



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. N. Demshin, V. A. Shlyk, Criteria of the removable sets for the weighted spaces of garmonic functions, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2002, Volume 286, 62–73

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.82

January 16, 2025, 02:12:13



И. Н. Демшин, В. А. Шлык

**КРИТЕРИИ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВ
ДЛЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ
ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

В работе изучаются точные функциональные, емкостные, метрические характеристики нуль-множеств для весовых пространств гармонических функций $FD^{p,\omega}$ с весом ω , удовлетворяющим A_p -условию Макенхаупта. В идейном плане данная статья следует работе Л. Хедберга [1] и продолжает исследования по теории устранимых множеств в [2–5]. Основные результаты были анонсированы в [6].

1. Введем следующие обозначения: G – ограниченное открытое множество в n -мерном евклидовом пространстве R^n , $n \geq 2$; \mathcal{H}_k , \mathcal{L}_k – соответственно k -мерные меры Хаусдорфа и Лебега; A_p , $p \in (1, \infty)$, – класс локально интегрируемых функций $\omega : R^n \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [7]

$$\sup \frac{1}{\mathcal{L}_n(Q)} \int_Q \omega \, dx \left\{ \frac{1}{\mathcal{L}_n(Q)} \int_Q \omega^{\frac{1}{1-p}} \, dx \right\}^{p-1} < \infty, \quad (1)$$

где \sup берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$. Замыкание множества F в R^n будем обозначать \overline{F} . Рассмотрим пространство $L_{p,\omega}^1(G)$ функций $u : G \rightarrow (-\infty, \infty)$, локально интегрируемых в G , имеющих обобщенные частные производные и таких, что $\int_G |\text{grad } u|^p \omega \, dx < \infty$. В $L_{p,\omega}^1(G)$ введем полунорму

$$\|u\|_{L_{p,\omega}^1} = \|u\| = \left(\int_G |\text{grad } u|^p \omega \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Через $FD^{p,\omega}(G)$ обозначим класс всех гармонических функций $u \in L_{p,\omega}^1(G)$ таких, что $\int_\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0$ для всех $(n-1)$ -мерных циклов $\sigma \subset G$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028) и программы “Университеты России” (грант УР.04.01.016).

Положим для компакта $E \subset G$

$$C_E^\infty(G) = \{u \in C_0^\infty(G) : \text{grad } u = 0 \text{ в некоторой окрестности компакта } E\},$$

$$C_E^\infty(R^n) = C_E^\infty.$$

Пусть $\overset{\circ}{L}_{p,\omega}^1(G) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}(C_0^\infty(G))$ в $L_{p,\omega}^1(G)$. Через $\mathcal{L}_k^p(G)$ обозначим класс всех вектор-функций $u = (u_1, \dots, u_k)$, для которых

$$\|u\|_{\mathcal{L}_k^p(G)} = \left(\int_G \left(\sum_{i=1}^k u_i^2(x) \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Пусть $T : f \rightarrow K * f$ – сингулярный интегральный оператор свертки с ядром K , удовлетворяющим стандартным условиям

$$\|\widehat{K}\|_\infty \leq C, \quad |K(x)| \leq \frac{C}{|x|^n}, \quad |K(x) - K(x-y)| \leq \frac{C|y|}{|x|^{n+1}}$$

для $|y| < \frac{|x|}{2}$. Известен результат Р. Койфмана и К. Феффермана [8] для $\omega \in A_p$ и $f\omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(R^n)$:

$$\int_{R^n} |Tf(x)|^p \omega dx \leq C_p \int_{R^n} |f(x)|^p \omega dx, \quad (2)$$

где C_p – положительная постоянная, выбор которой зависит только от p, n, ω .

Под конденсатором будем понимать набор $(F_0, F_1, G/F) = (G/F)$, где $F_0, F_1 \subset \overline{G}$ – непустые непересекающиеся компакты, F – компакт в G . Определим p -емкость с весом $\omega \in A_p$ конденсатора (G/F) как величину

$$C_{p,\omega}(G/F) = C_{p,\omega}(F_0, F_1, G/F) = \inf \int_G |\text{grad } u|^p \omega dx,$$

где \inf берется по всем функциям u таким, что $u|_G \in C^\infty(G) \cap L_{p,\omega}^1(G)$, $u = j$ в некоторой окрестности компакта F_j , $j = 0, 1$, $u = \text{const} = c(u, \alpha)$ в некоторой окрестности каждой компоненты α множества F . Класс таких функций обозначим

$$\text{Adm}_{p,\omega}(G/F) = \text{Adm}_{p,\omega}(F_0, F_1, G/F).$$

Пусть $u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} u_k$ в $L_{p,\omega}^1(G)$, где $u_k \in \text{Adm}_{p,\omega}(G)$ и

$$\int_G |\text{grad } u_0|^p \omega \, dx = C_{p,\omega}(G/F).$$

Тогда u_0 назовем экстремальной функцией для $C_{p,\omega}(G/F)$.

Компакт $E \subset R^n$ назовем гладким, если он ограничен конечным числом непересекающихся гладких $(n-1)$ -мерных многообразий.

Пусть $\tau = \tau(a, b) \subset R^n$ – континуум, соединяющий две различные точки $a, b \in R^n$ и неприводимый между ними [9], и пусть существуют последовательности $\{a(k), b(k)\}$, извлеченные из $\tau \setminus E$ и такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} a(k) = a$, $\lim_{k \rightarrow \infty} b(k) = b$. Тогда множество $\gamma = \gamma(a, b) = (\tau \setminus E) \setminus \{a, b\}$ назовем составной кривой, соединяющей точки a, b . Совокупность всех составных кривых, каждая из которых соединяет в указанном смысле какие-нибудь две различные точки из R^n , обозначим через $\Gamma(E)$. Если при этом $\tau \setminus \{a, b\} \subset G$, $a \in F_0$, $b \in F_1$, $F_0, F_1 \subset \overline{G}$, $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, то будем также говорить, что кривая $\gamma = (\tau \setminus E) \setminus \{a, b\}$ соединяет в G множества F_0 и F_1 . Семейство всех таких составных кривых обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, G/E) = \Gamma(G/E)$. Определим p -модуль с весом ω (иначе, (p, ω) -модуль) семейства $\Gamma \subset \Gamma(E)$ как величину

$$m_{p,\omega}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \int_{R^n} \rho^p \omega \, dx,$$

где $\omega \in A_p$ и \inf берется по всем борелевским функциям $\rho: R^n \rightarrow [0, \infty]$ таким, что $\int_{R^n} \rho^p \omega \, dx < \infty$ и $\int_\gamma \rho \, d\mathcal{H}_1 \geq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых метрик ρ будем обозначать через $\text{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$. Для семейства $\Gamma(G/E)$ положим

$$\text{adm}_{p,\omega}(\Gamma(G/E)) = \text{adm}_{p,\omega}(G/E) = \text{adm}_{p,\omega}(F_0, F_1, G/E).$$

Предложение 1. Если $\mathcal{L}_n(E) = 0$, то (p, ω) -модуль семейства Γ всех спрямляемых кривых γ , для которых $\mathcal{H}_1(\gamma \cap E) > 0$, равен 0.

Доказательство. Действительно, пусть

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{на } E; \\ 0 & \text{вне } E. \end{cases}$$

Тогда $\rho \in \text{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$ и $\int_{R^n} \rho^p \omega \, dx = 0$. Следовательно, $m_{p,\omega}(\Gamma) = 0$.

Множество $\mathcal{E} \subset E$ назовем (p, ω) -исключительным, если равен нулю (p, ω) -модуль всех спрямляемых кривых γ таких, что $\mathcal{H}_1(\gamma \cap \mathcal{E}) > 0$, и (p, ω) -модуль семейства всех составных кривых γ таких, что $\bar{\gamma} \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$.

Пусть G – ограниченное открытое множество и компакт E содержится в G . Тогда E назовем $NH_{p,\omega}$ -компактом, если 1) $\mathcal{L}_n(E) = 0$; 2) для любой пары гладких непересекающихся компактов $F_0, F_1 \subset G$ таких, что $E \cap (F_0 \cup F_1) = \emptyset$, имеем

$$m_{p,\omega}(F_0, F_1, G/E) = m_{p,\omega}(F_0, F_1, G/\emptyset).$$

Составную кривую γ назовем спрямляемой, если $\mathcal{H}_1(\gamma) < \infty$. Для составной спрямляемой кривой γ и координатной оси x_i положим

$$\mathcal{H}^1(\text{pr}_{x_i}, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} N(x_i, \gamma) d\mathcal{H}_1(x_i),$$

где $N(x_i, \gamma)$ – число точек $x \in \gamma$, i -я координата каждой из которых равна x_i . При этом интеграл рассматривается в смысле Лебега и $N(x_i, \gamma) = 0$, если таких точек x на γ нет. Аналогично, определим величины $\mathcal{H}^1(\text{pr}_{x_i}, \tau)$ и $N(x_i, \tau)$ для произвольного борелевского множества $\tau \subset R^n$.

2. Компакт E назовем устранимым для пространства $FD^{p,\omega}$, если для любого открытого ограниченного множества $G \subset R^n$, $E \subset G$, каждая функция $f \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$ продолжается до функции из $FD^{p,\omega}(G)$. Перейдем к описанию устранимых множеств для $FD^{p,\omega}$. Положим $q = \frac{p}{p-1}$, $\omega^{\frac{1}{1-p}} = \tilde{\omega}$.

Теорема 1. Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для пространства $FD^{p,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого ограниченного открытого множества $G \supset E$ выполнялось равенство

$$\overset{\circ}{L}_{q,\tilde{\omega}}^1(G) = \text{cl}(C_E^\infty(G))$$

в $L_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $C_E^\infty(G)$ плотно в $\overset{\circ}{L}_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$. Рассматривая функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{L}_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$, для которой $|\text{grad } f| \neq 0$ на E (например, $f(x) = x_i$ в окрестности E и $f(x) = 0$

в окрестности ∂G), легко установим, что $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Если теперь функция $u \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$, то ее обобщенные частные производные определены почти везде в G и $\omega^{\frac{1}{p}} \text{grad } f \in \mathcal{L}_n^p(G)$. Покажем, что существует обобщенная функция T в G , чьи частные производные $D_i T$, понимаемые в смысле теории распределений, равны u_i . По теореме Л. Шварца [10], для этого необходимо и достаточно проверить условия $D_j u_i = D_i u_j$ для всех i, j или, другими словами, установить равенства

$$\int_G u_i D_j \varphi \, dx = \int_G u_j D_i \varphi \, dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $i, j = \overline{1, n}$. С другой стороны, для всех $\varphi \in C_E^\infty(G)$

$$\begin{aligned} \int_G u_i D_j \varphi \, dx &= \int_{G \setminus E} u_i D_j \varphi \, dx = - \int_{G \setminus E} u D_i D_j \varphi \, dx = \\ &= - \int_{G \setminus E} u D_j D_i \varphi \, dx = \int_G u_j D_i \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Учитывая плотность $C_E^\infty(G)$ в $C_0^\infty(G)$, с помощью неравенства Гельдера установим равенство

$$\int_G u_i D_j \varphi \, dx = \int_G u_j D_i \varphi \, dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Таким образом, существует распределение T в G , которое совпадает с u в $G \setminus E$. По другой теореме Л. Шварца, T есть функция в $L_{p,\omega}^1(G)$, т.е. u имеет расширение до функции из $L_{p,\omega}^1(G)$.

Пусть $\varphi \in C_E^\infty(G)$. Носитель $\text{grad } \varphi$ есть компакт в $G \setminus E$. Дополнение Ω к нему имеет только конечное число компонент Ω_i , $i = \overline{1, m}$, пересекающих E . На каждой компоненте Ω_i функция φ равна постоянной a_i . Пусть σ — $(n-1)$ -мерный цикл в $(G \setminus E) \cap \Omega$, который гомологичен 0 в G . Положим $\sigma \cap \Omega_i = \sigma_i$. По формуле Грина,

$$\int_{G \setminus E} u \Delta \varphi \, dx = \int_{G \setminus E} \text{grad } u \, \text{grad } \varphi \, dx - \int_{G \setminus E} \Delta u \varphi \, dx - \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \, dS =$$

$$= - \sum_{\sigma_i} a_i \int \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Как и выше, используя неравенство Гельдера и плотность $C_E^\infty(G)$ в $C_0^\infty(G)$, получим, что $\int_{G \setminus E} u \Delta \varphi dx = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$. По лемме Вейля [10], функция u является гармонической в G . Другими словами, $u \in FD^{p,\omega}(G)$.

Необходимость. Пусть $C_E^\infty(G)$ не является плотным в $\overset{\circ}{L}_{q,\omega}^1(G)$. Тогда найдется ненулевое распределение (обобщенная функция) T с носителем в E и непрерывное на $\overset{\circ}{L}_{q,\omega}^1(G)$. Очевидно, что $S = T * K$, где функция

$$K = \begin{cases} |x|^{2-n}, & n > 2; \\ -\log|x|, & n = 2, \end{cases}$$

является гармонической в $G \setminus E$. Покажем что $S \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$. Распределение T , как линейный функционал на $\mathcal{L}_n^q(G)$, для $\varphi \in C_0^\infty(G)$ имеет вид $(T, \varphi) = \int \sum_i u_i D_i \varphi dx$, где $u_i \omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(G)$, $i = \overline{1, n}$, и $(T, \varphi) = 0$ для $\varphi \in C_E^\infty(G)$. Тогда $(S, \varphi) = (S, \varphi * K) = \int \sum_i u_i D_i \varphi dx$. Отсюда $(D_j S, \varphi) = -(S, D_j \varphi) = -\int \sum_i u_i D_j D_i (\varphi * K) dx$. Согласно (2),

$$\|D_j D_i (\varphi * K) \tilde{\omega}^{\frac{1}{q}}\|_{\mathcal{L}_1^q} \leq C \|\varphi \tilde{\omega}^{\frac{1}{q}}\|_{\mathcal{L}_1^q},$$

где выбор постоянной C зависит от G, ω, p, n . Поэтому

$$|(D_j S, \varphi)| \leq C \sum \|u_i \omega^{\frac{1}{p}}\|_{\mathcal{L}_1^p} \|\varphi \tilde{\omega}^{\frac{1}{q}}\|_{\mathcal{L}_1^q}.$$

Значит, $D_j S \omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(G)$, т.е. $S \in L_{p,\omega}^1(G)$. Покажем, что S не имеет флюксий, т.е. $S \in FD^p(G \setminus E)$. Пусть $\varphi \in C_E^\infty(G)$ и пусть $(n-1)$ -мерный цикл σ выбирается в $(G \setminus E) \cap \Omega$ тем же способом, что и выше. Тогда $(S, \Delta \varphi) = (S, K * \Delta \varphi) = C(T, \varphi) = 0$ и, по формуле Грина,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_G S \Delta \varphi dx = - \int_G \text{grad } S \text{ grad } \varphi dx - \int_\sigma \varphi \frac{\partial S}{\partial n} d\sigma = \\ &= - \sum_i a_i \int_{\sigma_i} \frac{\partial S}{\partial n} d\sigma. \end{aligned}$$

Поскольку выбор a_i произволен, то $\int_{\sigma_i} \frac{\partial S}{\partial n} d\sigma = 0$ для всех i . Следовательно, $\int_{\sigma} \frac{\partial S}{\partial n} d\sigma = 0$ для всех $(n-1)$ -мерных циклов в $(G \setminus E)$. Теорема доказана.

Замечание. Если каждая функция $f \in FD^{p,\omega}(G \setminus E)$ продолжается до функции $\tilde{f} \in FD^{p,\omega}(G)$ для некоторого ограниченного открытого множества $G \supset E$, то это будет справедливо и для любого другого открытого ограниченного множества $\tilde{G} \supset E$.

Теорема 2. Если компакт E является устранимым для $FD^{p,\omega}$, то он будет устранимым и для $L_{p,\omega}^1$.

Доказательство. Достаточно установить, что каждая функция $f \in L_{p,\omega}^1(G \setminus E)$ продолжается до функции $\tilde{f} \in L_{p,\omega}^1(G)$, $\|f\|_{L_{p,\omega}^1(G \setminus E)} = \|\tilde{f}\|_{L_{p,\omega}^1(G)}$, для некоторого ограниченного открытого множества $G \supset E$. Действительно, по теореме 1, $\mathcal{L}_n(E) = 0$ и класс C_E^∞ плотен в $\mathring{L}_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$. Пусть u — некоторая функция из $L_p^1(G \setminus E)$. Тогда ее частные производные $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, определены \mathcal{L}_n -почти всюду в G и $u_i \omega^{\frac{1}{p}} \in \mathcal{L}_1^p(G)$. Покажем, что существует обобщенная функция T в G , чьи частные производные $D_i T$, понимаемые в смысле теории распределения, равны u_i . По теореме Л. Шварца [10], для этого необходимо и достаточно проверить выполнение условия $D_j u_i = D_i u_j$, где $i, j = \overline{1, n}$, или, другими словами, установить равенство

$$\int_G u_i D_j \varphi dx = \int_G u_j D_i \varphi dx$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $i, j = \overline{1, n}$. Заметим, что для $\varphi \in C_E^\infty(G)$ производная $D_i \varphi \in C_0^\infty(G \setminus E)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_G u_i D_j \varphi dx &= \int_{G \setminus E} u_i D_j \varphi dx = - \int_{G \setminus E} u D_i D_j \varphi dx = \\ &= - \int_{G \setminus E} u D_j D_i \varphi dx = \int_G u_j D_i \varphi dx. \end{aligned}$$

Учитывая плотность $C_E^\infty(G)$ в $\mathring{L}_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$, с помощью неравенства Гельдера установим справедливость последнего соотношения

для функции $u \in C_0^\infty(G)$. Тем самым докажем существование искомой функции T . По построению, функция T совпадает, с точностью до постоянной, с функцией u в $G \setminus E$. Поэтому T – функция из $L_{p,\omega}^1(G)$. Теорема доказана.

Обозначим через pr_l ортогональную проекцию на прямую $l \subset R^n$.

Теорема 3. *Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для $FD^{p,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) существовало $(q, \tilde{\omega})$ -исключительное множество $\mathcal{E} \subset E$ такое, что для каждой невырожденной компоненты α компакта E множество $\alpha \setminus \mathcal{E}$ либо пусто, либо состоит из единственной точки;

2) для любого заданного $\varepsilon > 0$ оценка

$$\mathcal{H}_1(\text{pr}_l(\tau \setminus E)) \geq \mathcal{H}_1(\text{pr}_l \tau) \quad (3)$$

выполнялась для всех прямых $l \subset R^n$ и для $m_{q,\tilde{\omega}}$ -почти каждой составной кривой $\gamma = (\tau(a, b) \setminus E) \setminus \{a, b\} \in \Gamma(E)$, $\text{diam } \tau(a, b) < \varepsilon$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\Pi \supset E$ – координатный прямоугольник. Его грани, параллельные координатной гиперплоскости $x_i = 0$, обозначим через σ_{0i}, σ_{1i} . Выберем открытое ограниченное множество G таким, что $\overline{\Pi} \subset G$. Пусть $\varphi_0 \in C_0^\infty(G)$ и $\varphi_0 \equiv 1$ в окрестности $\overline{\Pi}$. Положим $x_i|_{\sigma_{0i}} = a_i$, $x_i|_{\sigma_{1i}} = b_i$. Известно (см. [1, 5]), что $u_0 = \frac{x_i - a_i}{b_i - a_i}$ – экстремальная функция в проблеме емкости $C_q(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi/\emptyset)$. В нашем случае, по теореме 1, найдется последовательность $u_k \in C_0^\infty(G)$ такая, что $\int_G |\text{grad}(u_k - \varphi_0 u_0)|^q \tilde{\omega} dx \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тем более, $\int_\Pi |\text{grad}(u_k - \varphi_0 u_0)|^q \tilde{\omega} dx \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда (см. [5, 11]) для $m_{q,\tilde{\omega}}$ -почти всех составных кривых $\gamma \subset G$

$$\int_\gamma |\text{grad}(u_k - u_0)| d\mathcal{H}_1 \rightarrow 0 \quad (4)$$

при $k \rightarrow \infty$. Интеграл в (4) не зависит от ω и (4) указывает на тот факт, что функцию u_0 можно аппроксимировать в среднем гладкими функциями, модуль градиента которых равен 0 в некоторой окрестности E . Применяя дословно рассуждения из [5, теоремы 2.1–2.6], при $\omega \equiv 1$ получим, что оценка

$$\mathcal{H}^1(\text{pr}_{x_i}(\tau \setminus E)) \geq \mathcal{H}_1(\text{pr}_{x_i}(\tau \setminus E)) \geq |\text{pr}_{x_i} b - \text{pr}_{x_i} a|$$

выполняется для $m_{q,\tilde{\omega}}$ -почти каждой составной кривой $\gamma = (\tau(a, b) \setminus E) \setminus \{a, b\} \in \Gamma(E)$, где $\tau = \tau(a, b)$ – континуум диаметра, меньшего ε . Отсюда, по теореме 3.3 из [5], $m_{q,\tilde{\omega}}$ -почти каждая составная кривая $\gamma = (\tau(a, b) \setminus E) \setminus \{a, b\}$ порождается простой спрямляемой кривой τ , $\text{diam } \tau < \varepsilon$, такой, что

$$\mathcal{H}_1(\tau \cap E) = 0. \quad (5)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Заметим, что $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Действительно, допустим, что $\mathcal{L}_n(E) > 0$ и пусть Π , $E \subset \Pi$, – координатный $(n-1)$ -мерный прямоугольник, σ_{0i} , σ_{1i} – его грани, параллельные гиперплоскости $x_i = 0$. Рассмотрим те отрезки τ , соединяющие σ_{0i} , σ_{1i} , для которых $\mathcal{H}_1(\tau \cap E) > 0$ и $\tau \perp \sigma_{0i}$. Пусть Γ_1 – семейство всех таких отрезков, а Γ_2 – семейство составных кривых $\gamma = (\tau \setminus E) \setminus (\sigma_{0i} \cup \sigma_{1i})$, $\tau \in \Gamma_1$. Тогда (см. [12]) $m_{q,\tilde{\omega}}(\Gamma_2) \geq m_{q,\tilde{\omega}}(\Gamma_1) > 0$. С другой стороны, в силу (3), $m_{q,\tilde{\omega}}(\Gamma_2) = 0$. Следовательно, $\mathcal{L}_n(E) = 0$.

Покажем, что каждую функцию $f \in C_0^\infty(G)$ в $L_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно функциями из $C_E^\infty(G)$. По теореме 2 из [12], каждую функцию $f \in C_0^\infty(G)$ в $L_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$ можно аппроксимировать сколь угодно точно линейными комбинациями

$$\sum_{i=1}^s a_i u_i, \quad (6)$$

где u_i – экстремальная функция для $C_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\emptyset)$, F_{0i} , F_{1i} – гладкие компакты в G . Далее считаем без ограничения общности, что каждый из компактов F_{ji} , $j = 0, 1$, есть замыкание открытого множества $G_{ji} \subset G$. Покроем компакт E конечным числом $m(k)$ шаров B_{jk} с радиусами, меньшими $\frac{1}{k}$ и такими, что $\sum_{j=1}^{m(k)} \mathcal{L}_n(B_{jk}) < \frac{1}{k}$, и пусть $F_{0i}^k = F_{0i} \setminus \bigcup_{j=1}^{m(k)} B_{jk}$, $F_{1i}^k = F_{1i} \setminus \bigcup_{j=1}^{m(k)} B_{jk}$. Выбор шаров подчиним также дополнительному условию $F_{0i}^k \subset F_{0i}^{k+1}$, $F_{1i}^k \subset F_{1i}^{k+1}$ для каждого k , $\bigcap_{k \geq 1} (\bigcup_{j=1}^{m(k)} B_{jk}) = E$. Поскольку $F_{0i}^k \subset F_{0i}$, $F_{1i}^k \subset F_{1i}$, то

$$\begin{aligned} m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset) &\leq m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^{k+1}, F_{1i}^{k+1}, G/\emptyset) \leq \\ &\leq m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\emptyset). \end{aligned} \quad (7)$$

С другой стороны, выберем $\rho_k \in \text{adm}_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset)$ так, что $\rho_k = 0$ на $F_{0i}^k \cup F_{1i}^k$ и

$$m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset) \leq \int_G \rho_k^q \tilde{\omega} dx \leq m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset) + \frac{1}{k}.$$

В силу выпуклости пространства $\mathcal{L}_1^q(G)$, найдется функция ρ_0 , $\rho_0 \tilde{\omega}^{\frac{1}{q}} \in \mathcal{L}_1^q(G)$, для которой

$$\int_G |\rho_k - \rho_0|^q \tilde{\omega} dx \rightarrow 0 \quad (8)$$

при $k \rightarrow \infty$ и

$$\int_\gamma |\rho_k - \rho_0|^q d\mathcal{H}_1 \rightarrow 0 \quad (9)$$

при $k \rightarrow \infty$ для $m_{q,\tilde{\omega}}$ -почти всех спрямляемых кривых $\gamma \subset G$. Возьмем спрямляемую кривую $\gamma \in \Gamma(F_{0i}, F_{1i}, G/\emptyset)$, удовлетворяющую условию (9) и соединяющую точки $a_0 \in F_{0i}$, $a_1 \in F_{1i}$. Поскольку F_{0i} , F_{1i} – гладкие компакты, то существует гладкий гомеоморфизм g относительной окрестности $\mathcal{U}(a_0)$ (окрестности $\mathcal{U}(a_1)$) точки a_0 в F_{0i} (точки a_1 в F_{1i}) на полупространство H . Производя соответствующую замену в (8) и рассматривая линейные интегралы по лучам, исходящим из точки $g(a_0)$ (точки $g(a_1)$), убедимся в существовании простой спрямляемой кривой γ_j , соединяющей точку a_j с $c_j \in F_{ji}$, $\int_{\gamma_j} \rho_0 d\mathcal{H}_1 < \infty$, и удовлетворяющей условиям (9) и $\mathcal{H}_1(\gamma_j \cap E) = 0$. В силу выбора, кривая $\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{a_0, a_1\}$ соединяет F_{0i}^k и F_{1i}^k при $k \geq k_0$, значит, $\int_{\tilde{\gamma}} \rho_0 d\mathcal{H}_1 \geq 1$. Выберем на γ_j последовательность дуг γ_{jl} , соединяющих точку a_j с точкой $c_{jl} \in F_{ji} \setminus E$ и стягивающихся к точке a_j при $l \rightarrow \infty$, $j = 0, 1$. Тогда кривая $\tilde{\gamma}_l = \gamma \cup \gamma_{1l} \cup \gamma_{2l} \cup \{a_0, a_1\}$ обладает теми же свойствами, как и $\tilde{\gamma}$, и $\int_{\gamma_{jl}} \rho_0 d\mathcal{H}_1 \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Отсюда $\int_\gamma \rho_0 d\mathcal{H}_1 \geq 1$. Другими словами, ρ_0 – обобщенная допустимая метрика (см. [13]) в проблеме модуля $m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\emptyset)$. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_G \rho_k^q \tilde{\omega} dx = \int_G \rho_0^q \tilde{\omega} dx \geq m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\emptyset)$. Из сравнения этих соотношений с (7) следует, что

$$m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}, F_{1i}, G/\emptyset) = \lim_{k \rightarrow \infty} m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset).$$

В силу оценки (5),

$$m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/\emptyset) = m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E).$$

Известно (см. [5]), что

$$m_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E) = C_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E).$$

Пусть функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(G)$ и равна 1 в окрестности E и в окрестности множества, на котором $f \neq 0$. Тогда $f\varphi_0 = f$ и для линейных комбинаций из (6) функция

$$\sum_{i=1}^s a_i u_i \varphi_0 \tag{10}$$

приближает в $L_{q,\tilde{\omega}}(G)$ функцию f .

Поскольку экстремальная функция для $C_{q,\tilde{\omega}}(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E)$, по определению емкости в $L_{q,\tilde{\omega}}^1(G)$, аппроксимируется функциями u из $C^\infty(G)$, $|\text{grad } u| = 0$ в окрестности E , то $u\varphi_0 \in C_E^\infty(G)$. Заменяя $u_i\varphi_0$ в (10) указанными функциями, получим требуемую аппроксимацию f функциями из $C_E^\infty(G)$. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Компакты F_{0i} , F_{1i} для конденсатора $(F_{0i}^k, F_{1i}^k, G/E)$, рассматриваемого при доказательстве необходимости условия в теореме 3, можно выбрать гладкими.

Это замечание позволяет дать следующий критерий устранимого множества для $FD^{p,\omega}$.

Следствие 1. Для того чтобы компакт $E \subset G$ был устранимым множеством для пространства $FD^{p,\omega}(G \setminus E)$, необходимо и достаточно, чтобы E было $NH_{q,\tilde{\omega}}$ -множеством в G .

В случае, когда E – нульмерный компакт, для кривой γ из доказательства условия необходимости в теореме 3 множество $\gamma \cap E$ является нульмерным, следовательно, существует дуга $\gamma_{jl} \subset \gamma$, соединяющая точку a_j с точкой $c_{jl} \in F_{ji} \setminus E$ и стягивающаяся к a_j при $l \rightarrow \infty$. Поэтому условие $\mathcal{L}_n(E) = 0$ для нульмерного компакта E в определении $NH_{q,\tilde{\omega}}$ -множества является излишним.

Наконец, заменяя условие 2) в теореме 3 на оценку (5), получим еще один критерий устранимого множества для пространства $FD^{p,\omega}$.

Следствие 2. Для того чтобы компакт E был устранимым множеством для пространства $FD^{p,\omega}$, необходимо и достаточно, чтобы

1) существовало $(q, \tilde{\omega})$ -исключительное множество $\mathcal{E} \subset E$ такое, что для каждой невырожденной компоненты α компакта E множество $\alpha \setminus \mathcal{E}$ или пусто, или состоит из единственной точки;

2) для любого заданного $\varepsilon > 0$ $m_{q,\tilde{\omega}}$ -почти каждая составная кривая $\gamma = (\tau(a,b) \setminus E) \setminus \{a,b\} \in \Gamma(E)$, $\text{diam } \tau < \varepsilon$, порождается простой спрямляемой кривой τ такой, что $\mathcal{H}_1(\tau \cap E) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. I. Hedberg, *Removable singularities and condenser capacities*, Arkiv Math. **12**, No. 1 (1974).
2. J. Väisälä, *On the null-sets for extremal distances*, Ser A. I. Math., No. 322 (1962), 1–12.
3. В. В. Асеев, А. В. Сычев, *О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений*, Сиб. мат. журн. **15**, No. 6 (1974), 1213–1227.
4. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, *Критерий устранимости множеств для пространств L^1_p , квазиконформных и квазиизометрических отображений*, Сиб. мат. журн. **18**, No.1 (1977), 48–68.
5. В. А. Шлык, *Нормальные области и устранимые особенности*, Изв. РАН. Сер. мат. **57**, No. 4 (1993), 93–112.
6. И. Н. Демшин, В. А. Шлык, *Критерии устранимых множеств для весовых пространств $L^1_{p,\omega}$, $FD^{p,\omega}$* , Докл. РАН **343**, No. 5 (1995), 590–592.
7. В. В. Muckenhoupt, *The equivalence of two conditions for weight functions*, Studia Math. **49** (1974), 101–106.
8. R. R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities integrals*, Studia Math. **51** (1974).
9. К. Куратовский, *Топология*. Т. 2. М., 1969.
10. L. Schwartz, *Theorie des distributions*, Paris, 1957.
11. В. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **98** (1957), 171–219.
12. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств*, Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
13. В. А. Шлык, *Весовые емкости, модули конденсаторов и исключительные множества по Фюгледу*, Докл. РАН **332**, No. 4 (1993), 428–431.