ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 164, № 3
сентябрь, 2010

А. Р. Итс*, **В. Е. Корепин**†

ОБОБЩЕННАЯ ЭНТРОПИЯ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ СПИНОВОЙ ЦЕПОЧКИ

Рассматривается квантовая XY-цепочка в поперечном магнитном поле. Исследуется энтропия Реньи для блока соседних спинов в бесконечной цепочке при нулевой температуре. По сути энтропия Реньи представляет собой след матрицы плотности блока, возведенной в некоторую степень α. Энтропия блоков большого размера вычислена в терминах эллиптической λ-функции Клейна. Предельная энтропия исследуется как функция параметра α. Показано, что энтропия Реньи есть функция, автоморфная относительно некоторой подгруппы модулярной группы. С помощью этого наблюдения выводятся трансформационные свойства энтропии Реньи относительно отображения $\alpha \to \alpha^{-1}$.

Ключевые слова: квантовое зацепление, спиновая цепочка, анзац Бете.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[5] была решена XY-модель

$$H = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+\gamma)\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + (1-\gamma)\sigma_n^y \sigma_{n+1}^y + h\sigma_n^z.$$

Спектр этой модели имеет вид

$$\epsilon_k = 4\sqrt{\left(\cos k - \frac{h}{2}\right)^2 + \gamma^2 \sin^2 k}.$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить энтропию блока большого размера, составленного из соседних спинов и находящегося в основном состоянии $|\mathrm{GS}\rangle$, как меру зацепления между этим блоком и остатком цепочки [6]–[8].

Будем рассматривать полную цепочку как бинарную систему: $|\mathrm{GS}\rangle = |A\&B\rangle$. Блоку из L соседних спинов отвечает подсистема A, а остатку цепочки – подсистема B. Матрица плотности основного состояния обозначается через $\rho_{AB} = |\mathrm{GS}\rangle\langle\mathrm{GS}|$.

*Department of Mathematical Sciences, Indiana University–Purdue University Indianapolis, Indianapolis, USA. E-mail: itsa@math.iupui.edu

†C. N. Yang Institute for Theoretical Physics, State University of New York, Stony Brook, USA. E-mail: korepin@insti.physics.sunysb.edu

Редуцированная матрица плотности подсистемы A имеет вид $\rho_A = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})$. При этом выражения для энтропии фон Неймана $S(\rho_A)$ и энтропии Реньи $S_{\mathrm{R}}(\rho_A,\alpha)$ спинового блока записываются как

$$S(\rho_A) = -\,\mathrm{Tr}(\rho_A \ln \rho_A), \qquad S_{\mathrm{R}}(\rho_A,\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\ln \mathrm{Tr}(\rho_A^\alpha), \quad 1>\alpha>0.$$

Здесь степень α выступает в роли параметра.

С помощью метода теплицевых определителей, формулы Фишера–Гартвига и методов, основанных на интегрируемых фредгольмовых операторах [9]–[14], энтропия Реньи была вычислена в работах [15]–[19]. Чтобы описать результат, необходимо ввести параметр k:

$$k = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(h/2)^2+\gamma^2-1}}{\gamma}, & 4(1-\gamma^2)<h^2<4, \\ \sqrt{\dfrac{1-(h/2)^2-\gamma^2}{1-(h/2)^2}}, & h^2<4(1-\gamma^2), \\ \dfrac{\gamma}{\sqrt{(h/2)^2+\gamma^2-1}}, & h>2. \end{cases}$$

Нам также понадобятся полный эллиптический интеграл первого рода и модуль:

$$I(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \tau_0 = \frac{I(k')}{I(k)},$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$.

Стандартный модулярный параметр τ задается соотношениями

$$q = e^{\pi i\tau}, \quad \tau = i\,\frac{I(k')}{I(k)} \equiv i\tau_0, \quad \mathrm{Im}\,\tau>0.$$

Тета-функции $\theta_j(z,q)$ [20], [21] при этом записываются как $\theta_j(z|\tau) := \theta_j(z,e^{\pi i\tau})$, $j=1,2,3,4$, а энтропия Реньи приобретает вид

$$S_{\mathrm{R}}(\rho_A,\alpha) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(kk') - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\ln\frac{\theta_2(0|\alpha i\tau_0)\theta_4(0|\alpha i\tau_0)}{\theta_3^2(0|\alpha i\tau_0)} + \frac{1}{3}\ln 2.$$

2. ЭНТРОПИЯ РЕНЬИ И МОДУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Квадрат эллиптического параметра k как функция модулярного параметра τ стандартным образом обозначается через $\lambda(\tau)$ и называется *эллиптической λ-функцией*, или *λ-модулярной функцией* [22]–[26]. Заметим, что

$$\lambda(\tau) = \frac{\theta_2^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \equiv k^2(e^{i\pi\tau}), \quad \mathrm{Im}\,\tau>0, \qquad 1-\lambda(\tau) = \frac{\theta_4^4(0|\tau)}{\theta_3^4(0|\tau)} \equiv {k'}^2(e^{i\pi\tau}).$$

Функция $\lambda(\tau)$ играет центральную роль в теории модулярных функций и модулярных форм, и ей посвящена обширная литература. Формулы для энтропии Реньи в терминах модулярных λ-функций имеют вид

$$S_{\mathrm{R}}(\rho_A,\alpha) = \frac{1}{6}\cdot\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(kk') - \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{1-\alpha}\ln\bigl\{\lambda(\alpha i\tau_0)\bigl(1-\lambda(\alpha i\tau_0)\bigr)\bigr\} + \frac{1}{3}\ln 2$$

при $h > 2$ и

$$S_{\mathrm{R}}(\rho_A, \alpha) = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln\left(\frac{k'}{k^2}\right) + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \ln \frac{\lambda^2(\alpha i\tau_0)}{1-\lambda(\alpha i\tau_0)} + \frac{1}{3} \ln 2$$

при $h < 2$. Эти соотношения позволяют использовать мощный аппарат теории модулярных функций в исследованиях энтропии Реньи. Подробный анализ этого вопроса будет проведен в последующих публикациях. В настоящей работе мы ограничимся описанием двух наиболее непосредственных приложений теории модулярных функций, связанных со свойствами симметрии λ-функции.

Модулярные преобразования. Положим

$$f(\tau) := \lambda(\tau)\bigl(1-\lambda(\tau)\bigr), \qquad g(\tau) := \frac{\lambda^2(\tau)}{1-\lambda(\tau)}$$

и перепишем формулы для энтропии Реньи в новом виде:

$$S_{\mathrm{R}}(\rho_A, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \ln(kk') - \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{1-\alpha} \ln f(\alpha i\tau_0) + \dfrac{1}{3} \ln 2, & h > 2, \\ \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \ln\left(\dfrac{k'}{k^2}\right) + \dfrac{1}{12} \cdot \dfrac{1}{1-\alpha} \ln g(\alpha i\tau_0) + \dfrac{1}{3} \ln 2, & h < 2. \end{cases}$$

Из указанных симметрий вытекают соотношения симметрий для функций $f(\tau)$ и $g(\tau)$ под действием модулярной группы:

$$\begin{aligned} f(\tau+1) &= -\frac{g(\tau)}{f(\tau)}, & f\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= f(\tau), \\ g(\tau+1) &= g(\tau), & g\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{g(\tau)}{f(\tau)}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $f(\tau)$ автоморфна относительно подгруппы модулярной группы, порождаемой преобразованиями

$$\tau \to \tau + 2, \qquad \tau \to -\frac{1}{\tau}, \tag{1}$$

в то время как функция $g(\tau)$ является автоморфной относительно подгруппы модулярной группы, порождаемой преобразованиями

$$\tau \to \tau + 1, \qquad \tau \to -\frac{\tau}{2\tau+1}. \tag{2}$$

Разумеется, обе функции наследуют от λ-функции свойство автоморфности относительно подгруппы, которая представляет собой общую подгруппу для подгрупп преобразований (1) и (2). Мы приходим к следующему утверждению.

Предложение. *С точностью до тривиальных аддитивных членов и мультипликативных факторов и после простого масштабного преобразования энтропия Реньи как функция от α представляет собой функцию, автоморфную относительно подгруппы (1) группы модулярных преобразований в случае $h > 2$ и автоморфную относительно подгруппы (2) группы модулярных преобразований в случае $h < 2$; в обоих случаях энтропия автоморфна относительно действия общей подгрупы двух указанных групп преобразований.*

Из симметрии энтропии Реньи вытекают, в частности, следующие явные соотношения между величинами энтропии в точках α и $1/\alpha\tau_0^2$:

$$S_{\mathrm{R}}\left(\rho_A, \frac{1}{\alpha\tau_0^2}\right) = \frac{\alpha\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1}(1-\alpha)S_{\mathrm{R}}(\rho_A, \alpha) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\alpha^2\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2-1}\ln\frac{kk'}{4}$$

при $h > 2$ и

$$S_{\mathrm{R}}\left(\rho_A, \frac{1}{\alpha\tau_0^2}\right) = \frac{\alpha\tau_0^2 - \alpha^2\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2 - 1}S_{\mathrm{R}}(\rho_A, \alpha) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\alpha^2\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2-1}\ln\frac{k'}{4k^2} - {} \\ - \frac{1}{12}\cdot\frac{\alpha\tau_0^2}{\alpha\tau_0^2-1}\ln f(\alpha i\tau_0)$$

при $h < 2$. Особо отметим появление дополнительного члена, содержащего модулярную функцию $f(\tau)$, в случае $h < 2$.

Список литературы

[1] E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis, *Ann. Phys.*, **16** (1961), 407–466.

[2] E. Barouch, B. M. McCoy, *Phys. Rev. A*, **3**:2 (1971), 786–804.

[3] E. Barouch, B. M. McCoy, M. Dresden, *Phys. Rev. A*, **2**:3 (1970), 1075–1092.

[4] D. B. Abraham, E. Barouch, G. Gallavotti, A. Martin-Löf, *Phys. Rev. Lett.*, **25**:20 (1970), 1449–1450; *Stud. Appl. Math.*, **50** (1971), 121; **51** (1972), 211.

[5] G. Müller, R. E. Shrock, *Phys. Rev. B*, **32**:9 (1985), 5845–5850; J. Kurmann, H. Thomas, G. Müller, *Phys. A*, **112**:1–2 (1982), 235–255.

[6] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, *Phys. Rev. A*, **53**:4 (1996), 2046–2052, arXiv: `quant-ph/9511030`.

[7] A. Rényi, *Probability Theory*, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., **10**, Amsterdam, North-Holland, 1970.

[8] S. Abe, A. K. Rajagopal, *Phys. Rev. A*, **60**:5 (1999), 3461–3466, arXiv: `quant-ph/9904088`.

[9] B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Stat. Phys.*, **116**:1–4 (2004), 79–95, arXiv: `quant-ph/0304108`.

[10] A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Phys. A*, **38**:13 (2005), 2975–2990, arXiv: `quant-ph/0409027`.

[11] M. E. Fisher, R. E. Hartwig, “Toeplitz determinants: some applications, theorems, and conjectures”, *Stochastic Processes in Chemical Physics*, Adv. Chem. Phys., **15**, ed. K. E. Shuler, 1968, 333–353.

[12] E. L. Basor, *Indiana Univ. Math. J.*, **28**:6 (1979), 975–983.

[13] E. L. Basor, C. A. Tracy, *Phys. A*, **177**:1–3 (1991), 167–173.

[14] A. Böttcher, B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, Springer, Berlin, 1990.

[15] A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Phys. A*, **38**:13 (2005), 2975–2990, arXiv: `quant-ph/0409027`.

[16] A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, “Entropy of *XY* spin chain and block Toeplitz determinants”, *Universality and Renormalization*, Fields Inst. Commun., **50**, eds. I. Binder, D. Kreimer, AMS, Providence, RI, 2007, 151–183, arXiv: `quant-ph/0606178`.

[17] F. Franchini, A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *Analysis of entropy of XY spin chain*, arXiv: `quant-ph/0606240`.

[18] F. Franchini, A. R. Its, B.-Q. Jin, V. E. Korepin, *J. Phys. A*, **40**:29 (2007), 8467–8478, arXiv: `quant-ph/0609098`.

[19] J. P. Keating, F. Mezzadri, *Comm. Math. Phys.*, **252**:1–3 (2004), 543–579, arXiv: `quant-ph/0407047`.

[20] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.

[21] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*. Ч. 2. *Трансцендентные функции*, М., 1963.

[22] F. Klein, R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*. v. 2, Teubner, Leipzig, 1890.

[23] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.

[24] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, Internat. Ser. Pure Appl. Math., McGraw-Hill, New York, 1978.

[25] E. W. Weisstein, *Elliptic lambda function*. http://mathworld.wolfram.com/EllipticLambdaFunction.html

[26] E. W. Weisstein, *Klein's absolute invariant*. http://mathworld.wolfram.com/KleinsAbsoluteInvariant.html