МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИХРЕВОГО ОБРАЗОВАНИЯ С УДАРНОЙ ВОЛНОЙ ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

 М.А. Кирюшина[1], Т.Г. Елизарова[1], А.С. Епихин[2]

[1]ИПМ им. М.В. Келдыша РАН
[2]ИСП им. В.П. Иванникова РАН
m_ist@mail.ru

DOI: 10.20948/mm-2022-09-04

Приведены результаты численного моделирования задачи о взаимодействии вихревого течения с ударной волной на примере использования квазигазодинамического (КГД) численного алгоритма, который реализован в решателе QGDFoam. В основу алгоритма положены регуляризованные уравнения газовой динамики. Алгоритм реализован в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM. Результаты сравниваются с опубликованными данными, полученными на основе метода типа Годунова высокого порядка точности и вариантов метода Курганова-Тадмора, включенных в состав открытого программного комплекса.

Ключевые слова: метод контрольного объема, открытый пакет OpenFOAM, квазигазодинамический алгоритм, нестационарное сверхзвуковое течение, невязкий газ.

SIMULATION OF VORTEX INTERACTION WITH A SHOCK WAVE FOR TESTING NUMERICAL ALGORITHMS

M.A. Kirushina, T.G. Elizarova, A.S. Epikhin

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS
Ivannikov Institute for System Programming of the RAS

The results of numerical simulation of the problem of the interaction of a vortex flow with a shock wave are presented on the example of using quasi-gas-dynamic (QGD) numerical algorithm, which is implemented in the QGDFoam solver. The algorithm is based on regularized equations of gas dynamics. The algorithm is implemented within the framework of the OpenFOAM open software package. The results are compared with the published data obtained on the basis of the Godunov type method of high order of accuracy and variants of the Kurganov–Tadmor method included in the open software package.

Key words: control volume method, OpenFOAM package, quasi gas dynamic algorithm, non-stational supersonic ideal gas flow.

Введение

Тестирование численных методов для моделирования газодинамических течений не теряет своей актуальности как в связи с широким набором доступных численных алгоритмов, так и с постоянно расширяющейся областью применения этих алгоритмов в практических расчетах. Особую важность при этом представляет изучение возможностей алгоритмов для описания нестационарных течений. В данной работе возможности четырех известных алгоритмов для моделирования невязких течений показаны на распространенной задаче о развитии нестационарного течения идеального газа, формирующегося при взаимодействии движушегося вихревого образования и ударной волны. Постановка этой задачи и примеры ее моделирования на основе схем повышенного порядка точности приведены в ряде работ, среди которых отметим [1,2] и назовем их эталонными. Каждый алгоритм вносит свои особенности в результаты численного моделирования, оценить роль которых удается только из общих соображений в силу отсутствия аналитического решения задачи или экспериментальных данных по ней. Тем не менее сопоставление результатов моделирования этого сложного течения, полученных на основе различных численных подходов, позволяет выявить особенности примененных методов.

В данной работе на примере математического моделирования указанной задачи проанализированы особенности квазигазодинамического (КГД) алгоритма, совместно с тремя другими вычислительными подходами, основаными на схеме Курганова-Тадмора с ограничителями второго и первого порядков точности.

Наибольшее внимание уделено результатам расчетов, полученных на основе КГД алгоритма [3,4], который включен в открытый пакет OpenFOAM [5] в качестве решателя QGDFoam. Расчеты проводились в рамках этого пакета. КГД алгоритм является разностной аппроксимацией осредненных уравнений газовой динамики [3]. КГД алгоритм обладает рядом настроечных параметров, адекватный выбор которых позволяет единообразно моделировать широкий круг течений газа, включая как сверхзвуковые, так и дозвуковые режимы. Показана зависимость численного решения от выбора настроечных параметров алгоритма.

Детальное описание постановки задачи приведено в первом разделе работы. Во второй части приведен вид КГД уравнений и постановка задачи. Некоторые особенности реализации численных алгоритмов и запуска задачи в рамках открытого пакета изложены в третьем разделе. В четвертом разделе показаны результаты расчетов, их сходимость по сетке и влияние выбора параметров настройки КГД алгоритма. Здесь же приведены результаты, полученные на основе трех вычислительных методов, включенных в открытый пакет OpenFOAM в качестве альтернативных вычислительных ядер. В заключении обсуждаются полученные результаты и проводится сопоставление скорости работы использованных алгоритмов в рамках открытого программного комплекса.

Постановка задачи

Общий вид изучаемого течения на конечный момент времени расчета и схема расчетной области приведены на рис.1, 2 в соответствие с работами [1,2].

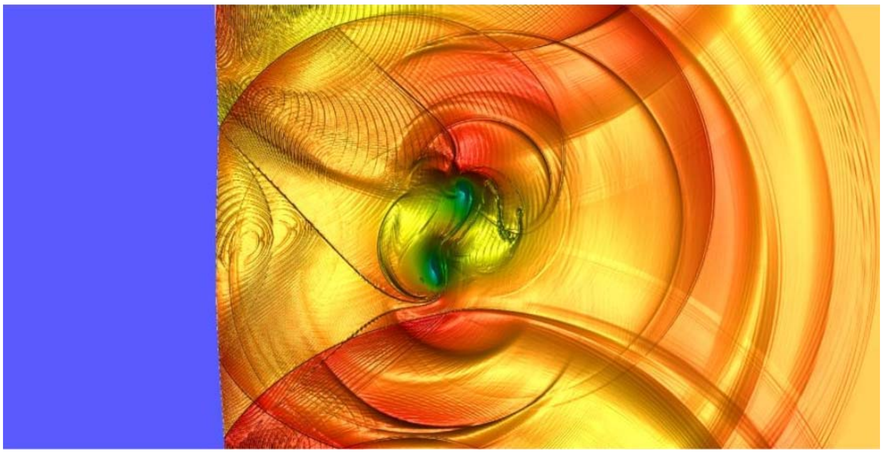

Рис.1. Пример решения задачи о невязком взаимодействии вихря и ударной волны согласно [2].

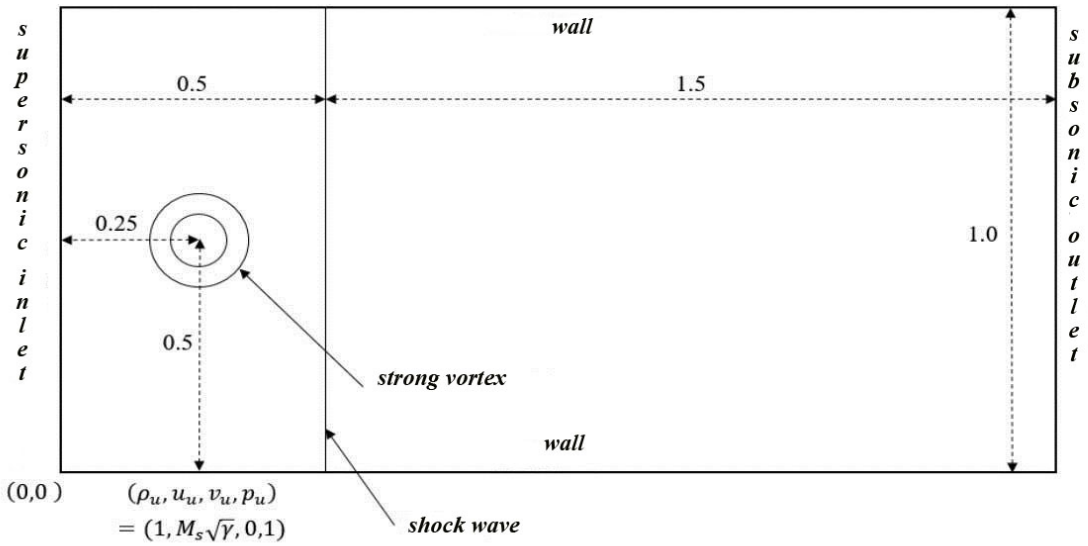

Рис.2. Схема расчетной области и постановка начальных условий.

Расчетная область имеет вид прямоугольника размером 2×1 (рис.1). В начальный момент времени стационарная ударная волна с числом Маха M_S

расположена вертикально вдоль линии с координатой x=0.5, перед которой располагается область вихревого течения с вращением скорости против часовой стрелки. Таким образом, в левой части области течение является суперпозицией сверхзвукового и вихревого течения. За ударной волной располагается зона дозвукового течения.

Параметры газа слева от ударной волны обозначены индексом u (up), справа – индексом d (down). Компоненты скорости течения обозначены символами (u,v).

Начальные условия в левой части области $x \le 0.5$ и граничные условия на левой границе (upstream) имеют вид

$$\rho_u = 1, \quad u_u = M_s\sqrt{\gamma}, \quad v_u = 0, \quad p_u = 1, \quad T_u = p_u / (\rho_u R). \tag{1}$$

В правой части задаются условия, обеспечивающие задание неподвижной ударной волны в соответствии с условиями Гюгонио для числа Маха M_s. Это соответствует параметрам газа

$$\begin{aligned} &\rho_d = \rho_u(\gamma+1)M_s^2 / (2.0 + (\gamma-1)M_s^2), \\ &u_d = u_u(2.0 + (\gamma-1)M_s^2) / ((\gamma+1)M_s^2), \\ &v_d = 0, \quad p_d = p_u(1 + 2\gamma(M_s^2 - 1)/(\gamma+1)), \quad T_d = p_d / (\rho_d R). \end{aligned} \tag{2}$$

В данной задаче выбрано $M_s = 1.5$. Это число Маха в совокупности с показателем адиабаты политропного газа γ=1.4 и значением газовой постоянной R=1 определяет значения параметров перед ударной волной и на левой границе области, а также начальные условия расчета за ударной волной. Численные значения этих величин составляют

$$\rho_u = 1, \quad u_u = 1.77482, \quad v_u = 0, \quad p_u = 1, \quad T_u = 1,$$

$$\rho_d = 1.862, \quad u_d = 0.953146, \quad v_d = 0, \quad p_d = 2.45833, \quad T_d = 1.32022.$$

Отметим, что для получения в расчете неподвижной ударной волны значения параметров справа от разрыва должны вычисляться с достаточно большой точностью. При применении КГД алгоритма минимальной точностью является использование десяти значащих цифр.

В начальный момент времени перед ударной волной располагается вихревое образование с центром вихря в точке (0.25,0.5) с внутренним радиусом a=0.075 и внешним радиусом b=0.175. Дополнительными характерными параметрами вихря являются величины $M_v = 0.9$ и $v_m = M_v\sqrt{\gamma}$.

Внутри вихря поле скорости обозначим как (u_{vor}^x, u_{vor}^y). Угловая скорость задается следующим образом:

$$v_\theta(r)=\begin{cases} v_1 = v_m r / a, & r \leqslant a, \\ v_2 = v_m a / (a^2-b^2)(r-b^2/r), & a < r \leqslant b \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

Тогда $u^x_{vor}(r) = u_u - v_\theta(r)\sin\theta$, $v^y_{vor}(r) = v_u + v_\theta(r)\cos\theta$.

Температура внутри вихря находится путем вычисления интеграла

$$\int_r^b \frac{dT_{vor}(r)}{dr} dr = \int_r^b \frac{\gamma-1}{R\gamma}\frac{v_\theta(r)^2}{r} dr,$$

где

$$\int_r^b \frac{\gamma-1}{R\gamma}\frac{v_\theta^2}{r} dr = \frac{\gamma-1}{R\gamma}\begin{cases} \int_r^a \frac{v_1^2}{r} dr + \int_a^b \frac{v_2^2}{r} dr, & r \leqslant a, \\ \int_r^b \frac{v_2^2}{r} dr, & a < r \leqslant b, \\ 0, & r > b. \end{cases}$$

Вычисляя интергалы, находим

$$T_{vor}(r)=\begin{cases} T_{vor}(b) - \frac{\gamma-1}{R\gamma}\frac{v_m^2}{a^2}\left(\frac{a^2-r^2}{2}\right) - \\ -\frac{\gamma-1}{R\gamma} v_m^2 \frac{a^2}{(a^2-b^2)^2}\left(\frac{b^2-a^2}{2} - 2b^2 \ln\frac{b}{a} - \frac{b^4}{2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\right), & r \leqslant a, \\ T_{vor}(b) - \frac{\gamma-1}{R\gamma} v_m^2 \frac{a^2}{(a^2-b^2)^2}\left(\frac{b^2-r^2}{2} - 2b^2 \ln\frac{b}{r} - \frac{b^4}{2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)\right), & a<r\leqslant b, \\ 0, \quad r > b, \end{cases}$$

используя, что $T_{vor}(b) = T_u$. Давление в вихре p_{vor} вычисляется как

$$p_{vor}(r) = p_u\left(T_{vor}(r)/T_u\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Плотность ρ_{vor} в вихревой зоне отпределяется из уравнения состояния. В качестве начальных условий в левой части области в зоне вихря задается суперпозиция значений скоростей, температур и давлений сверхзвукового течения с параметрами входной границы следующим образом: в зоне вне вихря задаются значения (1), в зоне внутри вихря задаются величины

$$\rho=\rho_{vor},\ \ u=u_{vor}=u_u-v_\theta(r)\sin\theta,\ \ v=v_{vor}=v_\theta(r)\cos\theta,\ \ p=p_{vor},\ \ T=T_{vor}(r).$$

В правой части области задается течение с рассчитанными параметрами за ударной волной (2).

Граничные условия на левой границе области считаются постоянными, на правой границе области ставятся мягкие граничные условия, горизонтальные стенки полагаются твердыми границами с условиями скольжения для скорости.

Численный алгоритм на основе регуляризованных уравнений

Система регуляризованных уравнений газовой динамики в виде уравнений баланса массы, импульса и полной энергии в обозначениях, принятых в OpenFOAM, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\partial_t\rho+\mathrm{div}(\mathbf{j_m})=0,\\
&\partial_t(\rho\mathbf{u})+\mathrm{div}(\mathbf{j_m}\mathbf{u})+\nabla p=\mathrm{div}\hat{\Pi},\\
&\partial_t(\rho e)+\mathrm{div}[\mathbf{j_m}(e+p/\rho)]+\mathrm{div}\mathbf{q}=\mathrm{div}(\hat{\Pi}\mathbf{u}),\\
&\mathbf{j_m}=\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w}),\mathbf{w}=\frac{\tau}{\rho}\big(\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})+\nabla p\big),\\
&\hat{\Pi}=\hat{\Pi}_{NS}+\tau\mathbf{u}\otimes\big(\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p\big)+\tau\hat{I}\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)p+\gamma p\nabla\mathbf{u}\big),\\
&\mathbf{q}=\mathbf{q}_{NS}-\tau\rho\mathbf{u}\big((\mathbf{u}\cdot\nabla)u_\varepsilon+p(\mathbf{u}\cdot\nabla)/\rho\big).
\end{aligned}\tag{4}$$

Здесь удельная полная энергия обозначена как $e=u_\varepsilon+0.5|\mathbf{u}|^2$, u_ε – удельная внутренняя энергия, $p=\rho u_\varepsilon(\gamma-1)$, $T=p/\rho R$ – температура. Знак $\otimes$ обозначает прямое тензорное произведение векторов, $\hat{I}$ – единичный тензор.

Вектор потока массы, тензор вязких напряжений $\hat{\Pi}$ и вектор теплового потока $\mathbf{q}$ представляют собой традиционные величины, дополненные регуляризующими добавки с малым коэффициентом τ в качестве множителя. При этом значения тензоров вязкости и вектора теплового потока, определяемые законами Ньютона и Фурье, вычисляются как

$$\begin{aligned}
&\hat{\Pi}_{NS}=\mu((\nabla\otimes\mathbf{u})+(\nabla\otimes\mathbf{u})^T-\frac{2}{3}\hat{I}\mathrm{div}\mathbf{u}),\\
&\mathbf{q}_{NS}=-\kappa\nabla T,
\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $\mu=\mu(\rho,T)>0$ – коэффициент динамической вязкости, $\kappa=\mu\gamma R/((\gamma-1)Pr)$ – коэффициент теплопроводности, Pr – число Прандтля.

Система КГД уравнений (4) включает в себя дополнительную искусственную диссипацию, которая обеспечивает устойчивость и точность разностного алгоритма. Данный алгоритм является явным по времени, применяет метод конечного объема с аппроксимацией всех пространственных производных второго порядка точности с помощью центральных разностей, см. [3,5]. Вклад искусственной диссипации регулируется коэффициентом

$$\tau = \alpha \Delta x / c .$$

Здесь Δx – локальный размер шага пространственной сетки, c – локальная скорость звука, α – настроечный параметр алгоритма, который обычно лежит в пределах $0 < \alpha < 1$ и определяет точность алгоритма и величину шага по времени явной схемы расчета.

При решении уравнений Эйлера на основе КГД алгоритмов коэффициент динамической вязкости и связанный с ним коэффициент теплопроводности считаются искусственными. Коэффициент вязкости вычисляется как

$$\mu = \mu^{QGD} = p \cdot \tau \cdot Sc^{QGD}, \qquad Sc^{QGD} \text{ – число Шмидта.}$$

Таким образом, для данной задачи все диссипатвные коэффициенты τ, μ и κ рассматриваются как искусственные параметры, которые регулируют величину введенной диссипации. Алгоритм имеет три настроечных параметра: численные коэффициенты α, Sc^{QGD} и Pr^{QGD}. Далее Sc^{QGD} и Pr^{QGD} будем называть Sc и Pr. Во всех дальнейших расчетах варьируются только первые два из них, коэффициент Pr полагается равным единице. Как показывает практика расчетов, влияние этого параметра на результаты незначительно при значениях $Pr \sim 1$.

Граничные условия для системы (4) ставятся следующим образом: на входной границе поддерживаются заданные условия набегающего потока (1)

$$u = u_u, \quad v = 0, \quad p = p_u, \quad T = T_u,$$

на выходной – правой границе – используются мягкие условия сноса в виде равенства нулю производных по x всех газодинамических величин. Специальные дозвуковые условия не применяются. На верхней и нижней границах области поддерживаются условия стенки со скольжением, а именно

$$\partial u / \partial y = 0, \quad v = 0, \quad \partial T / \partial y = 0, \quad \partial p / \partial y = 0.$$

Расчет задачи ведется до безразмерного времени $t = 0.7$.

Особенности реализации в пакете OpenFOAM

Численное моделирование в пакете OpenFOAM предполагает использование всех величин в размерном виде в системе единиц Си. В рассматриваемой задаче исходные величины согласно [1,2] заданы в безразмерном виде. Для перевода их в размерный вид учитываем, что R=1, поэтому значение $C_p=\gamma R/(\gamma-1)=3.5$, $R=R^{\star}/M$, где $R^{\star}$ – универсальная газовая постоянная, поэтому величина молярной массы газа выбирается в виде M=8314 г/моль.

Размерные величины для данной задачи приведены в табл.1.

Таблица 1. Параметры газа в размерном виде.

Величина	Значение
Молярная масса M	8.314 кг/моль
Газовая постоянная R	1 Дж/(кг$\cdot$K)
Показатель адиабаты γ	1.4
Теплоемкость при постоянном давлении C_p	3.5 Дж/(кг$\cdot$K)

Задание условий на границах области расчета приведено в табл.2.

Таблица 2. Задание граничных условий.

	inlet	**outlet**	**walls**
p	1	zeroGradient	zeroGradient
U	(1.7748 0.0 0.0)	zeroGradient	slip
T	1	zeroGradient	zeroGradient

Программа OpenFOAM реализует трехмерное течение, поэтому в столбце для задания скорости задаются ее три компоненты. Расчетная сетка и начальные условия задаются в словарях пакета OpenFOAM. Значение параметров настройки алгоритма α и *Sc* осуществляется в разделе QGD словаря thermophysicalProperties папки constant.

Результаты расчетов с использованием QGDFoam сравнивались с данными, полученными на основе вычислительного ядра с решателем rhoCentralFoam. Указанный решатель используется для расчета сжимаемых течений и основан на так называемых центрально-разностных схемах Курганова, которые представляют собой варианты схем типа Годунова повышенного порядка точности [6]. Для решателя rhoCentralFoam применялись различные варианты ограничители $\psi(r)$, вид которых зависит от градиента функции V в двух соседних ячейках сетки [7], где аргумент функции r вычисляется как

$$r=\left(V_p^n-V_{p-1}^n\right)\Big/\left(V_{p+1}^n-V_p^n\right).$$

В первом случае применялась схема VanLeer, которая имеет 2-й порядок аппроксимации, при этом используемый ограничитель равен $\psi(r)=(r+|r|)/$ $/(1+|r|)$; во втором – схема Minmod, имеющая 1-й порядок аппроксимации, при этом $\psi(r) = \max(\min(r,1),0)$; в третьем случае – противопоточная схема первого порядка (upwind), при этом ограничитель не используется и полагается $r = 0$.

Способ интерполяции значений из центра ячейки на ее грани описывается в словаре fvSchemes в разделе interpolationSchemes. Все использованные в расчетах решатели были записаны в форме, адаптированной для решения уравнений Эйлера.

Результаты расчетов

При численном моделировании эволюции данного течения формируются сложные газодинамические конфигурации с возникновением различного рода неустойчивостей, которые носят как физический, так и вычислительный характер. В течении могут возникать, в частности, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца в зоне искривления ударной волны, которое вызывается взаимодействием с ней вихревого образования. Такие неустойчивости имеют невязкий характер и должны описываться в рамках уравнений Эйлера в двумерном рассмотрении. Присутствие в вычислительной модели вязких эффектов может вызывать формирование неустойчивости вязкого типа, например, волн Толмина-Шлихтинга. Все эти особенности течения сопровождаются акустическими эффектами. Различить физическую и вычислительную природу неустойчивостей сложно. Алгоритмы с применением ограничителей потоков помимо искусственных могут исключить и физически оправданные колебания.

В [1] используются варианты метода Годунова повышенного порядка точности с их адаптацией для решения поставленной задачи. Подавление неустойчивостей проводится с помощью введения дополнительной искусственной диссипации, которая заменяет собой коэффициент динамической вязкости в слагаемых Π_{NS} нелинейным коэффициентом, пропорциональным квадрату шага пространственной сетки. Детали указанного алгоритма и особенности его программной реализации на примере одномерных и двумерных задач дополнительно приведены в [8]. Алгоритм [1] был специальным образом адаптирован под задачу о взаимодействии вихря с ударной волной. В частности, для построения референсного решения на сетке с шагами $h = 1/1200$ скорости перед и после ударной волны пересчитывались специальным образом для обеспечения неподвижности ударной волны и избежания вычислительных проблем, связанных с расчетом медленно движущегося скачка.

В КГД алгоритме устойчивость расчета обеспечивается τ-слагаемыми.

Дополнительное подавление осцилляций регулируется величиной числа Шмидта *Sc*, которое входит в коэффициент искусственной диссипации μ^{QGD} и может варьироваться. Заметим, что все искусственные диссипативные слагаемые пропорциональны шагу пространственной сетки. Последнее делает КГД алгоритм методом первого порядка аппроксимации по пространству, в то время как аппроксимация всех пространственных производных осуществляется со вторым порядком точности.

В наших расчетах применялась последовательность сгущающихся сеток с квадратными ячейками размером 1/400, 1/800 и 1/1600.

Расчеты производились на гибридном вычислительном кластере К-100 (https://www.kiam.ru/MVS/resourses/k100.html). Использовалось от 1 до 36 процессоров.

Результаты расчетов представлены в виде полей градиента плотности. На рисунках изображены поля величин Schlieren, которая в соответствии с [1] вычисляется в виде $Sch = \ln(1+|\nabla\rho|)/\ln(10)$ с пределами изменения величины в диапазоне (0.1 – 2.0 или 2.4).

Расчеты с использованием КГД алгоритма

Развитие течения на последовательные моменты времени $t = 0.1$, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 и 0.7 показано на рис.3 с параметрами расчета α=0.5, *Sc*=0.0 на самой грубой сетке с шагом по пространству *h*=1/400. Из последовательности рисунков видно, что к моменту времени *t*=0.3 вихрь проходит сквозь стоячую ударную волну, искажая ее профиль. К моменту времени *t*=0.5 профиль ударной волны возвращается к состоянию, близкому к исходному. Видны многочисленные взаимодействия отраженных скачков и ударных волн. На время сравнения 0.7 центр вихря находится в точке (1.02, 0.49).

На рис.4 приведены расчеты с поиском наиболее близкого к эталонному [1] решения, которые проясняют влияние диссипативных коэффициентов α и *Sc*. Расчеты проведены на сетке с шагом *h*=1/1600. Лучший результат (нижний рисунок) был получен для значений α=0.1, *Sc*=0.1. На нем видно характерное разделение плотности на две части в центре вихря и более четкие ударные волны у стенок и на выходе справа, чем на двух верхних рисунках. При расчете с α=0.2, *Sc*=1.0 центр вихря представляется менее рельефным. При расчете с α=0.2, *Sc*=0.0 центр вихря почти совпадает с лучшим расчетом, но ударные волны выглядят более размытыми. При необходимости возможно провести более тонкую настройку диссипативных коэффициентов, в частности, использовать значения диссипативных коэффициентов, зависящих от локальных значений газодинамических полей.

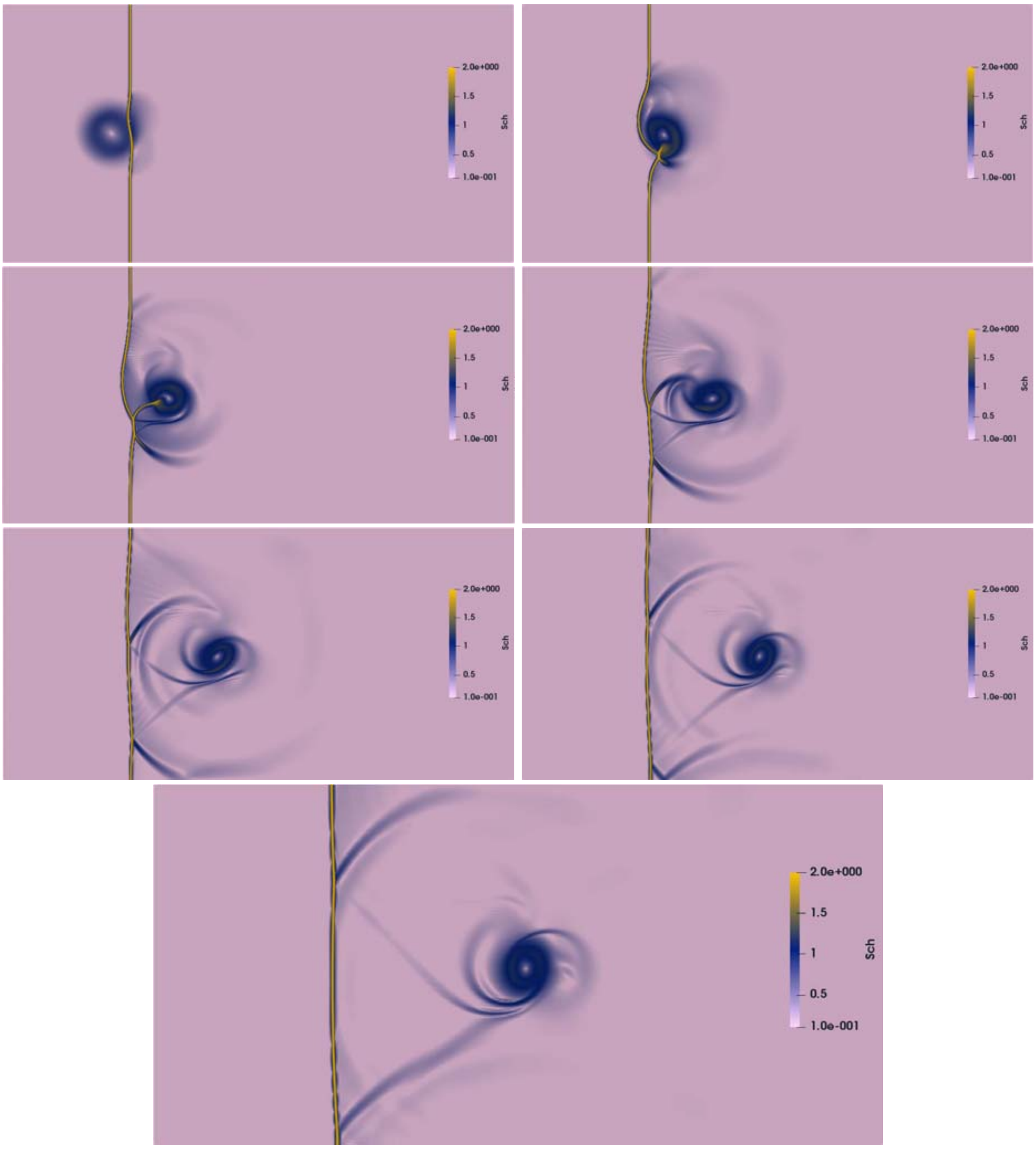

Рис.3. Развитие течения (Schlieren), слева направо, при t=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7. Сетка h=1/400, $\alpha = 0.5$, $Sc = 0.0$.

Приведенные картины показывают, что варьирование диссипативных коэффициентов позволяет с разной степенью эффективности подавлять осцилляции, возникающие в газодинамическом течении. Таким образом, пользователь может явным образом регулировать этот процесс и обеспечить подавление нефизичных осцилляций и сохранение колебаний решения, которые носят естественный характер.

Для количественного сопоставления расчетов на приведенных далее рисунках показаны распределения плотности вдоль двух выделенных вертикальных линий. Указанные линии выбраны в соответствии с [1] (линия 3, $x = 0.52$) и [2] (линия 5, $x = 1.65$). Для сравнения результатов вдоль линии 3 приведены эталонные данные из [1], вдоль линии 5 – из [2].

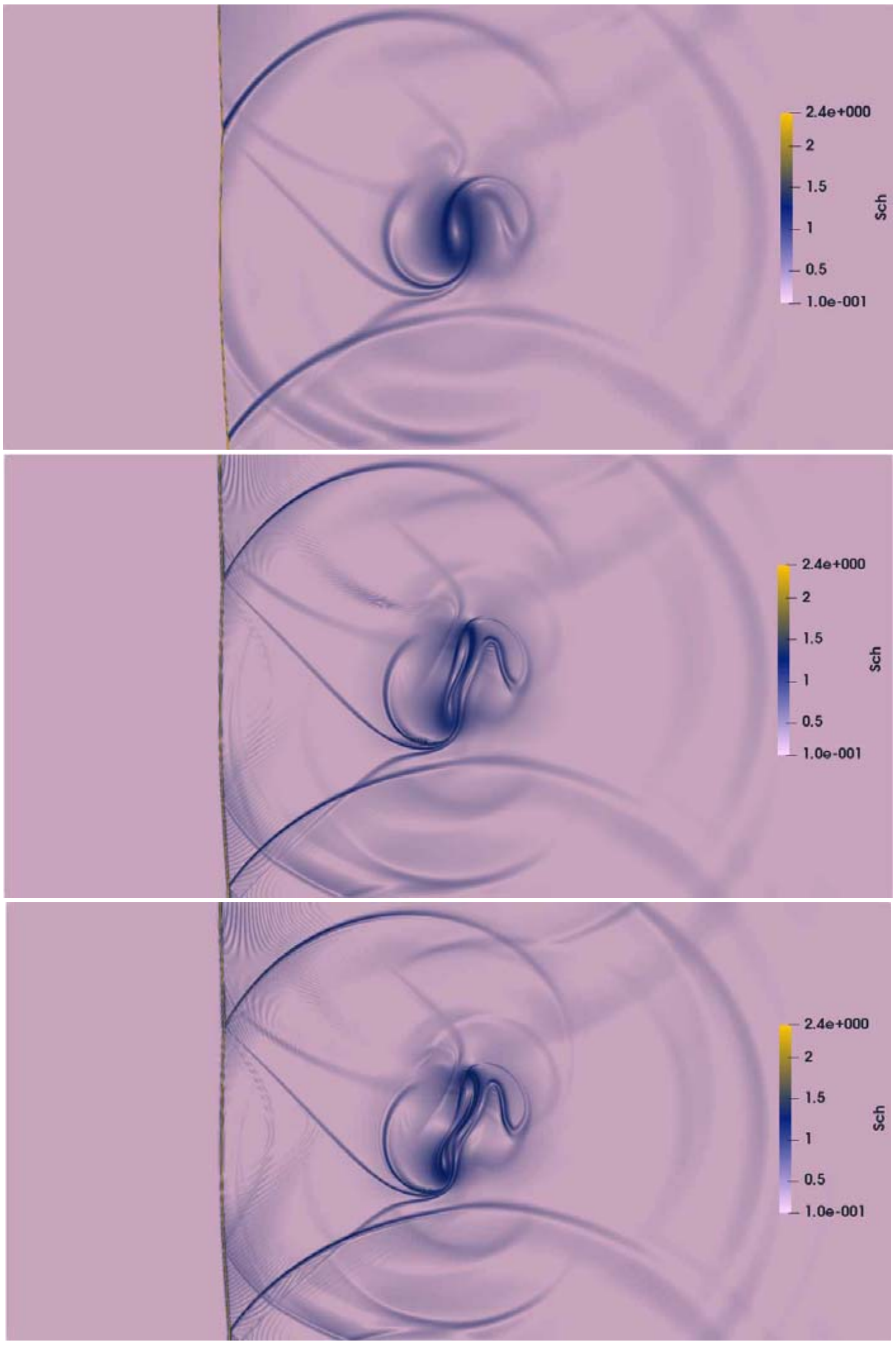

Рис.4. t=0.7. Сетка h=1/1600, сверху вниз: α=0.2, Sc=1.0; α=0.2, Sc=0.0; α=0.1, Sc=0.1.

На рис.5 показана сходимость по сетке для плотности ρ вдоль линий 3 и 5 при $\alpha = 0.2$, $Sc = 0.0$. Приведены распределения для сеток с шагами $h = 1/400, 1/800, 1/1600$. Графики демонстрируют монотонную сходимость решения при сгущении пространственной сетки.

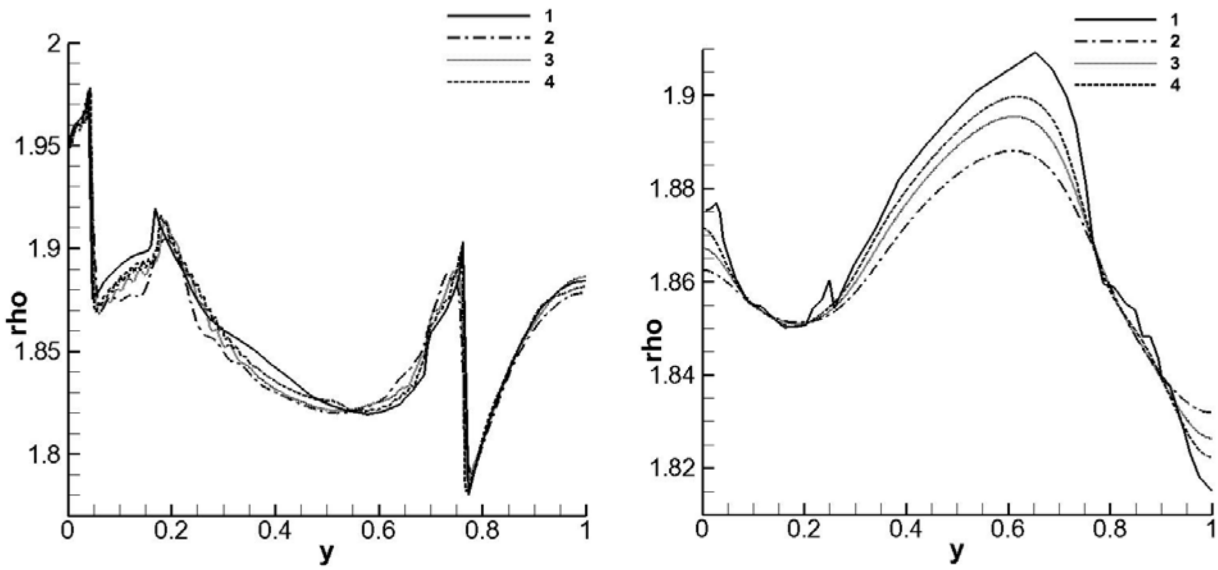

Рис.5. Сходимость по сетке. Плотность ρ вдоль линий 3 ($x = 0.52$ – левый рисунок) и 5 (x=1.65 – правый рисунок), α=0.2 , Sc=0.0 для пространственных сеток с шагами h=1/400(2), $1/800(3)$, $1/1600(4)$, 1 – эталонное решение.

На рис.6 показана зависимость численного решения задачи от величины параметра сглаживания α для плотности ρ вдоль тех же линий на сетке h=1/400 при Sc=0.0. Оба графика показывают сходимость решения при уменьшении параметра диссипации. При этом для линии 3 значение α=0.1 оказывается недостаточным для подавления осцилляций за ударной волной. В то же время линия 5 расположена в зоне достаточно гладкого решения, и в этой зоне коэффициент диссипации может быть уменьшен до значений 0.05.

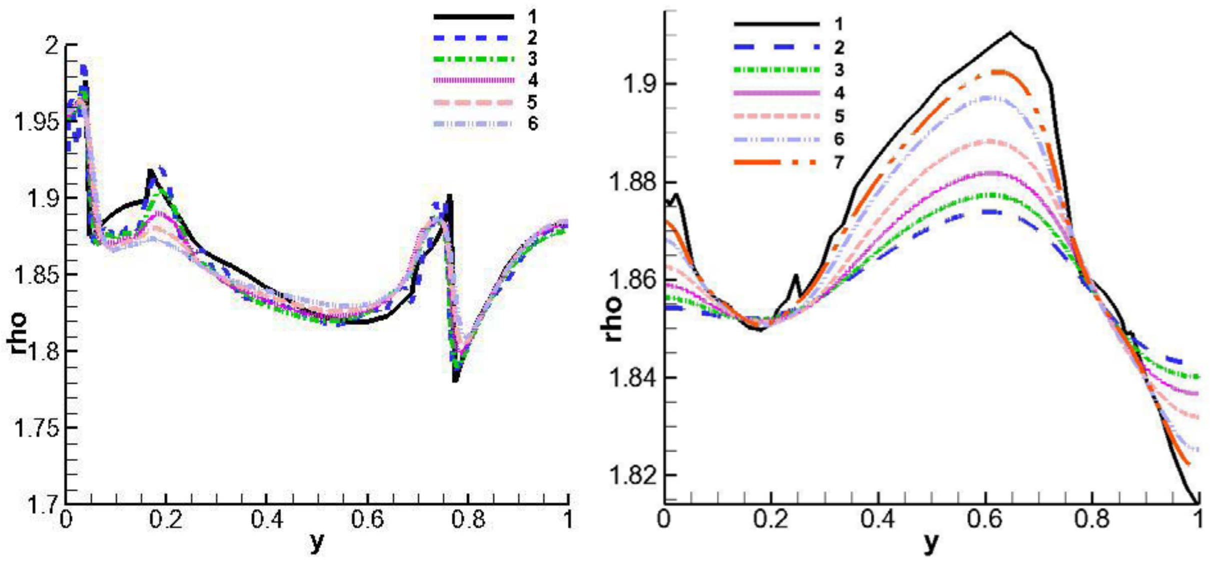

Рис.6. Сходимость по параметру α. Плотность ρ вдоль линий 3 и 5, сетка h=1/400. 1) эталонное решение, 2) α=0.5, 3) α=0.4, 4) α=0.3, 5) α=0.2, 6) α=0.1, 7) α=0.05.

Расчеты с использованием вариантов решателя rhoCentralFoam

На рис.7 приведены расчеты на момент времени t=0.7 для исходной сетки h=1/400. Сравниваются расчеты с решателями QGDFoam α=0.5, Sc=0.0 и тремя вариантами решателя rhoCentralFoam, использующими ограничители upwind, Minmod и VanLeer. Число Куранта у всех схем составляет 0.2, за исключением rhoCentralFoam VanLeer, для которого приведен наилучший вариант расчета для числа Куранта 0.1.

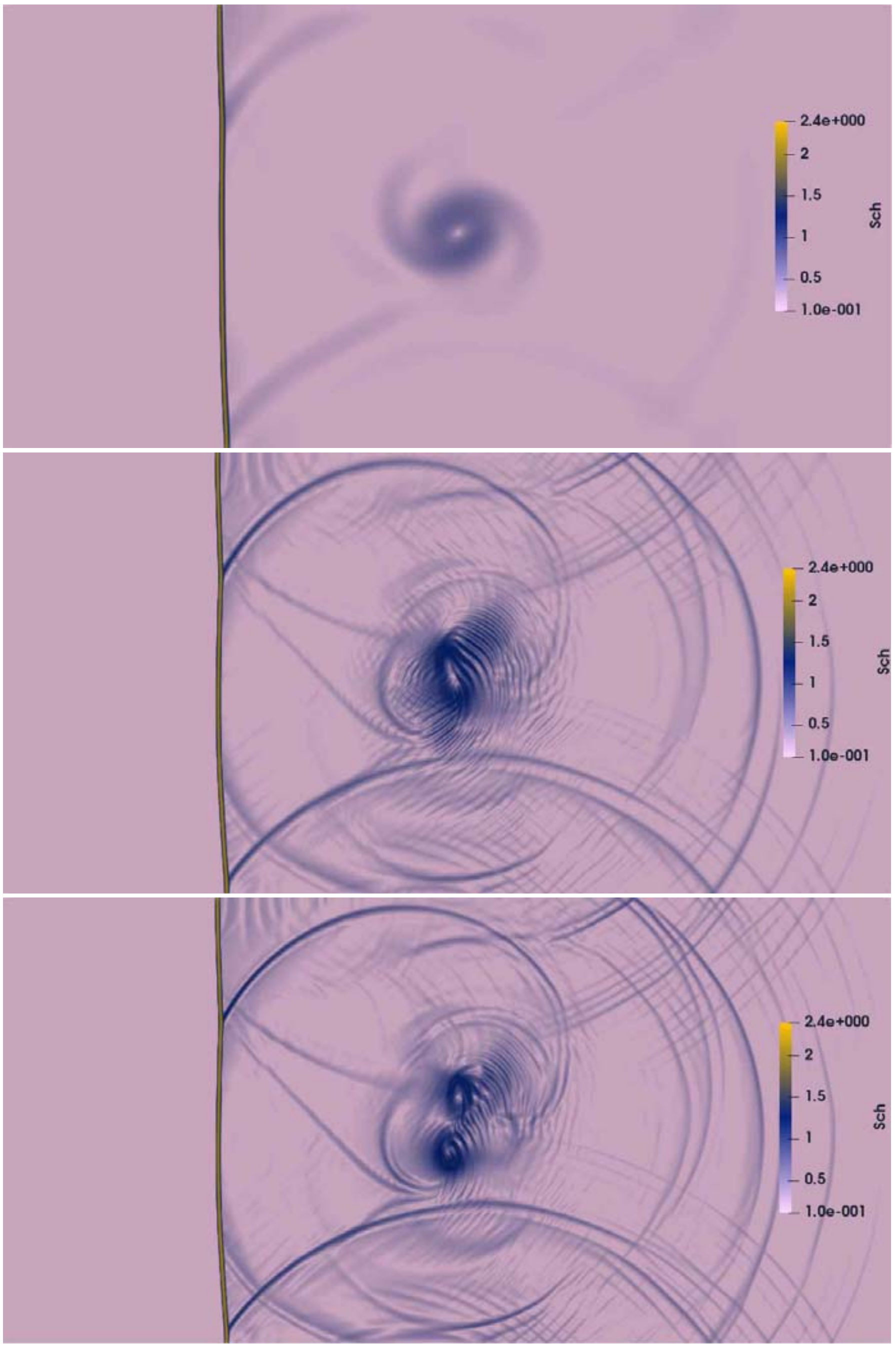

Рис.7. t=0.7. Сетка h=1/400, решатели с ограничителями upwind, Minmod и VanLeer (сверху вниз).

Из приведенных графиков следует, что схемы второго порядка аппроксимации с ограничителями VanLeer и первого порядка Minmod вносят большое количество осцилляций в решение и оказываются далекими от эталона. Схема первого порядка upwind оказывается сильно диссипативной и сглаживает решение существенно больше, чем первые два метода, и больше, чем КГД алгоритм, разностная схема для которого также имеет первый порядок аппроксимации по пространству. Общая структура на указанной сетке лучше всего прорисовывается методом КГД, см. рис.3.

На рис.8 приведены графики плотности ρ вдоль линий 3 и 5 на сетке h=1/400 для тех же решателей. Для сравнения на графики добавлен результат, полученный для КГД алгоритма при α=0.05, Sc=0.0. Эти графики показывают, что профили, полученные по методике upwind и КГД, оказываются близкими при больших значениях коэффициента КГД диссипации α=0.5. При малых значениях этого коэффициента α=0.1 или 0.05 результаты КГД расчетов близки к результатам, полученным по схемам второго порядка точности с ограничителем VanLeer. Это согласуется с оценкой порядка аппроксимации КГД схем, который имеет вид $O(\alpha h)$ при $\alpha > \alpha_{\min} > 0$, где $\alpha_{\min}$ – некоторый минимальный коэффициент, обеспечивающий устойчивость численного алгоритма.

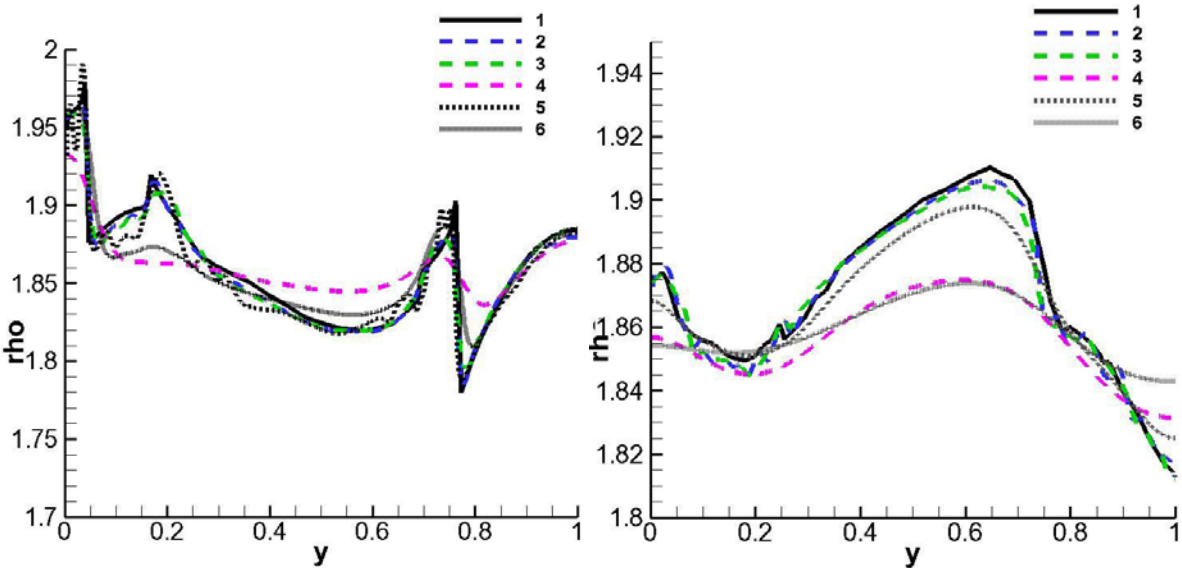

Рис.8. Плотность ρ вдоль линий 3 и 5, сетка h=1/400, 1) эталонное решение, 2) VanLeer с числом Куранта Co=0.1, 3) Minmod, 4) upwind, 5) КГД, α=0.1, Sc=0.0, 6) КГД, α=0.5, Sc=0.0.

Обсуждение результатов

На примере решения тестовой задачи о нестационарном взаимодействии вихревого течения с ударной волной были проанализированы особенности КГД алгоритма, включенного в открытую платформу OpenFOAM, совместно с тремя другими вычислительными ядрами, включенными в эту же платформу – вариантами решателя rhoCentralFoam с ограничителями второго порядка точности VanLeer и ограничителями первого порядка точности Minmod и upwind. Приведена детальная постановка задачи и сравнение результатов расчета с данными других методов.

Было показано, что КГД алгоритм успешно решает поставленную задачу, результаты расчетов монотонно сходятся к решению, рассматриваемому в качестве эталонного, при сгущении пространственной сетки. При уменьшении коэффициентов диссипации до предела устойчивости алгоритма его точность также возрастает. При малых значениях диссипативных коэффициентов результаты КГД расчетов близки в результатам, полученным по схеме второго порядка точности, а при больших значениях – к результатам расчетов по схеме первого порядка точности с направленными разностями. Достаточно простая регулировка диссипативных коэффициентов в КГД алгоритме позволяет настраивать его для получения решения с нужной точностью.

Для оценки вычислительной эффективности методов в табл.3 приведено сравнение времени счета задачи при ее реализации на одном процессоре вычислительной системы К100. Рассматривался пример решения задачи на 1000 временных шагах на сетке $h = 1/400$, то есть на сетке с числом точек 800×400. Приведенные результаты получены после усреднения времени счета по пяти вариантам расчета для каждой схемы. Представлены времена счета для QGDFoam, QGDFoam reduced, rhoCentralFoam Vanleer, rhoCentralFoam Minmod, rhoCentralFoam upwind.

Наиболее затратным является алгоритм QGDFoam, что объясняется вычислительной сложностью расчета τ слагаемых, включающих в себя смешанные пространственные производные. В варианте QGDFoam reduced эти смешанные производные отключены, и алгоритм оказывается менее затратным в вычислительном плане. При этом в данной задаче результаты расчета по обоим вариантам алгоритма оказываются достаточно близкими. Варианты rhoCenrtalFoam с указанными ограничителями более эффективны с точки зрения времени расчета, однако точность решения и качественный вид полученных распределений плотности оказываются невысокими.

Таблица 3. Время расчета в секундах 1000 шагов на сетке 800×400.

QGDFoam	QGDFoam reduced	rhoCentralFoam VanLeer	rhoCentralFoam Minmod	rhoCentralFoam upwind
18.3	13.8	10.9	10.0	6.2

Таким образом в результате выполнения работы было показано, что разностная схема первого порядка аппроксимации, построенная на основе КГД уравнений, при соответствующем подборе численных коэффициентов в искусственных диссипативных слагаемых с достаточной точностью решает поставленную задачу. Полученные результаты показывают, что для увеличения точности расчетов переход к алгоритмам высокого порядка аппроксимации может быть успешно дополнен применением алгоритмов первого порядка аппроксимации с сильно нелинейными и тонко настроенными диссипативными слагаемыми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rodionov A.V.* Simplified artificial viscosity approach for curing the shock instability // Computers and Fluids, 2021, 219, 104873.
2. 5th International workshop on hight-order CFD methods, https://how5.cenaero.be/.
3. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007;
   Elizarova T.G. Kvazigazodinamicheskie uravneniia i metody rascheta viazskikh techenii. – M.: Nauchnyi mir, 2007.
4. *Елизарова Т.Г.* Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т.51, №11, с.2096-2105;
   Elizarova T.G. Time averaging as an approximate technique for constructing quasi-gas-dynamic and quasi-hydrodynamic equations // CM&MP, 2011, v.51, №11, p.1973-1982.
5. *Kraposhin M.V., Smirnova E.V., Elizarova T.G., Istomina M.A.* Development of a new OpenFOAM solver using regularized gas dynamic equations // Comput. Fluids, 2018, v.166, p.163-175.
6. *Kurganov Alexander, Tadmor Eitan*. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations // Journal of Computational Physics, 2000, v.160, №1, p.241-282. URL: http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000. 6459.
7. *Elghorab M., Madhav Rao V.C., Wen J.X.* Evaluating the capability of the flux-limiter schemes in capturing the turbulence structures in a fully developed channel flow // International Journal of Aerospace and Mechanical Eng., 2018, v.12, №2, p.175-181.
8. *Тагирова И.Ю., Родионов А.В.* Применение искусственной вязкости для борьбы с карбункул-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование, 2015, т.27, №10, с.47-64;
   англ. пер.: *Tagirova I.Yu., Rodionov A.V.* Application of Artificial Viscosity for Suppressing the Carbuncle Phenomenon in Godunov-Type Schemes // Math. Models Comput. Simul., 2016, v.8, №3, p.249-262.

Поступила в редакцию 12.04.22
После доработки 02.06.22
Принята к публикации 27.06.22