ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1993, том 328, № 5.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 1993 г. М. М. Овезова

Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 05.06.92 г.

Поступило 13.07.92 г.

В области D плоскости (x, y), ограниченной сверху кривой Жордана Γ с концами в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$, $l > 0$, а снизу – характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения

$$Lu \equiv u_{yy} + \operatorname{Sgn} y u_{xx} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = f(x, y), \tag{1}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $u(x, y)$ – искомая функция, изучается

Задача Т (Трикоми). Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}(x, y) \in C((\bar{D}) \cap C^1((D) \cap C^2(D_1 \cup D_2), \\ Lu \equiv f \quad \text{в} \quad D_1 \cup D_2, \\ u|_\Gamma = \varphi(s), \quad 0 \le s \le S, \\ u|_{\gamma_1} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{l}{2}, \gamma_1: \ y = -x,\end{gathered} \tag{2}$$

S – длина кривой Γ от $(0, l)$ до точки $(0, 0)$, $\varphi(s)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(S) = \psi(0)$.

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2).

Пусть $f(x, y) = \varphi(s) = \psi(x) \equiv 0$. Рассмотрим сначала подобласть $D_2 = D \cap \{y < 0\}$.

Введем новую функцию $v(x, y)$ следующим образом:

$$v(x, y) = \exp(-\lambda x) u(x, y), \quad \lambda \in R, \tag{3}$$

которая в области D_2 является регулярным решением уравнения

$$v_{yy} - v_{xx} + a_\lambda v_x + b v_y + c_\lambda v = 0, \tag{4}$$

где $a_\lambda = a - 2\lambda$, $c_\lambda = c + a\lambda - \lambda^2$.

Перейдем к характеристическим координатам $\xi = x + y$, $\eta = x - y$; тогда уравнение (4) перепишется в виде

$$L_0 v \equiv v_{\xi\eta} - A v_\xi - B v_\eta - C v = 0, \tag{5}$$

$$A(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(a_\lambda + b)\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

$$B(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(a_\lambda - b)\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

$$C(\xi, \eta) = \frac{1}{4} c_\lambda\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right),$$

а область D_2 отобразится в область $\Delta = \{(\xi, \eta): 0 < \xi < \eta < l\}$.

Пусть (x, x), $x \in [0, l]$, – произвольная точка прямой $\eta = \xi$; проведем через нее характеристику $\eta = x$ уравнения (5). Полученную область, ограниченную прямыми $\eta = x$, $\xi = 0$, $\eta = \xi$, обозначим Δ_x.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Если*

$$v|_{\xi = 0} = 0, \ a(x, y), b(x, y) \in C^1(\overline{D_2}),$$
$$c(x, y) \in C(\overline{D_2}),$$

то найдется такое число $\lambda \ge \lambda_0$, где

$$\lambda_0 = \max_{D_2}\left\{\frac{1}{2}(|a| + 3|b|), \frac{1}{2}\left(\sqrt{4M^2 + (1 - a)^2} + |a - 1|\right)\right\},$$

$$M = \max_{D_2}\left\{\frac{1}{2}\left|a^2 - b^2 - a_\xi - b_\xi - a + b + 2c\right|, \frac{1}{2}\left|2a_\xi + 2b_\xi + a_\eta - a + b - 2c\right|\right\},$$

что для любого регулярного решения уравнения (5) справедливо неравенство

Туркменский институт народного хозяйства, Ашгабат

$$\int_0^x v(\xi,\xi)\,[v_\xi - v_\eta]_{\eta=\xi}\,d\xi \ge K\iint_{\Delta_x}(v_\eta^2 + v^2)\,d\xi d\eta \quad (6)$$

при любом $x \in [0, l]$, $K = K(\lambda) = \text{const} > 0$.

Из леммы 1 следует единственность регулярного решения первой и второй задач Дарбу в следующей постановке.

Задача D. Требуется найти регулярное решение уравнения (5), удовлетворяющее условиям

$$v(\xi,\eta) \in C((\bar{\Delta}) \cap C^2(\Delta), \quad L_0 v \equiv 0 \text{ в } \Delta,$$

$$D_1\colon\ v(\xi,\xi) = \tau(\xi), \quad 0 \le \xi \le l, \quad v(0,\eta) = \psi(\eta)$$

$$0 \le \eta \le l,$$

$$D_2\colon\ v_y(\xi,0) = [v_\xi - v_\eta]_{\eta=\xi} = \nu(\xi),$$

$$0 < \xi < l, \quad v(0,\eta) = \psi(\eta), \quad 0 \le \eta \le l,$$

$\tau(\xi)$, $\nu(\xi)$, $\psi(\xi)$ – достаточно гладкие заданные функции.

Действительно, из (6) при $\tau(\xi) = 0$ или $\nu(\xi) = 0$ следует, что $v(\xi, \eta) \equiv 0$ в области Δ. Кроме того, из (6) получаем справедливость неравенства

$$\int_0^x v(\xi,\xi)\,[v_\xi - v_\eta]_{\eta=\xi}\,d\xi \ge 0$$

при любом $x \in [0, l]$.

Так как $v_\xi - v_\eta = v_y$, то

$$\int_0^x v(t,0)\,v_y(t,0)\,dt \ge 0, \quad x \in [0,l],$$

откуда, в частности, следует неравенство

$$\int_0^l v(t,0)\,v_y(t,0)\,dt \ge 0. \quad (7)$$

В области $D_1 = D \cap \{y > 0\}$ замена (3) преобразует уравнение (1) к виду

$$v_{xx} + v_{yy} + pv_x + bv_y + qv = 0,$$

где $p = a + 2\lambda$, $q = \lambda^2 + a\lambda + c$.

Лемма 2. *Если* $v|_\Gamma = 0$, $b(x, 0) \ge 0$, *выполнена оценка* (7) *и функции* $a(x, y)$, $b(x, y) \in C^1(\bar{D}_1)$, $c(x, y) \in C(\bar{D}_1)$ *в* D_1 *удовлетворяют соотношению*

$$c + \lambda_0^2 + a\lambda_0^2 - \frac{1}{2}a_x - \frac{1}{2}b_y \le 0,$$

то имеет место неравенство

$$\iint_{D_1}(v_x^2 + v_y^2)\,dx\,dy + \int_0^l v(x,0)\,v_y(x,0)\,dx \le 0.$$

Таким образом, если выполнены условия лемм 1 и 2, то $v(x, y) \equiv 0$ в области D, а так как $\exp(-\lambda x)$ в (3) отлична от нуля, то $u(x, y) \equiv 0$ в области D. Тем самым доказана

Теорема 1. *Если выполнены условия лемм* 1 *и* 2, *то регулярное решение задачи* T *для уравнения* (1) *единственно.*

Теперь рассмотрим в области D систему уравнений

$$Lu \equiv u_{yy} + \operatorname{Sgn} y\, u_{xx} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad (8)$$

где $a(x, y) = \|a_{ij}\|_1^n$, $b(x, y) = \|b_{ij}\|_1^n$, $c(x, y) = \|c_{ij}\|_1^n$ – заданные квадратные матрицы, $u(x, y) = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – искомая вектор-функция.

Следуя [1 - 3], сведем систему (8) к уравнению. Решение системы (8) будем искать в виде $u = Re$, где

$$e(x,y) = (e_1, e_2, \ldots, e_n), \quad R = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2(x,y)\right)^{1/2};$$

тогда система преобразуется к виду

$$eR_{yy} + \operatorname{Sgn} y\, eR_{xx} + aeR_x + beR_y + LeR + 2e_yR_y + \\ + \operatorname{Sgn} y\, 2e_xR_x = 0.$$

Полученное уравнение умножим на вектор e; тогда, учитывая, что $(e, e) = 1$, $(e, e_x) = (e, e_y) = 0$, будем иметь

$$R_{yy} + \operatorname{Sgn} y R_{xx} + AR_x + BR_y + CR = 0, \quad (9)$$

$$A(x,y) = (e, ae), \quad B(x,y) = (e, be), \quad C(x,y) = (e, Le).$$

Для уравнения (9), используя изложенное выше, можно получить аналогичный результат, из которого будет следовать теорема единственности регулярного решения задачи Трикоми для системы (8).

Теорема 2. *Если* a, b, a_x, b_y, c – *матрицы, определенные и ограниченные в* $D_1 \cup D_2$, $\lim\limits_{y \to 0_+} b(x, y) \ge 0$ *и матрица* $c(x, y)$ *в* D_1 *такая, что справедливо неравенство*

$$-\sum_{i,j=1}^n c_{ij}t_it_j > \lambda_0^2|t|^2,$$

λ_0 – *достаточно большое число, то задача Трикоми для системы* (8) *имеет единственное решение.*

Следует заметить, что величина λ_0^2, так же как и в случае одного уравнения, будет зависеть от значений компонент матриц a, b, c в области $D_1 \cup D_2$.

Замечание. При $a = b \equiv 0$ теорема единственности решения задачи Трикоми для уравне-

ния (1) и соответствующей системы получена в работе [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Muresan A.S.* // An. sti. Univ. lasi. Sec. I.A. 1978. V. 24. N. 1. P. 87 - 91.
2. *Лернер М.Е.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 5. С. 848 - 858.
3. *Сабитов К.Б.* // Там же. 1991. Т. 27. № 2. С. 272 - 278.
4. *Сабитов К.Б.* // Там же. 1986. Т. 22. № 11. С. 1977 - 1984.