

## ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С УРАВНЕНИЕМ ДИРАКА

Настоящая работа посвящена изучению некоторых нелинейных эволюционных уравнений с помощью гамильтонова формализма классической механики и формализма обратной задачи рассеяния для системы Дирака.

Рассматривается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} u_t &= u_{xx} - 2u|u|^2; & u(x,t)|_{t=0} &= u(x); \\ -\infty < x < \infty, & u(x) \in \mathfrak{S} \end{aligned} \quad (I)$$

( $\mathfrak{S}$  - пространство Шварца быстро убывающих функций), имеющее приложения к теории распространения волн в нелинейных средах.

Заметим, что уравнение (I) легко записывается в гамильтоновом виде. Действительно, роль фазового пространства играет пространство  $\mathfrak{S}$ , а соответствующая симплектическая форма

$$\Omega(\delta_1 u, \delta_2 u) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_1 u(x) \delta_2 \bar{u}(x) - \delta_1 \bar{u}(x) \delta_2 u(x)) dx \quad (2)$$

имеет постоянные коэффициенты в переменных  $u$  и потому замкнута. Осталось указать гамильтониан  $H$ . Положим

$$H(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (|u_x|^2 + |u|^4) dx. \quad (3)$$

Легко проверить, что уравнение (I) порождается механической системой  $(\mathfrak{S}, \Omega, H)$  по правилам гамильтоновой механики.

В настоящей работе мы укажем канонические координаты, в которых гамильтоновы уравнения легко интегрируются. Поясним вкратце, как это делается.

Рассматривается система Дирака - система двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$j \frac{d\psi}{dx} + Q(x)\psi = k\psi, \quad \text{где } \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} -p(x) & -q(x) \\ -q(x) & p(x) \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < \infty, \\ k \in \mathbb{C}^1$$

и  $p(x)$ ,  $q(x)$  - вещественнозначные функции. С любой функцией  $u(x) \in \mathfrak{S}$  свяжем матрицу  $Q(x)$  по следующей формуле

$$Q(x) = \begin{pmatrix} -\Im u(x) & -\operatorname{Re} u(x) \\ -\operatorname{Re} u(x) & \Im u(x) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для системы Дирака можно поставить задачу рассеяния.

Пусть  $\tau(k)$  - коэффициент отражения направо, то есть функция, участвующая в асимптотике при  $x \rightarrow \infty$  решения системы (4), однозначно определенного условиями

$$\begin{aligned} \Psi(x, k) &= e^{-ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \tau(k) e^{ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow \infty \\ \Psi(x, k) &= t(k) e^{-ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Отображение  $Q(x) \rightarrow \tau(k)$  однозначно обратимо. Соответствующая процедура восстановления  $Q(x)$ , а, следовательно и  $u(x)$ , по коэффициенту отражения  $\tau(k)$  дается обратной задачей рассеяния, исследованной в [1]. По аналогии с уравнением Шредингера мы будем иногда называть коэффициент  $\tau(k)$  данным рассеяния системы Дирака. Основным результатом настоящей работы состоит в следующем: рассмотрим движение на множестве данных рассеяния

$$\tau(k) \rightarrow \tau(k) e^{4ik^2 t}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (7)$$

Оказывается, что соответствующее движение на многообразии  $\mathcal{B}$   $u(x) \rightarrow u(x, t)$  определяет решение  $u(x, t)$  уравнения (I). Другой результат работы состоит в том, что уравнение (I) обладает счетным набором коммутирующих интегралов движения. Эти интегралы имеют локальные плотности, то есть интегралы  $I_n$  имеют вид

$$I_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(u, u_x, \dots) dx.$$

Описанная выше программа уже проводилась для уравнения Кортевега-де-Фриса, т.е. для уравнения

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x, t) \Big|_{t=0} &= u(x), \quad u(x) \in \mathcal{B} \end{aligned} \quad (8)$$

Сначала группа ученых, включающая Гарднера, Грина, Крускала, Забусского и Миуру, нашла связь уравнения Кортевега-де-Фриса с задачей рассеяния для одномерного оператора Шредингера. Ими были получены формулы, аналогичные формуле (7), и найден способ вычисления интегралов движения для уравнения (8) (см. [2-4]). Затем Л.Д.Фаддеев и В.Е.Захаров предложили следующую интерпретацию метода американских ученых: уравнение  $\mathcal{K}g\mathcal{F}$  - вполне интегрируемая гамильтонова система, причем отображение  $u(x) \rightarrow \tau(k)$  играет роль перехода к переменным типа действие-угол в классической механике (см. [5]). Кроме того, В.Е.Захаровым и А.Б.Шаботом с помощью метода обратной задачи (см. [6]) были найдены явные решения уравнен-

$$\frac{1}{i} u_t = u_{xx} + \alpha u |u|^2, \quad \alpha > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, t) \Big|_{t=0} = u(x), \quad u(x) \in \mathcal{S}$$

(см. [7]). Авторами было проведено подробное исследование так называемых солитонов, т.е. решений, отвечающих дискретному спектру.

Результаты настоящей работы возникли при применении метода авторов [5] к системе Дирака. В настоящей работе поэтому широко используется техника, развитая в работе [5]. Имеются некоторые упрощения, связанные с отсутствием дискретного спектра у системы (4).

(Таким образом, в нашем случае отсутствуют солитоны. 0 солитонах см. [6 - 7]).

Теперь наметим план изложения. В § I будут даны необходимые сведения из теории рассеяния для системы Дирака. Затем в § 2 мы пересчитаем формулу  $\Omega$  в терминах данных рассеяния. В § 3 с помощью тождеств следов для системы Дирака мы выразим гамильтониан через данные рассеяния и покажем, что формула (7) дает решение гамильтоновых уравнений. И, наконец, мы охарактеризуем связь между уравнением (I) и уравнением (8).

### § I. Сведения из теории рассеяния

Система (4) при условии, что

$$|p(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{2+2\varepsilon}}, \quad |q(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}},$$

$$|p'(x)| + |q'(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{1+\varepsilon}}; \quad \varepsilon > 0$$
(A)

имеет решения  $f(x, k)$  и  $g(x, k)$ , однозначно определенные при вещественных  $k$  требованиями

$$f(x, k) = e^{ikx} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

$$g(x, k) = e^{-ikx} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty.$$
(9)

Решения  $f(x, k)$  и  $g(x, k)$  допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $k$ , и при этом имеют место следующие оценки

$$f(x, k) e^{-ikx} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad |k| \rightarrow \infty$$

$$g(x, k) e^{ikx} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{|k|}\right) \quad \text{Im } k \geq 0.$$
(10)

При вещественных  $k$  пары  $f(x, k)$ ,  $\bar{f}(x, k)$  и  $g(x, k)$ ,  $\bar{g}(x, k)$  образуют две фундаментальные системы решений уравнения Дирака. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} g(x, k) &= a(k)\bar{f}(x, k) + b(k)f(x, k) \\ \bar{f}(x, k) &= -\bar{b}(k)g(x, k) + a(k)g(x, k), \end{aligned} \quad (II)$$

где коэффициенты  $a(k)$  и  $b(k)$  удовлетворяют тождеству

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2 \quad (I2)$$

при этом

$$a(k) = \frac{1}{2i} \{f(x, k), g(x, k)\}, \quad (I3)$$

где

$$\{f, g\} = f_1 g_2 - f_2 g_1.$$

Из (I3) следует, что  $a(k)$  допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной  $k$ , причем справедлива оценка

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad \forall k \geq 0, \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (I4)$$

Ясно, что  $a(k)$  не имеет нулей в верхней полуплоскости, так как из (I3) следует, что нули отвечали бы незначительным собственным значениям системы Дирака. Из (I2) следует, что  $a(k)$  не имеет нулей и на вещественной оси.

Рассмотрим следующее решение системы (4)

$$\Psi(x, k) = \frac{1}{a(k)} g(x, k).$$

Из (II) получаем, что  $\Psi(x, k)$  удовлетворяет условию (6), где

$$\tau(k) = b(k)/a(k).$$

Заметим, что  $a(k)$  и  $b(k)$  полностью восстанавливаются по коэффициенту отражения. Действительно, справедливы формулы

$$1 - |\tau|^2 = \frac{|a|^2 - |b|^2}{|a|^2} = \frac{1}{|a|^2},$$

$$a(k) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |\tau(q)|^2)}{k - q} dq \right\}, \quad \forall k > 0, \quad (I5)$$

$$a(k) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(k + i\varepsilon), \quad \forall k = 0, \quad b(k) = \tau(k)a(k).$$

Скажем теперь несколько слов об обратной задаче. Ее решение основывается на интегральном уравнении, являющимся аналогом урав-

нения Гельфанда - Левитана.

Пусть  $\tau_2(k)$ ,  $\tau_1(k)$  - данные рассеяния для матриц  $Q_2(x)$  и  $Q_1(x)$  и  $f(x,k)$  - решение, удовлетворяющее условию (9) для уравнения (4) с матрицей  $Q_1(x)$ .

Построим ядро  $\mathcal{F}(x,y)$

$$\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ (\tau_2(k) - \tau_1(k)) f(x,k) f^*(y,k) \} dk, \quad (16)$$

где  $f^*$  - вектор-строка, транспонированный к вектору-столбцу  $f$ . Рассмотрим уравнение для ядра  $\mathcal{K}(x,y)$

$$\mathcal{K}(x,y) + \mathcal{F}(x,y) + \int_x^{\infty} \mathcal{K}(x,u) \mathcal{F}(u,y) du = 0 \quad (17)$$

и  $\mathcal{K}(x,y) = 0$  при  $x > y$ .

Это уравнение однозначно разрешимо, и

$$Q_2(x) - Q_1(x) = \mathcal{K}(x,x) J - J \mathcal{K}(x,x). \quad (18)$$

При  $\tau_1(k) = 0$ ,  $Q_1(x) = 0$  уравнение (17) позволяет восстановить матрицу  $Q_2(x)$  по ее коэффициенту отражения.

На функцию  $\tau(k)$  накладываем условия:

1)  $|\tau(k)| < 1$ ,  $-\infty < k < \infty$

2)  $\tau(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$  при  $|k| \rightarrow \infty$

3) матрица  $\mathcal{F}(t)$ , построенная по формуле (16) для функции  $\tau(k)$  ( $\tau_2(k) = \tau(k)$ ,  $\tau_1(k) = 0$ ,  $f(x,k) = e^{ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ), удовлетворяет условию (A) при  $-\infty < \delta \leq x < \infty$ , то есть не исключается случай  $c(\delta) \rightarrow \infty$  при  $\delta \rightarrow -\infty$ , где  $c(\delta)$  - константа в правой части условия (A),

4) для матрицы  $\mathcal{F}(t)$ , построенной по формуле (16) для функции  $\tilde{\tau}(k) = -\frac{\bar{\tau}(k)}{a(k)}$ , выполняется условие (A) при  $-\infty < x \leq \delta < \infty$ .

Тогда для того, чтобы матрица  $Q(x)$  удовлетворяла условию (A), необходимо и достаточно, чтобы коэффициент отражения  $\tau(k)$  удовлетворял условиям 1)-4). (См. [1]).

Отметим, что для того, чтобы  $u(x) \in \mathcal{G}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\tau(k) \in \mathcal{G}$  и  $|\tau(k)| < 1$  при любом  $k$ .

Заметим, наконец, что для представимости  $Q(x)$  в виде

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}$$

необходимо и достаточно, чтобы  $\tau(k) = \bar{\tau}(-k)$ .

## § 2. Выражение формы $\Omega$ через данные рассеяния

В настоящем параграфе мы пересчитаем форму  $\Omega$  в новых координатах, используя формулы преобразования дифференциальных

форм при замене координат.

Займемся непосредственно вычислениями. Из (5), (16), (17) и (18) получаем следующее выражение для вариации

$$\delta u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [(\underline{f}_2(x,k) + i\underline{f}_1(x,k))^2 \delta \tau(k) + (\bar{\underline{f}}_2(x,k) + i\bar{\underline{f}}_1(x,k))^2 \delta \bar{\tau}(k)] dk. \quad (19)$$

Для  $\delta \bar{u}(x)$  имеем формулу, комплексно сопряженную с (19). Подстановка выражений для  $\delta u(x)$ ,  $\delta \bar{u}(x)$  в определение (2) формы  $\Omega$  приводит к следующей формуле

$$\begin{aligned} \Omega_z(\delta_1 \tau, \delta_2 \tau) = & \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} A(k, q) (\delta_1 \tau(k) \delta_2 \bar{\tau}(q) - \delta_1 \bar{\tau}(q) \delta_2 \tau(k)) dk dq + \\ & + \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} B(k, q) (\delta_1 \tau(k) \delta_2 \tau(q) - \delta_1 \tau(q) \delta_2 \tau(k)) dk dq + \\ & + \iint_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} C(k, q) (\delta_1 \bar{\tau}(k) \delta_2 \bar{\tau}(q) - \delta_1 \bar{\tau}(q) \delta_2 \bar{\tau}(k)) dk dq, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} A(k, q) = & \frac{1}{32\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} [(\underline{f}_2(x,k) + i\underline{f}_1(x,k))^2 (\bar{\underline{f}}_2(x,q) - i\bar{\underline{f}}_1(x,q))^2 - \\ & - (\bar{\underline{f}}_2(x,k) - i\bar{\underline{f}}_1(x,k))^2 (\underline{f}_2(x,q) + i\underline{f}_1(x,q))^2] dx, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B(k, q) = & \frac{1}{64\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} [(\underline{f}_2(x,k) + i\underline{f}_1(x,k))^2 (\underline{f}_2(x,q) - i\underline{f}_1(x,q))^2 - \\ & - (\underline{f}_2(x,k) - i\underline{f}_1(x,k))^2 (\underline{f}_2(x,q) + i\underline{f}_1(x,q))^2] dx \end{aligned}$$

и, наконец,

$$C(k, q) = \overline{B(x, q)}.$$

Выписанные интегралы следует понимать в смысле теории обобщенных функций. Оказывается, что все эти интегралы можно выразить только через данные рассеяния. Поясним это подробнее на примере

$A(k, q)$ .

Из системы (4) нетрудно получить, что

$$\underline{f}_1(x, k) \underline{f}_1(x, q) + \underline{f}_2(x, k) \underline{f}_2(x, q) = \frac{1}{q-k} \frac{d}{dx} \{ \underline{f}(x, k), \underline{f}(x, q) \}. \quad (22)$$

Благодаря (22) мы можем записать  $A(k, q)$  в следующем виде:

$$A(k, q) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q-k} \frac{d}{dx} \{ \underline{f}(x, k), \bar{\underline{f}}(x, q) \}^2 dx,$$

т.е. мы имеем:

$$A(k, q) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^2(q-k)} \left[ -4e^{2i(k-q)N} + 4(a(k)\bar{a}(q) \cdot e^{-i(k-q)N} - \bar{b}(k)b(q)e^{i(k-q)N})^2 \right]$$

используя известную формулу из теории обобщенных функций

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P} \frac{e^{ixN}}{x} = i\pi \delta(x),$$

где  $\mathcal{P}$  - главное значение в смысле Коши и вытекающее из (12) тождество  $1 + |a|^4 - |b|^4 = 2|a|^2$ , получаем для  $A(k, q)$  окончательное выражение

$$A(k, q) = \frac{ia(k)}{2\pi} \delta(k-q) + \frac{1}{2\pi^2} \mathcal{P} \frac{a(k)\bar{a}(q)\bar{b}(k)b(q)}{k-q}. \quad (23)$$

Для  $B(k, q)$  имеем, аналогично

$$B(k, q) = \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q-k} \frac{d}{dx} \{f(x, k), f(x, q)\}^2 dx$$

и, окончательно,

$$B(k, q) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{P} \frac{a(k)a(q)\bar{b}(k)\bar{b}(q)}{k-q}. \quad (24)$$

Из (23) и (24) теперь непосредственно следует выражение для формы  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \Omega_\tau(\delta_1\tau, \delta_2\tau) = & \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 (\delta_1\tau(k)\delta_2\bar{\tau}(k) - \delta_1\bar{\tau}(k)\delta_2\tau(k)) dk + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \mathcal{P} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{a(k)\bar{a}(q)\bar{b}(k)b(q)}{k-q} (\delta_1\tau(k)\delta_2\bar{\tau}(q) - \delta_1\bar{\tau}(q)\delta_2\tau(k)) dk dq + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \text{Re} \left\{ \mathcal{P} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{a(k)a(q)\bar{b}(k)\bar{b}(q)}{k-q} (\delta_1\tau(k)\delta_2\tau(q) - \delta_1\tau(q)\delta_2\tau(k)) dk dq \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Покажем теперь, что набор переменных

$$P(k) = -\frac{1}{\pi} \ln(1 - |\tau(k)|^2),$$

$$Q(k) = \frac{1}{2} \arg b(k)$$

является каноническим, то есть, что форма  $\Omega$  в этих переменных имеет вид

$$\Omega_\tau(\delta_1\tau, \delta_2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta_1 P(k)\delta_2 Q(k) - \delta_2 P(k)\delta_1 Q(k)) dk. \quad (26)$$

Действительно, заметим, что

$$\operatorname{arg} b(k) = \operatorname{arg} \tau(k) + \operatorname{arg} a(k)$$

и, используя (15), получим

$$\delta Q(k) = \frac{1}{4i} \frac{\delta \tau(k) \bar{\tau}(k) - \delta \bar{\tau}(k) \tau(k)}{|\tau(k)|^2} + \\ + \frac{1}{4\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|a(q)|^2}{k-q} (\tau(q) \delta \bar{\tau}(q) + \bar{\tau}(q) \delta \tau(q)) dq,$$

далее, имеем

$$\delta P(k) = \frac{1}{\pi} \frac{\tau(k) \delta \bar{\tau}(k) + \bar{\tau}(k) \delta \tau(k)}{1 - |\tau(k)|^2}.$$

Подставив эти выражения для  $\delta P(k)$ ,  $\delta Q(k)$  в (26), получим (25). Итак, мы выразили через данные рассеяния некоторый набор канонических переменных. В § 3 мы убедимся, что эти переменные играют роль переменных типа действие – угол в классической механике, т.е., что гамильтониан  $H$  будет зависеть лишь от переменных  $P(k)$  (переменных типа действие).

### § 3. Тожества следов и окончательные результаты

Напомним, что  $u(x) \in \mathcal{G}$ . Тогда для  $\ln a(k)$  справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{k^n}, \quad \operatorname{Im} k > 0, \quad |k| \rightarrow \infty \quad (27)$$

при этом коэффициенты  $c_n$  вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} q^{n-1} \ln(1 - |\tau(q)|^2) dq. \quad (28)$$

Это легко получить, используя (15). Можно, с другой стороны, находить коэффициенты разложения  $\ln a(k)$  по обратным степеням  $k$ , используя систему Дирака. Получающиеся при этом формулы называются тождествами следов. Для вывода этих тождеств воспользуемся приемом, описанным в [7]. Заметим сначала, что из (13) следует, что для функции  $\theta(x, k) = \frac{1}{2}(q_2(x, k) + iq_1(x, k)) e^{ikx}$  справедливо следующее

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, k) = a(k), \quad \operatorname{Im} k \geq 0 \quad (29)$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} \ln \theta(x, k) dx = \ln a(k).$$

Но из системы (4) следует, что  $\theta(x, k)$  удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= -2ik\theta + u(x)\tilde{\theta} & \text{где } \tilde{\theta}(x, k) &= \frac{1}{2}(q_2(x, k) - iq_1(x, k))e^{ikx} \\ \frac{d\tilde{\theta}}{dx} &= \bar{u}(x)\theta. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначая  $\ln \theta$  через  $\Phi$  и исключая  $\tilde{\theta}$  из системы (30), получим дифференциальное уравнение для  $\Phi_x$ :

$$2ik\Phi_x = \Phi_x^2 + u(x)\left(\frac{1}{u(x)}\Phi_x\right)_x - |u(x)|^2. \quad (31)$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения работы [7] лишь знаком перед  $|u(x)|^2$ . Используя дифференциальное уравнение (31), убеждаемся, что  $\Phi_x$  допускает следующее асимптотическое разложение

$$\Phi_x(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{(2ik)^n}, \quad (32)$$

где коэффициенты  $f_n(x)$  вычисляются по рекуррентной формуле

$$f_{n+1}(x) = u(x)\left(\frac{f_n(x)}{u(x)}\right)_x + \sum_{\substack{j+m=n \\ j, m > 0}} f_j(x)f_m(x) \quad (33)$$

$$f_1(x) = -|u(x)|^2$$

Несколько первых коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} f_2 &= -u\bar{u}_x, \quad f_3 = -u\bar{u}_{xx} + |u|^4, \\ f_4 &= -u\bar{u}_{xxx} + u u_x \bar{u}^2 + 4u^2 \bar{u} \bar{u}_x. \end{aligned}$$

Объединяя формулы (27), (29), (32), получаем набор тождеств

$$(2i)^n c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx, \quad n=1, 2, \dots \quad (34)$$

где  $c_n$  и  $f_n(x)$  вычисляются по формулам (28) и (33) соответственно. Формулы (34) называются тождествами следов. Через канонические переменные тождества следов записываются следующим образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = -(2i)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} k^{n-1} P(k) dk$$

и, в частности, для гамильтониана  $H$  мы имеем

$$H(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x) dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} k^2 P(k) dk, \quad (35)$$

т.е. гамильтониан зависит лишь от импульсов.

Осталось заметить теперь, что в координатах  $P(k)$ ,  $Q(k)$  га-

мильтоновы уравнения полностью интегрируются; действительно, уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{dP(k)}{dt} &= 0 \\ \frac{dQ(k)}{dt} &= 2k^2,\end{aligned}$$

то есть их решение есть  $\tau(k, t) = e^{4ik^2 t} \tau(k)$ . Из формул (28) и (34) ясно, что

$$I_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx, \quad n=1, 2, \dots$$

являются счетным набором интегралов движения уравнения (I). Также ясно, что это набор взаимно коммутирующих интегралов. Тем самым мы установили все упоминавшиеся результаты, исключая связь уравнения (I) с уравнением  $K_g \Phi$ .

Теперь мы и займемся последним вопросом: для этого возьмем на нашем симплектическом многообразии  $\mathcal{S}$  в качестве гамильтониана

$$H_1(u) = \frac{1}{2i} \int_{\mathcal{S}_4} f_4(x) dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} k^3 P(k) dk.$$

Механическая система  $(\mathcal{S}, \Omega, H_1)$  будет описывать уравнение

$$u_t - 6u_x |u|^2 + u_{xxx} = 0. \quad (36)$$

В канонических координатах решение гамильтоновых уравнений есть

$$\tau(k, t) = e^{8ik^3 t} \tau(k), \quad (37)$$

где  $\tau(k)$  — коэффициент отражения, построенный по начальному данному для уравнения (36). Но уравнение (36) не есть уравнение  $K_g \Phi$ . Однако, если начальное данное для уравнения (36) было вещественным, то есть если  $\bar{\tau}(k) = \tau(-k)$ , то из (37) следует, что и  $\bar{\tau}(k, t) = \tau(-k, t)$ , то есть и решение  $u(x, t)$  будет вещественным.

Итак, если ограничиться вещественными начальными данными, то будем иметь уравнение

$$u_t - 6u_x u^2 + u_{xxx} = 0. \quad (38)$$

Далее, вещественной  $u(x)$  отвечает матрица

$$Q(x) = \begin{pmatrix} 0 & -u(x) \\ -u(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Но, известно, что в этом случае система Дирака сводится к уравнению Шредингера с потенциалом  $q(x) = -u'(x) + u^2(x)$ .

И сделав такую замену переменных в уравнении (38), мы как раз и получим уравнение  $\mathcal{H}_g \Phi$ .

Заметим, что попутно мы установили полную интегрируемость следующих механических систем:  $\{(\mathcal{G}, \Omega, H_n)\}_{n=1, \dots, \infty}$ , где

$$H_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx.$$

То есть мы имеем счетный набор нелинейных эволюционных уравнений, явно решаемых методом обратной задачи.

В заключение автор выражает благодарность Л.Д.Фаддееву за постановку настоящей задачи и за внимание к работе.

#### Литература

1. Фролов И.С. Обратная задача для системы Дирака на всей оси, ДАН СССР, 207, № I (1972), 44-47.
2. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M., Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev.Lett. 19(1967), 1095-1097.
3. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D., Korteweg-de Vries equation and generalizations, II. Existence of conservation laws and constants of motion. J.Math. Phys. 9, № 8 (1968), 1204-1209.
4. Kruskal M.D., Miura R.M., Gardner C.S., Zabusky N.J., Korteweg-de Vries equation and generalizations, V. Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws, J. Math. Phys., II, № 3 (1970), 952-960.
5. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д., Уравнение Кортевега-де Фриса - вполне интегрируемая гамильтонова система. Функци. анализ и его приложения, т.5, вып.4, 1971, 18-27.
6. Лэкс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны, Математика (сборник переводов ин. статей) 13:5 (1969) 128-150.
7. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ, 61 (1971), 118-125.