-d} \to G^M$ — сингулярный симплекс и пусть $\widehat{u} : M \times \Delta^{j-d} \to G$ — порожденное им естественное отображение. Положим

$$\mu(e^d \otimes x_j)(u) = \int_{D^d \times \Delta^{j-d}} \widehat{u}^* x_j.$$

Теорема 6. *Пусть G — компактная односвязная простая группа Ли. Кольцо когомологий $H^*((G^M)_0; \mathbb{R})$ замкнутого связного ориентируемого трехмерного многообразия M, — свободная коммутативная супералгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$, порожденная элементами $\mu(\Sigma_j^d \otimes x_k)$, где Σ_j^d образуют базис в $H_d(M; \mathbb{R})$ при $d > 0$ и $k - d > 0$ и x_k порождают кольцо $H^*(G; \mathbb{R})$ как свободную коммутативную супералгебру с единицей.*

Образующие кольца $H^*(G; \mathbb{R})$ (как свободной коммутативной супералгебры с единицей) приведены в табл. 1, помещенной в п. 2.1. Следующий результат [5] описывает кольцо рациональных когомологий пространства $(S^2)^M$.

Теорема 7. *Пусть M — замкнутое связное ориентируемое многообразие; зафиксируем отображение $\varphi : M \to S^2$, и пусть Σ_j^d — базис $H_d(M; \mathbb{R})$ при $d < 3$, а $\{\alpha_k\}$ — базис пространства*

$$\ker(2\varphi^* \mu_{S^2} \smile : H^1(M; \mathbb{Z}) \to H^3(M; \mathbb{Z})).$$

Кольцо когомологий $H^*((S^2)^M_\varphi; \mathbb{R})$ — свободная коммутативная супералгебра с единицей над полем $\mathbb{R}$, порожденная элементами α_k и $\mu(\Sigma_j^d \otimes x)$, где $x \in H^3(\mathrm{Sp}(1); \mathbb{Z})$ — ориентирующий класс. Классы α_k имеют степень 1, а $\mu(\Sigma_j^d \otimes x)$ — степень $3 - d$.

Интересно сопоставить конфигурационное пространство $\mathrm{Sp}(1)$-связностей (рассматриваемых с точностью до калибровочной эквивалентности) в теории Янга–Миллса и конфигурационное пространство отображений в $\mathrm{Sp}(1)$ в модели Скирма (табл. 2).

Таблица 2
Теория Янга–Миллса и модель Скирма

	Конфигурационное пространство теории Янга–Миллса	Конфигурационное пространство модели Скирма
Исходное пространство	4-мерное многообразие X	3-мерное многообразие M
Гомотопический тип	$\mathrm{Maps}(X, B\mathrm{SU}(2))$	$\mathrm{Maps}(M, \mathrm{SU}(2))$
Топологическая характеристика	2-й класс Черна, c_2	Инвариант Черна–Саймонса, cs$= Tc_2$
Образующие кольца когомологий	$\mu(\Sigma^d \otimes c_2) \in H^{4-d}(\mathcal{C})$	$\mu(\Sigma^d \otimes Tc_2) \in H^{3-d}(\mathcal{C})$

В теории Янга–Миллса с помощью пространств модулей можно определить семейство замкнутых циклов в конфигурационном пространстве. Вычисление значения образующих кольца когомологий конфигурационного пространства на этих циклах порождает инвариант 4-мерных многообразий (так называемый полином Дональдсона). Это полином от классов гомологий исходного 4-мерного многообразия.

Естественно спросить, существует ли аналогичное семейство замкнутых циклов в конфигурационном пространстве модели Скирма. Если такое семейство существует, было бы возможно определить полиномиальный инвариант трехмерных многообразий, аналогичный полиному Дональдсона.

2.4. Другие топологические результаты. Используя стандартные результаты алгебраической топологии, можно обобщить теоремы о фундаментальной группе и рациональных когомологиях на случай, когда многообразие не связно, или на произвольные группы Ли. Можно также описать конфигурационные пространства свободных отображений. Подробности можно найти в [5]. Два наиболее тонких результата в этом направлении приведены ниже.

Теорема 8. *Имеем* $\pi_1(\mathit{FreeMaps}(M, S^2)_\varphi) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \big(H^2(M;\mathbb{Z})/\langle 2\varphi^*\mu_{S^2}\rangle\big) \oplus \ker(2\varphi^*\mu_{S^2} \smile)$.

Теорема 9. *Существует спектральная последовательность*

$$E_2^{p,q} = H^p(S^2;\mathbb{R}) \otimes H^q((S^2)^M_\varphi;\mathbb{R}),$$

сходящаяся к $H^*(\mathit{FreeMaps}(M, S^2)_\varphi;\mathbb{R})$. *Второй дифференциал в ней задается формулой* $d_2\mu(\Sigma^{(2)}\otimes x) = 2\varphi^*\mu_{S^2}[\Sigma]\mu_{S^2}$; *действие* d_2 *на остальные генераторы тривиально. Все высшие дифференциалы также тривиальны.*

§3. Функционалы и аналитическая техника

С отображениями из одного многообразия в другое можно связать много разных функциональных пространств. Физика и геометрия служат для аналитика источником правильных постановок задач. В силу структуры функционала энергии для нелинейных сигма-моделей при изучении отображений с конечной энергией естественно использовать язык соболевских пространств. Для скалярных функций на многообразии можно определить соболевские пространства, воспользовавшись локализацией на открытые карты с помощью разбиения единицы и использовав после этого стандартное определение соболевских пространств в $\mathbb{R}^n$. Это определение немедленно переносится на вектор-функции. Чтобы определить соболевские пространства функций со значениями в гладком многообразии, можно выбрать его изометрическое вложение в линейное пространство и рассмотреть соболевские функции со значениями в объемлющем пространстве и такие, что их значения почти всюду принадлежат этому подмногообразию. Мы обозначим $W^{s,p}(M,\, N)$ пространство отображений из M в N, имеющих обобщенные производные вплоть до порядка s, принадлежащие L^p.

В этой работе мы рассматриваем два функционала энергии, связанные с моделями Скирма и Фаддеева. Функционал Скирма для отображений $u : M \to G$ определен формулой

$$E(u) = \int_M \frac{1}{2}|u^{-1}\, du|^2 \,+\, \frac{1}{4}|u^{-1}\, du \wedge u^{-1}\, du|^2 \, d\,\mathrm{vol}_M\,. \tag{3.1}$$

В работе Скирма [29] этот функционал рассматривался для случая отображений из пространства $\mathbb{R}^3$ в группу $\mathrm{SU}(2)$. Мы описывали физическую интерпретацию таких отображений в разделе, посвященном топологии.

Функционал Фаддеева определен для отображений $\psi : M \to S^2$ формулой [12]

$$E(\psi) = \int_M |d\psi|^2 + |d\psi \wedge d\psi|^2 \, d\mathrm{vol}. \tag{3.2}$$

Он просто связан с функционалом Скирма: если отождествить сферу S^2 с экваториальным сечением трехмерной сферы $S^3 \simeq \mathrm{SU}(2)$, функционал Фаддеева совпадает с ограничением функционала Скирма на отображения со значениями в S^2, $\psi(x) = \psi^1(x)\,\mathbf{i} + \psi^2(x)\,\mathbf{j} + \psi^3(x)\,\mathbf{k}$.

Для этих моделей отображения с конечной энергией — это отображения $u \in W^{1,2}(M, G)$, $\psi \in W^{1,2}(M, S^2)$, для которых $E(u)$, $E(\psi)$ конечны. Мы обозначим пространство таких отображений $W_E^{1,2}$.

3.1. Локальное представление функций при помощи плоских связностей. Одна из идей, которые оказались полезными при изучении нелинейных сигма-моделей — локальное задание отображений при помощи плоских связностей. Это впервые проявляется в случае, когда область значений — группа Ли. По заданному отображению $u : M \to G$ можно построить 1-форму со значениями в алгебре Ли $A = u^{-1}du$. Эта форма удовлетворяет уравнению $dA + A \wedge A = 0$ и ее можно интерпретировать как плоскую связность. Обратно, по плоской связности, определенной в кубе I^n, можно построить отображение $u : I^n \to G$, решая уравнение параллельного переноса $du(\dot\gamma(t)) = u(\gamma(t))A(\dot\gamma(t))$ с начальными данными $u(x_0) = I$. В силу того, что связность A плоская, значение $u(\gamma(1))$ не зависит от пути, соединяющего точки x_0 и $\gamma(1)$. Изменение начального значения или начальной точки изменит функцию u на постоянный множитель. Тот же результат верен и для L^2-связностей [1], но доказательство этого факта намного сложнее. Результат, полученный в [1], состоит в следующем.

Теорема 10. *Для любой L^2 $\mathfrak{g}$-значной 1-формы A на I^m такой, что для нее выполняется (в смысле обобщенных функций) уравнение нулевой кривизны*

$$dA + \frac{1}{2}\,[A,\,A] = 0, \tag{3.3}$$

существует отображение $u \in W^{1,2}(I^m, G)$ такое, что $u^{-1} \in W^{1,2}(I^m, G)$ и $A = u^{-1}\,du$. Более того, для любых двух таких отображений u и v существует элемент $g \in G$ такой, что $u(x) = g \cdot v(x)$, для почти всех $x \in I^m$.

Вторая локальная теорема о реализации доказана в [3] для отображений в двумерную сферу.

Теорема 11. *Предположим, что отображение φ принадлежит пространству $W^{1,3}(I^3, S^2)$ или $W^{1,2}_E(I^3, S^2)$. Тогда существует отображение $u \in W^{1,3}(I^3, \mathrm{Sp}(1))$ (соответственно $u \in W^{1,2}_E(I^3, \mathrm{Sp}(1))$) такое, что $\varphi = u^*\,\mathbf{i}\,u$. В обоих случаях $\mathrm{Re}((u^*du)^3) \in L^1$. Более того, для любых двух таких отображений u и v существует отображение $\lambda \in W^{1,3}(I^3, S^1)$ (соответственно $\lambda \in W^{1,2}(I^3, S^1)$) такое, что $v = \lambda u$.*

Эта теорема в какой-то степени напоминает фиксацию калибровки. Поскольку сфера S^2 двумерна, а пространство $\mathrm{Sp}(1)$ трехмерно, естественно ожидать, что поднятий много. Доказательство теоремы требует введения системы дифференциальных уравнений в частных производных (интуитивно, это приводит к тому, что поднятия перпендикулярны орбитам). Искомое поднятие выражается через решение этой системы уравнений. Удобный способ выразить фактор-проекцию $\mathrm{Sp}(1) \to S^2$ доставляет отображение Хопфа,

действующее по формуле $u \mapsto u^*\mathbf{i}u$. Это ведет к локальному представлению S^2-значных отображений. Более общим образом, если H — замкнутая подгруппа группы Ли G, то функции из I^n в G/H можно профакторизовать через G. Для односвязных компактных однородных пространств это было сделано С. Кошкиным в [23]. Тогда, как и ранее, G-значное отображение можно задать плоской связностью. Это важно для одного класса сигма-моделей в физике, называемых косет-моделями — когда A-пространством значений является однородное пространство G/H.

3.2. Гомотопическая теория отображений с конечной энергией. Первое приложение теорем о локальной реализации, которое мы рассмотрим, связано с изучением гомотопической теории отображений с конечной энергией. Этот вопрос естественно возникает при изучении нелинейных сигма-моделей, поскольку в большинстве случаев изучаются отображения, принадлежащие фиксированному гомотопическому классу. Гомотопические классы разбивают частицеподобные возбуждения на разные секторы и численные инварианты, различающие эти классы (секторы), имеют прямой физический смысл (в рамках конкретной модели). Хорошие физические модели описывают интересную физику, а связанные с ними функционалы энергии согласованы с геометрией конфигурационного пространства. В последнее время была проделана большая работа по связи теории гомотопий с соболевскими пространствами $W^{s,p}(M,N)$; обзор этих результатов приведен в [10]. Следующая парафраза теоремы Уайта [33] дает хорошее представление о том, чего можно ожидать: гомотопические классы отображений, имеющих одну обобщенную производную класса L^p, суженных на k-остов многообразия, согласованы с гомотопическими классами гладких отображений при $k < p$. Например, вторые когомологии пространства полностью определяются гомотопическими классами отображений его 3-остова в пространство Эйленберга–Маклейна $K(\mathbb{Z},2)$ (или в проективное пространство $\mathbb{C}P^N$ для достаточно большого N). Таким образом, следует ожидать, что обратный образ 2-го класса когомологий корректно определен для отображений класса $W^{1,3}$. В общем случае трехмерные когомологии зависят от 4-остова; разумеется, если многообразие трехмерно, то достаточно рассмотреть его 3-остов, и обратный образ корректно определен для любого отображения класса $W^{1,3}$. Аналогично следует ожидать, что инвариант Хопфа корректно определен для отображений класса $W^{1,3}$.

При изучении гомотопии отображений в пространствах обобщенных функций полезно иметь в виду несколько примеров конкретных отображений. Рассмотрим сначала отображение из трехмерного шара в двумерную сферу $\eta_1 : D^3 \to S^2$, задаваемое формулой $\eta_1(x) = x/|x|$. Элементарное интегрирование показывает, что это отображение принадлежит классу $W^{1,p}$

для $p < 3$, но не принадлежит $W_E^{1,2}$ или $W^{1,3}$. Заметим, что интеграл по границе шара от нормированной формы площади на S^2, перенесенной на шар с помощью отображения η_1, равен 1. Таким образом, обратный образ двумерных когомологий для таких отображений может быть не определен. Еще более жесткие условия регулярности необходимы для того, чтобы корректно определить обратный образ трехмерных когомологий. Композицию проекции сферы S^3 на шар D^3 с отображением η_1 можно вклеить в любое гладкое отображение трехмерного многообразия и получить пример отображения с аналогичными свойствами. Аналогичным образом, функция $\eta_2 : D^3 \to S^1$, заданная формулой $\eta_2(x) = \cos(\ln|x|)\mathbf{i} + \sin(\ln|x|)\mathbf{j}$, принадлежит пространству $W_E^{1,p}$ при $p < 3$, но не лежит в $W^{1,3}$, а функция $\eta_3 : D^3 \to S^1$, заданная формулой $\eta_3(x) = \cos(\ln|\ln|x/e||)\mathbf{i} + \sin(\ln|\ln|x/e||)\mathbf{j}$, лежит в $W^{1,3}$, но не является непрерывной. Две последних функции можно вклеить в отображение из любого трехмерного многообразия. Кроме того, они допускают композицию с отображениями в любую полупростую компактную группу Ли или в сферу S^2. Наши приложения теорем о локальной реализации к гомотопическим проблемам аналогичны определению чеховских когомологий. В качестве первого примера рассмотрим пространство классов калибровочной эквивалентности плоских связностей. Как хорошо известно, компоненты связности этого пространства параметризуются представлениями группы голономий.

Представление голономии можно определить для связностей класса L^2_{loc}, имеющих нулевую кривизну в смысле обобщенных функций. Из приведенных выше примеров отображений ясно, что локальная развертка для таких связностей может выглядеть, как швейцарский сыр. Вот набросок точного определения. Выберем достаточно тонкое покрытие кубами нашего многообразия, так что нерв покрытия будет гомотопически эквивалентен многообразию. (Нерв покрытия — это симплициальный комплекс, в котором каждому кубу покрытия сопоставлена вершина, каждому непустому пересечению кубов — ребро, каждому непустому тройному пересечению — грань и т.д.) Группа замкнутых петель в одномерном остове комплекса — аналог фундаментальной группы топологического пространства. Она изоморфна фундаментальной группе топологической реализации комплекса. В силу теоремы о локальной реализации по заданной обобщенно плоской связности A класса L^2_{loc} можно построить локальные развертки u_p такие, что $A = u_p^{-1} du_p$ на каждом кубе нашего покрытия. Более того, каждому ребру нерва покрытия можно сопоставить групповой элемент, связывающий два локальных развертывающих отображения. Это задает представление группы замкнутых петель в одномерном остове покрытия. Более аккуратное определение включает в рассмотрение функции перехода расслоения,

в котором задана наша плоская связность; оно проходит только для центральных расслоений. Вопрос о том, как распространить это определение на произвольные плоские связности, пока открыт [1].

Используя понятие голономии, можно обобщить локальную теорему о локализации до ее глобальной версии.

Лемма 12. *Две обобщенно плоских связности класса L^2_{loc} на центральном векторном расслоении калибровочно эквивалентны тогда и только тогда, когда их представления голономии эквивалентны.*

Гомотопический инвариант отображения из многообразия M в группу G, принадлежащий группе $H^1(M; H_1(G_0))$, можно интерпретировать как инвариант голономии плоской связности; таким образом, он корректно определен для отображений класса $W^{1,2}$.

Имеются аналогичные приложения теоремы о локальной реализации к отображениям в двумерную сферу. Рассмотрим обратный образ ориентирующего класса $\mu_{S^2} \in H^2(S^2; \mathbb{Z})$ при отображении $\varphi : M \to S^2$. Этот класс $\varphi^*\mu_{S^2} \in H^2(M; \mathbb{Z})$ служит препятствием к поднятию φ до отображения $u : M \to \mathrm{Sp}(1)$ такого, что $\varphi = u\mathbf{i}u^*$. Пользуясь этим препятствием, можно доказать следующую теорему о глобальной реализации [2, 3].

Теорема 13. *Пусть φ и ψ — два отображения класса $W^{1,3}(M, S^2)$ или $W^{1,2}_E(M, S^2)$. Отображение w класса $W^{1,3}(M, \mathrm{Sp}(1))$ (соответственно класса $w \in W^{1,2}(M, \mathrm{Sp}(1))$) такое, что $\int_M \mathrm{Re}((w^*dw)^3) < \infty$ и $\psi = w\varphi w^*$, существует в том и только в том случае, когда $\varphi^*\mu_{S^2} = \psi^*\mu_{S^2}$. Если w_1 и w_2 — два таких отображения, то существует отображение λ в $W^{1,3}(M, S^1)$ (соответственно $W^{1,2}_E(M, S^1)$) такое, что $w_1(x)\mathfrak{q}(\varphi(x), \lambda(x)) = w_2(x)$.*

Весьма техническое доказательство этой важной теоремы использует идеи теории Чеха.

С помощью теории де Рама некоторые гомотопические инварианты можно представить как интегралы от дифференциальных форм. Когда инвариант целочисленный, это первая идея, которая приходит в голову. Инварианты со значениями в когомологиях старшей степени обычно допускают реализацию такого рода. Иногда гомотопические инварианты принимают значение в группе с кручением. Есть два способа учесть кручение. Можно воспользоваться конструкцией Чеха, как описано выше, или же поднять исследуемое отображение до отображения в другое пространство и реализовать инвариант с кручением исходного отображения как целочисленный инвариант поднятия. Кручение возникает при этом в том случае, когда существуют неэквивалентные поднятия. Во всех таких приложениях возникает новый вопрос: когомологии де Рама — это когомологии с вещественными

коэффициентами с интегрированием в качестве спаривания. Априори все интегралы имеют вещественные значения. Используя теоремы о локальной реализации, можно доказать, что эти значения в действительности целые (в том числе для соболевских отображений). Ниже мы приводим несколько примеров таких результатов [3].

Теорема 14. *Пусть G — компактная односвязная группа Ли, M — замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, пусть Θ — гладкая форма, представляющая целочисленный класс когомологий в $H^3(G)$, и u — отображение класса $W^{1,3}(M,G)$ или $W^{1,2}_E(M,G)$. Тогда число $\int_M u^*\Theta$ целое.*

Отсюда вытекает, что инварианты гомотопических классов отображений из M в G, принадлежащие группе когомологий $H^3(M;H_3(\tilde{G}))$, целочисленны для соболевских отображений в произвольные компактные группы Ли. В силу леммы 12 произвольная обобщенно плоская связность класса L^2_{loc} калибровочно эквивалентна гладкой связности. Инварианты Черна–Саймонса двух таких связностей отличаются на степень калибровочного преобразования; таким образом, мы получаем

Следствие 15. *Если A — обобщенно плоская связность класса L^2_{loc} с конечной энергией на центральном расслоении, существует гладкая связность на том же расслоении с той же голономией и тем же инвариантом Черна–Саймонса.*

Теорема целочисленности в комбинации с теоремой о подъеме отображений в двумерную сферу приводит к теореме о вторичных гомотопических инвариантах соболевских отображений в двумерную сферу. Нам нужна дополнительная информация о целочисленности, чтобы проверить, что при изменении поднятия его степень изменяется на кратное нужного целого числа. Такой контроль обеспечивает следующее утверждение.

Предложение 16. *Если ψ и λ — отображения класса $W^{1,3}$, или же ψ — отображение класса $W^{1,2}_E$, а λ принадлежит $W^{1,2}$, выражение $-\frac{1}{16\pi^2 i}\int_M \psi d\psi\wedge d\psi\wedge\lambda^* d\lambda$ есть целое число.*

Приведем формальное определение вторичного гомотопического инварианта для соболевских отображений в двумерную сферу.

Определение 17. По заданным $\varphi,\psi : M\to S^2$ класса $W^{1,3}$ или $W^{1,2}_E$ таким, что $\varphi^*\mu_{S^2}=\psi^*\mu_{S^2}$, положим

$$\Upsilon(\varphi,\psi) = -\frac{1}{12\pi^2}\int_M \mathrm{Re}((w^*dw)^3) \mod 2m,$$

где w — отображение, определенное в предложении 13, и m — порядок класса $\varphi^*\mu_{S^2}$.

Из теоремы 14 следует, что Υ целое число (определенное по модулю $2m$). Чтобы показать, что Υ корректно определено, заметим, что

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{12\pi^2}\int_M \mathrm{Re}(((w\mathfrak{q}(\psi,\lambda)^*dw)^3) \\ &\quad = -\frac{1}{8\pi^2 i}\int_M \psi d\psi\wedge d\psi\wedge\lambda^* d\lambda - \frac{1}{12\pi^2}\int_M \mathrm{Re}((w^*dw)^3). \end{aligned}$$

(Доказательство этой фомулы см. в [2].) Эти инварианты позволяют обобщить теорему Понтрягина на соболевские отображения конечной энергии, поскольку два отображения φ, ψ в двумерную сферу гомотопны тогда и только тогда, когда $\varphi^*\mu_{S^2} = \psi^*\mu_{S^2}$ и $\Upsilon(\varphi,\psi) = 0$.

Наше выражение для Υ обобщает интегральную формулу для инварианта Хопфа [9]. В самом деле, если $\varphi^*\mu_{S^2}$ имеет конечный порядок (в частности, если $M = S^3$), обратный образ $\varphi^*\omega_{S^2}$ формы площади на S^2 — точная форма и существует 1-форма θ^φ такая, что $d\theta^\varphi = \varphi^*\omega_{S^2}$. В этом случае инвариант Хопфа отображения φ определяется формулой $\int_M \theta^\varphi \bigwedge d\theta^\varphi$. Следующее предложение связывает инвариант Хопфа с Υ.

Предложение 18. *Пусть $\varphi : M \to S^2$ — отображение класса $W^{1,3}$ или $W^{1,2}_E$ такое, что $N\ \varphi^*\mu_{S^2} = 0$ для некоторого ненулевого целого N. Пусть N наименьшее такое число. Тогда*

$$\mathrm{Hopf}\,(\varphi) = \frac{1}{R_0}\Upsilon(\varphi_N, \mathbf{i}),$$

где φ_N — композиция φ с отображением $z \mapsto z^N$ сферы S^2 в себя.

Таким образом, наше обобщение теоремы Понтрягина превращается в частном случае в теорему целочисленности для инварианта Хопфа.

3.3. Минимизирующие функционалы. Одна из мотивировок проведенного нами исследования топологии пространств отображений и их расширений на соболевские отображения связана с изучением вариационных задач для функционалов Скирма и Фаддеева. На физическом языке отображения с минимальной энергией (в каждом из гомотопических секторов) называются основными состояниями. Их геометрическая структура и устойчивость имеют большое значение. Читатель может найти интересные картинки и обсуждение предполагаемой структуры основных состояний в [17] и [7] для исходной модели Скирма и в [14, 20] для модели Фаддеева.

В этом параграфе мы изложим наши результаты о существовании отображений с минимальной энергией и компактности множества минимайзеров для функционалов Скирма и Фаддеева. Наряду с функционалами энергии (3.1) и (3.2) для отображений, мы рассмотрим функционалы от связностей. В [29] Скирм заметил и использовал тот факт, что отображение в группу можно задать с помощью плоской связности $a = u^{-1}du$. Это приводит к следующей версии функционала Скирма:

$$E[a] = \int_M \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{16}|[a,\, a]|^2 \, d\,\mathrm{vol}_M. \tag{3.4}$$

Функционал Фаддеева также можно записать в терминах плоской связности [2]. Пусть задано отображение $\varphi : M \to S^2$; тогда любое гомотопное ему отображение ψ можно представить в виде $\psi = u\,\varphi\,u^*$, где $u : M \to \mathrm{Sp}(1)$. Подставляя это выражение в функционал энергии, получаем

$$E(\psi) = E_\varphi[a] := \int_M |D_a\varphi|^2 + |D_a\varphi \wedge D_a\varphi|^2, \tag{3.5}$$

где $D_a\varphi = d\varphi + [a, \varphi]$. Как было замечено в [21, 1, 2], вариационные задачи для отображений и для связностей, вообще говоря, неэквивалентны. Наш подход к этим задачам требует нескольких шагов [1, 2]. Сначала мы описываем гомотопические классы гладких отображений и определяем аналитические характеристики, различающие гомотопические классы. Далее, мы показываем, что эти характеристики имеют смысл для соболевских отображений (или связностей) с конечной энергией. Наконец, мы показываем, что в каждом секторе отображений с конечной энергией существуют минимайзеры. Мы также показываем [3, 4], что значения, которые аналитические характеристики принимают на соболевских отображениях с конечной энергией, согласованы с возможными значениями на гладких отображениях.

Имеется один открытый вопрос о компонентах связности пространства $W_E^{1,2}$: мы не знаем, является ли множество отображений конечной энергии, гомотопных одной из пробных конфигураций, линейно связным. Поэтому мы употребляем термин „сектор“ вместо „компоненты связности“. Мы ожидаем, что в подходящей топологии секторы совпадают с компонентами связности множества отображений (или связностей) с конечной энергией.

Существование минимизирующих последовательностей устанавливается с помощью прямых методов вариационного исчисления; таким образом, для любой заданной последовательности отображений, минимизирующих энергию в фиксированном секторе, существует подпоследовательность, сходящаяся к минимизирующему отображению, принадлежащему тому же сектору. В частности, любая минимизирующая последовательность содержит

сходящуюся подпоследовательность, и, таким образом, множество минимайзеров для функционалов Скирма и Фаддеева компактно в $W_E^{1,2}$.

Дальнейшая работа должна исследовать существование минимизирующих последовательностей для обобщенных функционалов Скирма, связанных с отображениями в произвольные однородные пространства. Мы также хотим исследовать вопрос о регулярности предельных отображений. Обычно решения вариационной задачи в некотором классе функций более регулярны, чем типичные элементы этого класса. Мы надеемся, что результаты о локальной реализации отображений окажутся полезными при исследовании проблемы регулярности.

Можно было бы думать, что решения вариационной задачи для функционала Скирма образуют цикл в конфигурационном пространстве отображений из M в G. Имея такой цикл, можно было бы вычислить когомологические классы в конфигурационном пространстве и получить топологические инварианты. Нам кажется, что это слишком наивно. Одна из проблем заключается в том, что функционал Скирма и соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа не распознают ориентацию. Подсчет решений уравнений Эйлера–Лагранжа не поможет даже для функционалов, про которые известно, что они дают инварианты. Напомним, что в теориях Янга–Миллса, Громова–Виттена или Виттена–Зейберга минимайзеры, вычисляемые для инвариантов многообразий, являются решениями систем первого порядка: это — антисамодуальное условие в теории Янга–Миллса, условие псевдоголоморфности в теории Громова–Виттена или уравнения Виттена–Зейберга в теории Виттена–Зейберга. Формально, аналогичная редукция возможна и для функционала Скирма. Запишем

$$E[a] = \int_M |a|^2 + |a \wedge a|^2 d\,vol = \int_M |*a - a \wedge a|^2 + 2\langle *a, a \wedge a\rangle d\,vol.$$

Так как $\int_M \langle *a, a \wedge a\rangle d\,vol$ — топологический инвариант (инвариант Черна–Симонса, умноженный на константу, или степень, умноженная на константу, в случае отображений), то любое решение уравнения $*a - a \wedge a = 0$ (напомним, что связность a плоская, а тогда и $da + a \wedge a = 0$) минимизировало бы функционал Скирма в заданном классе. (Заметим, что введение двойственности Ходжа нарушает симметрию задачи, сохраняющую ориентацию. Это важно, поскольку обычно калибровочные инварианты можно интерпретировать как перечисления со знаком. Если задача обладает сохраняющей ориентацию симметрией, такие перечисления всегда тривиальны.) Уравнения $*a - a \wedge a = 0$, $da + a \wedge a = 0$ „очень“ переопределены и могут иметь решения лишь при весьма специальных условиях. Было бы интересно понять, может ли введение новых полей спасти ситуацию и привести к

простым (в разумной степени) уравнениям, сохраняющим ориентацию, и к новым гладким инвариантам многообразий.

Список литературы

[1] Auckly D., Kapitanski L., *Holonomy and Skyrme's model*, Comm. Math. Phys. **240** (2003), 97–122.

[2] Auckly D., Kapitanski L., *Analysis of S^2-valued maps and Faddeev's model*, Comm. Math. Phys. **256** (2005), 611–620.

[3] Auckly D., Kapitanski L., *The Pontrjagin–Hopf invariants for Sobolev maps* (submitted).

[4] Auckly D., Kapitanski L., *Integrality of homotopy invariants in the Skyrme model* (in preparation).

[5] Auckly D., Speight J. M., *Fermionic quantization and configuration spaces for the Skyrme and Faddeev–Hopf models*, Preprint (http://arxiv.org/abs/hep-th/0411010)

[6] Balachandran A., Marmo G., Skagerstam B., Stern A., *Classical topology and quantum states*, World Sci. Publ. Co., Inc., River Edge, NJ, 1991.

[7] Battye R. A., Sutcliffe P. M., *Skyrmions, fullerenes and rational maps*, Rev. Math. Phys. **14** (2002), 29–85.

[8] Bopp F., Haag Z., *Über die Möglichkeit von Spinmodellen*, Z. Naturforschung **5a** (1950), 644–653.

[9] Bott R., Tu L. W., *Differential forms in algebraic topology*, Grad. Texts is Math., vol. 82, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982.

[10] Brezis H., *The interplay between analysis and topology in some nonlinear PDE problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **40** (2003), 179–201.

[11] Dirac P., *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev. (2) **74** (1948), 817–830.

[12] Faddeev L. D., *Quantization of solitons*, Preprint IAS print-75-QS70 (1975).

[13] Faddeev L. D., *Knotted solitons and their physical applications*, Topological Methods in the Physical Sciences (London, 2000), R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **359** (2001), 1399–1403.

[14] Faddeev L. D., Niemi, A. J., *Stable knot-like structures in classical field theory*, Nature **387** (1997), 58–61.

[15] Federer H., *A study of function spaces by spectral sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 340–361.

[16] Finkelstein D., Rubinstein J., *Connection between spin, statisitics, and kinks*, J. Math. Phys. **9** (1968), 1762–1779.

[17] Gisiger T., Paranjape M. B., *Recent mathematical developments in the Skyrme model*, Phys. Rep. **306** (1998), no. 3, 109–211.

[18] Giulini D., *On the possibility of spinorial quantization in the Skyrme model*, Modern Phys. Lett. A **8** (1993), 1917–1924.

[19] Hansen V. L., http://www.mat.dtu.dk/people/V.L.Hansen/string.html

[20] Hietarinta J., Salo P., *Ground state in the Faddeev-Skyrme model*, Phys. Rev. D **62** (2000), 081701(R).

[21] Kapitanski L., *On Skyrme's model*, Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics, II, Int. Math. Ser. (N. Y.), vol. 2, Kluwer/Plenum, New York, 2002, pp. 229–241.

[22] Kirby R. C., *The topology of 4-manifolds*, Lecture Notes in Math., vol. 1374, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[23] Koshkin S., *Homogeneous spaces and Faddeev-Skyrme models*, Dissertation, Kansas State Univ., 2006.
[24] Mandl F., Shaw G., *Quantum field theory*, Wiley, 1991.
[25] Pontrjagin L., *A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere*, Мат. сб. **9(51)** (1941), №2, 331–363.
[26] Rajaraman R., *Solitons and instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
[27] Schulman L., *A path integral for spin*, Phys. Rev. (2) **176** (1968), 1558–1569.
[28] Simms D. J., Woodhouse N. M. J., *Lectures in geometric quantization*, Lecture Notes in Phys., vol. 53, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
[29] Skyrme T. H. R., *A unified field theory of mesons and baryons*, Nuclear Phys. **31** (1962), 556–569.
[30] Sorkin R., *A general relation between kink-exchange and kink-rotation*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), 421–434.
[31] Вакуленко А. Ф., Капитанский Л. В., *Устойчивость солитонов в S^2-нелинейной σ-модели*, Докл. АН СССР **246** (1979), №4, 840–842.
[32] Weinberg S., *The quantum theory of fields*. Vol. 1, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
[33] White B., *Homotopy classes in Sobolev spaces and the existence of energy minimizing maps*, Acta Math. **160** (1988), 1–17.
[34] Witten E., *Current algebra, baryons, and quark confinement*, Nuclear Phys. B **233** (1983), 433–444.
[35] Zaccaria F., Sudarshan E., Nilsson J., Mukunda N., Marmo G., Balachandran A., *Universal unfolding of Hamiltonian systems: from symplectic structure to fiber bundles*, Phys. Rev. D (3) **27** (1983), 2327–2340.

Department of Mathematics
Kansas State University
Manhattan, Kansas 66506, USA

Поступило 16 июня 2005 г.

Department of Mathematics
University of Miami
Coral Gabels, Florida 33124, USA

Department of Pure Mathematics
University of Leeds
Leeds LS2 9JT, England