ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1981 МАТЕМАТИКА № 9 (232)

В. С. Ким, М. Д. Солодовникова, В. В. Кузнецов УДК 514.8

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

Пусть Φ_1 и Φ_2—регулярные замкнутые ориентируемые четномерные гиперповерхности в евклидовом пространстве E^{n-1}. Введем на Φ_1 и Φ_2 единые локальные параметры $x^1, \dots, x^n$ и следующие обозначения:

$$\mathrm{I}_1 = a^1_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta, \quad \mathrm{I}_2 = a^2_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta, \quad \mathrm{II}_1 = b^1_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta, \quad \mathrm{II}_2 = b^2_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta,$$

$$a_1 = \det(a^1_{\alpha\beta}), \quad a_2 = \det(a^2_{\alpha\beta}), \quad \lambda^1_{\alpha\beta} = a_1^{1/(2-2n)}\,b^1_{\alpha\beta}, \quad \lambda^2_{\alpha\beta} = a_2^{1/(2-2n)}\,b^2_{\alpha\beta},$$

$$a^i_\alpha = (a^i_{1\alpha}, \dots, a^i_{n\alpha}), \quad b^i_\alpha = (b^i_{1\alpha}, \dots, b^i_{n\alpha}), \quad \lambda^i_\alpha = (\lambda^i_{1\alpha}, \dots, \lambda^i_{n\alpha}),$$

$$\det(b^i_{\alpha\beta}) = [b^i_1, \dots, b^i_n], \quad \det(\lambda^i_{\alpha\beta}) = [\lambda^i_1, \dots, \lambda^i_n], \quad \Delta b_{\alpha\beta} = b^2_{\alpha\beta} - b^1_{\alpha\beta},$$

$$\Delta\lambda_{\alpha\beta} = \lambda^2_{\alpha\beta} - \lambda^1_{\alpha\beta}, \quad \det(\Delta b_{\alpha\beta}) = [\Delta b_1, \dots, \Delta b_n], \quad \det(\Delta\lambda_{\alpha\beta}) = [\Delta\lambda_1, \dots, \Delta\lambda_n],$$

$\Delta\Gamma^i_{\alpha\beta} = \overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha\beta} - \overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha\beta}$ — разности коэффициентов Кристоффеля Φ_2 и Φ_1, $\Delta A_{\alpha\beta}$—минор для элемента $\Delta\lambda_{\alpha\beta}$ в определителе $\det(\Delta\lambda_{\alpha\beta})$,

$$\overset{i}{B}{}^k_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{11} & \dots \lambda^i_{1k} & \dots \Delta\lambda_{1,\beta-1} & \Delta\lambda_{1,\beta+1} & \dots \Delta\lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\lambda_{\alpha-1,1} & \dots \lambda^i_{\alpha-1,k} & \dots \Delta\lambda_{\alpha-1,\beta-1} & \Delta\lambda_{\alpha-1,\beta+1} & \dots \Delta\lambda_{\alpha-1,n} \\ \Delta\lambda_{\alpha+1,1} & \dots \lambda^i_{\alpha+1,k} & \dots \Delta\lambda_{\alpha+1,\beta-1} & \Delta\lambda_{\alpha+1,\beta+1} & \dots \Delta\lambda_{\alpha+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\lambda_{n1} & \dots \lambda^i_{nk} & \dots \Delta\lambda_{n,\beta-1} & \Delta\lambda_{n,\beta+1} & \dots \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, знаком $\overset{j}{\vee}$ будем отмечать пропуск j-столбца.

Пусть $\varphi(x^1, \dots, x^n)$—вектор-функция, задающая Φ_1, ν—единичный вектор нормали к Φ_1. Целью данной статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Для регулярных замкнутых ориентируемых четномерных гиперповерхностей Φ_1 и Φ_2 в E^{n+1} справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Phi_1} a_1^{1/(2n-2)} \{m([\Delta\lambda_1, \dots, \Delta\lambda_n] - [\lambda^2_1, \dots, \lambda^2_n] + [\lambda^1_1, \dots, \lambda_n]) - \Delta H\}(\nu, \varphi)\,dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n +$$

$$+ \int\limits_{\Phi_1} \Bigg\{ \sum_{j=1}^n \Bigg(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha\neq k)}}^n \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{11} & \dots \overset{k}{\vee} & \Delta\lambda_{1k} & \dots \Delta\Gamma^p_{1\alpha}\lambda^1_{kp} & \dots \Delta\lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\lambda_{j-1,1} & \dots \Delta\lambda_{j-1,k} & \dots & \Delta\Gamma^p_{j-1,\alpha}\lambda^1_{kp} & \dots \Delta\lambda_{j-1,n} \\ \Delta\lambda_{j+1,1} & \dots \Delta\lambda_{j+1,k} & \dots & \Delta\Gamma^p_{j+1,\alpha}\lambda^1_{kp} & \dots \Delta\lambda_{j+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta\lambda_{n1} & \dots \Delta\lambda_{nk} & \dots & \Delta\Gamma^p_{n\alpha}\lambda^1_{kp} & \dots \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} \sum_{l=1}^{n-1} \overset{1}{B}{}^l_{jk} \sum_{\alpha=1}^n \Delta\Gamma^\alpha_{k\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{11} & \dots \Delta\Gamma^j_{1\alpha} & \dots \Delta\lambda_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Delta\lambda_{n1} & \dots \Delta\Gamma^j_{n\alpha} & \dots \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix} \Bigg) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}, \varphi\right) \Bigg\} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \int\limits_{\Phi_2} \Bigg(\sum_{\alpha=1}^n [\Delta\lambda_1, \dots, a^1_\alpha, \dots, \Delta\lambda_n] \Bigg) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \tag{1}$$

где

$$m=\frac{n}{2},\quad \Delta H=\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r(m-r)\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_r=1}^{n-1}([\lambda_1^2,\dots,\lambda_{\alpha_1}^1,\dots,\lambda_{\alpha_r}^1,\dots,\lambda_n^2]-$$
$$-[\lambda_1^1,\dots,\lambda_{\alpha_1}^2,\dots,\lambda_{\alpha_r}^2,\dots,\lambda_n^1]).$$

Замечание 1. Формула (1) является обобщением по размерности формулы А. Д. Александрова [1] и результата [4].

Замечание 2. Если гиперповерхности Φ_1 и Φ_2 изометричны и установленное между ними соответствие действительно и есть изометрия, то из формулы (1) получим многомерный аналог формулы Герглотца [2]:

$$\int_{\Phi_1}\frac{1}{a}\,(m[\Delta b_1,\dots,\Delta b_n]-\Delta H')(\nu,\varphi)\,d\sigma=\int_{\Phi_2}\frac{1}{a}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n}[\Delta b_1,\dots,a_\alpha,\dots,\Delta b_n]\Big)\,d\sigma,$$

$$\Delta H'=\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^r(m-r)\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_r=1}^{n-1}([b_1^2,\dots,b_{\alpha_1}^1,\dots,b_{\alpha_r}^1,\dots,b_n^2]-$$
$$-[b_1^1,\dots,b_{\alpha_1}^2,\dots,b_{\alpha_r}^2,\dots,b_n^1]).$$

Пусть $M_1\subset\Phi_1$ и $M_2\subset\Phi_2$—соответствующие (по равенству локальных координат) односвязные области, лежащие в одной карте, и M—соответствующая им область на плоскости параметров $x^1,\dots,x^n$. Будем считать, что на Φ_1 выбрана ориентация, а ориентация на Φ_2 порождается ориентацией на Φ_1 и соответствием по равенству локальных координат.

Введем в рассмотрение векторы

$$P_i=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha+1}A_{\alpha i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$$

и дифференциальную форму

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}(P_i,\varphi)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\dots\wedge dx^n.$$

По формуле Стокса получим

$$\int_{\partial M}^{(n-1)}\alpha=\int_M^{(n)}d\alpha=\int_M\Big\{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\Big(P_i,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial P_i}{\partial x^i},\varphi\Big)\Big\}dx^1\wedge\dots\wedge dx^n. \tag{2}$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1 [2]. *Справедливы равенства*

$$\frac{\partial\Delta\lambda_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\Delta\lambda_{jk}}{\partial x^i}=\overset{2}{\Gamma}{}_{jk}^p\lambda_{ip}^2-\overset{1}{\Gamma}{}_{jk}^p\lambda_{ip}^1-\overset{2}{\Gamma}{}_{ik}^p\lambda_{jp}^2+\overset{1}{\Gamma}{}_{ik}^p\lambda_{jp}^1-$$
$$-\frac{1}{n-1}\Big(\lambda_{ik}^2\sum_{\alpha=1}^{n}\overset{2}{\Gamma}{}_{j\alpha}^\alpha-\lambda_{ik}^1\sum_{\alpha=1}^{n}\overset{1}{\Gamma}{}_{j\alpha}^\alpha\Big)+\frac{1}{n-1}\Big(\lambda_{jk}^2\sum_{\alpha=1}^{n}\overset{2}{\Gamma}{}_{i\alpha}^\alpha-\lambda_{jk}^1\sum_{\alpha=1}^{n}\overset{1}{\Gamma}{}_{i\alpha}^\alpha\Big), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\Big(P_i,\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\Big)=\sum_{\alpha=1}^{n}[\Delta\lambda_1,\dots,a_\alpha^1,\dots,\Delta\lambda_n], \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}[\Delta\lambda_1,\dots,\lambda_\alpha^1,\dots,\Delta\lambda_n]-m([\lambda_1^2,\dots,\lambda_n^2]-[\lambda_1^1,\dots,\lambda_n^1])+m[\Delta\lambda_1,\dots,\Delta\lambda]=$$

$$= \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^r (m-r) \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r = 1}^{n-1} ([\lambda_1^2, \ldots, \lambda_{\alpha_1}^1, \ldots, \lambda_{\alpha_r}^1, \ldots, \lambda_n^2] -$$

$$- [\lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\alpha_1}^2, \ldots, \lambda_{\alpha_r}^1, \ldots, \lambda_n^1]). \tag{5}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \Delta A_{ji}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j+1} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha \neq k)}}^{n} \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{11} & \ldots & \overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{1k} & \ldots & \Delta\Gamma_{1\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{j-1,1} & \ldots & \Delta\lambda_{j-1,k} & \ldots & \Delta\Gamma_{j-1,\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{j-1,n} \\ \Delta\lambda_{j+1,1} & \ldots & \Delta\lambda_{j+1,k} & \ldots & \Delta\Gamma_{j+1,\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{j+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{n1} & \ldots & \Delta\lambda_{nk} & \ldots & \Delta\Gamma_{n\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j+1} \sum_{l=1}^{n-1} \overset{1}{B}{}_{jk}^{l} \sum_{\alpha=1}^{n} \Delta\Gamma_{k\alpha}^{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{11} & \ldots & \overset{2}{\Gamma}{}_{1\alpha}^{j} & \ldots & \Delta\lambda_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{n1} & \ldots & \overset{2}{\Gamma}{}_{n\alpha}^{j} & \ldots & \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $j = 1$. Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \Delta A_{1i}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \sum_{\alpha=k+1}^{n} \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{21} & \ldots & \overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{2k} & \ldots & \dfrac{\partial \Delta\lambda_{2\alpha}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Delta\lambda_{2k}}{\partial x^\alpha} & \ldots & \Delta\lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{n1} & \ldots & \Delta\lambda_{nk} & \ldots & \dfrac{\partial \Delta\lambda_{n\alpha}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial \Delta\lambda_{nk}}{\partial x^\alpha} & \ldots & \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix}.$$

Применяя (3), получим

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{\partial \Delta A_{1i}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha \neq k)}}^{n} \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{21} & \ldots & \overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{2k} & \ldots & \overset{2}{\Gamma}{}_{2\alpha}^p \lambda_{kp}^2 - \overset{1}{\Gamma}{}_{2\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{n1} & \ldots & \Delta\lambda_{nk} & \ldots & \overset{2}{\Gamma}{}_{n\alpha}^p \lambda_{kp}^2 - \overset{1}{\Gamma}{}_{n\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{l=1}^{n-1} \overset{2}{B}{}_{1k}^{l} \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{2}{\Gamma}{}_{k\alpha}^{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{l=1}^{n-1} \overset{1}{B}{}_{1k}^{l} \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{1}{\Gamma}{}_{k\alpha}^{\alpha} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha \neq k)}}^{n} \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{21} & \ldots & \overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{2k} & \ldots & \overset{2}{\Gamma}{}_{2\alpha}^p \Delta\lambda_{kp} & \ldots & \Delta\lambda_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{n1} & \ldots & \Delta\lambda_{nk} & \ldots & \overset{2}{\Gamma}{}_{n\alpha}^p \Delta\lambda_{kp} & \ldots & \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha \neq k)}}^{n} \begin{vmatrix} \Delta\lambda_{21} & \ldots & \overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{2k} & \ldots & \Delta\Gamma_{2\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\lambda_{n1} & \ldots & \Delta\lambda_{nk} & \ldots & \Delta\Gamma_{n\alpha}^p \lambda_{kp}^1 & \ldots & \Delta\lambda_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \Delta A_{1k} \sum_{\alpha=1}^{n} \overset{2}{\Gamma}{}_{\alpha k}^{\alpha} + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sum_{l=1}^{n-1} \overset{1}{B}{}_{1k}^{l} \sum_{\alpha=1}^{n} \Delta\Gamma_{k\alpha}^{\alpha}. \tag{6}$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left\{-\Delta A_{1k}\sum_{\alpha=1}^{n}\overset{2}{\Gamma}{}^{\alpha}_{k\alpha}+\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha\neq k)}}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{21}\ldots\overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{2k}\ldots\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{2\alpha}\Delta\lambda_{kp}\ldots\Delta\lambda_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\Delta\lambda_{nk}\ldots\overset{2}{\Gamma}{}^{p}_{n\alpha}\Delta\lambda_{kp}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=-\sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\overset{2}{\Gamma}{}^{1}_{1\alpha}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\overset{2}{\Gamma}{}^{1}_{n\alpha}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует утверждение леммы для случая $j=1$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial P_i}{\partial x^i}=\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j+1}\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha\neq k)}}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{1k}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{1\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{j-1,1}\ldots\Delta\lambda_{j-1,k}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{j-1,\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{j-1,n}\\ \Delta\lambda_{j+1,1}\ldots\Delta\lambda_{j+1,k}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{j+1,\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{j+1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\Delta\lambda_{nk}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{n\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j+1}\sum_{l=1}^{n-1}\overset{1}{B}{}^{l}_{jk}\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\Delta\Gamma^{j}_{1\alpha}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\Delta\Gamma^{j}_{n\alpha}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right\}+$$

$$+a_1^{1/(2n-2)}\{m([\lambda^2_1,\ldots,\lambda^2_n]-[\lambda^1_1,\ldots,\lambda^1_n]-[\Delta\lambda_1,\ldots,\Delta\lambda_n])+\Delta H\}\nu.$$

Доказательство. Используя деривационные формулы, получим

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial p_i}{\partial x^i}=\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial\Delta A_{1i}}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\overset{1}{\Gamma}{}^{1}_{1\alpha}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\overset{1}{\Gamma}{}^{1}_{n\alpha}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}+$$

$$+\ldots+\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\partial\Delta A_{ni}}{\partial x^i}+\sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\overset{1}{\Gamma}{}^{n}_{1\alpha}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\overset{1}{\Gamma}{}^{n}_{n\alpha}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x^n}+$$

$$+a_1^{1/(2n-2)}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\lambda^{1}_{1\alpha}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\lambda^{1}_{n\alpha}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}\right)\nu.$$

Отсюда и из равенства (5) и леммы 2 вытекает утверждение леммы 3.

Переходим к доказательству теоремы. Из равенств (4), (3) и леммы 3 вытекает, что

$$\int_{\partial M}\alpha=\int_{M_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}[\Delta\lambda_1,\ldots,a^1_\alpha,\ldots,\Delta\lambda_n]\right)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n+$$

$$+\int_{M_1}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j+1}\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha\neq k)}}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\overset{k}{\vee}\Delta\lambda_{1k}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{1\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{j-1,1}\ldots\Delta\lambda_{j-1,k}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{j-1,\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{j-1,n}\\ \Delta\lambda_{j+1,1}\ldots\Delta\lambda_{j+1,k}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{j+1,\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{j+1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\Delta\lambda_{nk}\ldots\Delta\Gamma^{p}_{n\alpha}\lambda^{1}_{kp}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}+\right.$$

$$+\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j+1}\sum_{l=1}^{n-1}\overset{1}{B}{}'_{jk}\sum_{\alpha=1}^{n}\Delta\Gamma^{\alpha}_{k\alpha}-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{n}\begin{vmatrix}\Delta\lambda_{11}\ldots\Delta\Gamma^{j}_{1\alpha}\ldots\Delta\lambda_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta\lambda_{n1}\ldots\Delta\Gamma^{j}_{n\alpha}\ldots\Delta\lambda_{nn}\end{vmatrix}\Big)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{j}},\varphi\Big)\Big\}dx^{1}\wedge\ldots\wedge dx^{n}+$$

$$+\int\limits_{M_1}a_1^{1/(2n-2)}\{m([\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2]-[\lambda_1^1,\ldots,\lambda_n^1]-[\Delta\lambda_1,\ldots,\Delta\lambda_n])+\Delta H\}(\nu,\varphi)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь триангуляцию поверхности Φ_1 (см., напр., [3]), и пусть каждая область этой триангуляции лежит в одной карте. Поскольку поверхность Φ_1 ориентируема и замкнута, то, просуммировав равенства (8) по всем областям триангуляции, получим утверждение теоремы.

В заключение отметим, что полученные нами результаты могут быть использованы при исследовании проблемы однозначной определенности поверхностей в евклидовом пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформаций поверхностей.—УМН, т. III, вып. 2, 1948, с. 47—158.

2. Ким В. С. Многомерный аналог формулы Герглотца.—Изв. вузов. Матем., 1980, № 6, с. 30—33.

3. Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования.—М., 1960.—с. 534.

4. Ким В. С., Кузнецов В. В., Солодовникова М. Д. Многомерный аналог одной формулы А. Д. Александрова. Вопросы глобальной геометрии.— Л., 1979, с. 40—42.

г. Хабаровск

Поступила
9 IV 1979