

УДК 519.6:519.85

О ЗАДАЧЕ ФИКСИРОВАННЫХ ДОПУСКОВ¹⁾

© 1997 г. С. И. Дудов

(Саратов)

Поступила в редакцию 15.03.96 г.
Переработанный вариант 20.06.96 г.

Рассматривается задача расчета номинальных значений параметров проектируемого устройства, изготовление по которым обеспечивало бы получение устройства с наилучшей качественной характеристикой, в пределах точностных возможностей используемого оборудования. Приводится ее формализация в виде задачи отыскания максимина функции разности аргументов. Предлагается алгоритм решения для случая, когда качественная характеристика устройства является квазивогнутой функцией параметров.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разработчик устройства, учитывая процесс его будущей технической реализации, часто бывает вынужден ориентироваться на уже имеющийся комплекс оборудования, точностные возможности которого ему известны. Тогда в той стадии проектирования, когда определена элементная база и структура устройства, а затем исследована функциональная зависимость качественной характеристики устройства от параметров, возникает следующая задача. Требуется указать номинальные значения параметров, изготовление по которым обеспечивает наилучшую в пределах точностных возможностей оборудования, выходную характеристику устройства. Приведем одну из возможных формализаций этой задачи.

Пусть функция $f(x)$ выражает зависимость качественной характеристики устройства от его параметров, совокупность которых есть вектор $x \in \mathbb{R}^p$. Для определенности будем считать, что чем больше значение $f(x)$, тем устройство лучше. Будем считать, что ограниченность точностных возможностей используемого оборудования выражается следующим образом. Если задать для изготовления вектор номинальных значений параметров x , то нам гарантируется лишь попадание вектора параметров реально изготовленного устройства в некоторый компакт $C(x) \subset \mathbb{R}^p$. В этом случае величина

$$\varphi(x) = \min_{y \in C(x)} f(y) \quad (1.1)$$

выражает возможное наихудшее значение качественной характеристики после изготовления. Задачу отыскания максимума функции “наихудшего варианта”

$$\varphi(x) \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (1.2)$$

как и в [1]–[3], будем называть задачей фиксированных допусков (з.ф.д.). Это подчеркивает то обстоятельство, что в одном из возможных и наглядных вариантов разработчик располагает информацией о допусках по каждому из параметров, которые может выдерживать оборудование. В последнем случае компакт $C(x)$ – ориентированный по осям координат параллелепипед с центром в точке x , половины ребер которого суть соответствующие допуски на параметры.

В работах [1], [2] для решения задачи (1.1), (1.2) в предположении кусочной гладкости функции $f(x)$ предлагаются некоторые методы решения минимаксных задач общего вида и, в частности, метод Мэдсена (см. [4]). С этой целью обсуждаются особенности подсчета функции “наихудшего варианта” (1.1). Подробно рассматриваются случаи, когда величина, соответствующая наихудшему варианту, приходится на вершину параллелепипеда $C(x)$ (если компакт $C(x)$ таковым является), что, разумеется, упрощает подсчет $\varphi(x)$.

Заметим, что точностные возможности оборудования обычно не зависят от задаваемого номинала. Поэтому естественно представлять компакт $C(x)$ в виде сдвига некоторого фиксирован-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 95-01-00156).

ного компакта $C(x) = x - \Omega$, который отражает непосредственно точностные возможности. Тогда задачу (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$\varphi(x) = \min_{y \in \Omega} f(x - y) \longrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}^p} . \quad (1.3)$$

Характеризацию решения задачи (1.3) для случая гладкой функции $f(x)$ нетрудно получить, используя, например, [5]–[7]. В задачах проектирования радиотехнических устройств функция качества $f(x)$ часто имеет маргинальный вид [3] и предположение о ее гладкости становится невыполнимым. Работа [8] позволяет получить необходимые и достаточные условия решения задачи (1.3) при основном предположении о непрерывности и дифференцируемости по направлениям функции $f(x)$, а также функции, лебеговым множеством которой является Ω .

Заметим, что если

$$f(x) = \min_{i=1,2,\dots,m} \{A_i, x\} + b_i, \quad A_i \in \mathbb{R}^p, \quad b_i \in \mathbb{R}^1,$$

то задача (1.3) может быть сведена к задаче линейного программирования, как в [9]. Этот случай может быть положен в основу построения алгоритма решения задачи (1.3) для произвольной конечной вогнутой функции $f(x)$. Функция $\varphi(x)$ при этом будет вогнутой и, значит, задача (1.3) будет также допускать применение общих методов выпуклого программирования (например, [9]–[12]).

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм решения з.ф.д. в качестве основного требования предполагает лишь квазивогнутость функции $f(x)$, а также то, что множество

$$C(x) = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid n(x - y) \leq r\}$$

является шаром в некоторой норме $n(\cdot)$ (или, как будем далее говорить, телом нормы) фиксированного радиуса r .

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Обговорим подробнее те предположения, при которых далее будет изложена принципиальная схема алгоритма.

Предположение 1. Функция $f(x)$ непрерывна, квазивогнута и ограничена сверху на \mathbb{R}^p .

Определение. Функция $f(x)$ называется квазивогнутой на \mathbb{R}^p , если для любых $x, y \in \mathbb{R}^p$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}.$$

Если при $\alpha \in (0, 1)$ это неравенство строгое, то функция называется строго квазивогнутой [10].

В основу алгоритма положен тот факт, что для квазивогнутой функции лебегово множество $G(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) > \alpha\}$ является выпуклым.

Пусть x_0 – начальное приближение решения задачи.

Предположение 2. Множество $G(\alpha_0)$, где

$$\alpha_0 = \min_{y \in B(0, r)} f(x_0 - y),$$

непустое (иначе x_0 – решение задачи) и ограниченное, и задан ограниченный выпуклый многогранник M_0 , содержащий $G(\alpha_0)$.

Кроме того, если только заранее не известно, что $f(x)$ – вогнутая или строго квазивогнутая функция, то считаем, что выполняется

Предположение 3. Известен элемент

$$z \in \operatorname{Argmax}_{x \in \mathbb{R}^p} f(x).$$

Пусть нам уже известна точка x_k , k -е приближение, число α_k и ограниченный выпуклый многогранник M_k , содержащий непустое множество $G(\alpha_k)$. Опишем поэтапно получение тройки объектов $\{x_{k+1}, \alpha_{k+1}, M_{k+1}\}$.

1. Подсчитываем значение $f(x_k)$, а также

$$\varphi(x_k) = \min_{y \in B(0, r)} f(x_k - y)$$

и полагаем $m := 0, M_{k0} := M_k$,

$$\{\alpha_{k+1}, z_{k+1}\} = \begin{cases} \{\varphi(x_k), x_k\}, & \text{если } \varphi(x_k) > \alpha_k \text{ или } k = 0, \\ \{\alpha_k, z_k\}, & \text{если } \varphi(x_k) \leq \alpha_k. \end{cases}$$

2. Если $f(x_k) = \alpha_{k+1} = f(z)$, то очевидно, что x_k – решение задачи, и процесс решения закончен. В противном случае выполняем один из следующих вариантов:

а) если $f(x_k) > \alpha_{k+1}$, то находим одну из точек $y_k \in \Omega_k = \mathbb{R}^p \setminus G(\alpha_{k+1})$, удовлетворяющую условию

$$n(x_k - y_k) = \min_{y \in \Omega_k} n(x_k - y); \tag{2.1}$$

б) если $f(x_k) = \alpha_{k+1} < f(z)$, то ищем точку y_k , являющуюся точкой пересечения отрезка $[z, x_k]$ с границей множества $G(\alpha_{k+1})$.

3. Строим в точке y_k опорную гиперплоскость $\pi(y_k)$ к выпуклому множеству $G(\alpha_{k+1})$ (любую, если она неединственна). Вместе с граничными гиперплоскостями многогранника M_{km} она образует многогранник $M_{k,m+1}$, также содержащий $G(\alpha_{k+1})$. Полагаем $m := m + 1$.

4. Решаем задачу

$$\min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{km})} n(x - y) \longrightarrow \max_{x \in M_{km}}. \tag{2.2}$$

Здесь и далее под $\text{cl}A$ понимаем замыкание множества A . Пусть x_{km} – любое решение задачи (2.2). Если только

$$r_{km} = \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{km})} n(x_{km} - y) \leq r,$$

то, в силу включения $G(\alpha_{k+1}) \subset M_{km}$, отсюда следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^p$ тело нормы $B(x, r)$ имеет точки вне $G(\alpha_{k+1})$ и, следовательно, $\varphi(x) \leq \alpha_{k+1}$. Тогда точка z_{k+1} является решением задачи, и процесс решения закончен. В противном случае переходим к выполнению следующего этапа.

5. Если $x_{km} \in G(\alpha_{k+1})$, то полагаем $x_{k+1} := x_{km}, M_{k+1} := M_{km}$, и шаг алгоритма на этом этапе закончен. В противном случае в зависимости от того, какой из вариантов, а) или б), выполнялся, находим точку пересечения, соответственно, отрезка $[x_k, x_{km}]$ или $[z_k, x_{km}]$ с границей множества $G(\alpha_{k+1})$. Обозначаем ее через y_k и передаем управление в п. 3.

В разделе 3 будет доказано, что заикливания в пп. 3–5 не произойдет, т.е. для конечного m_k элемент x_{km_k} попадет в $G(\alpha_{k+1})$ и выполнение шага на этом закончится. Таким образом, мы либо при выполнении п. 2 или п. 4 найдем решение задачи, либо построим тройку объектов $\{x_{k+1}, \alpha_{k+1}, M_{k+1}\}$, для которой точка x_{k+1} принадлежит непустому множеству $G(\alpha_{k+1})$, а ограниченный выпуклый многогранник M_{k+1} содержит $G(\alpha_{k+1})$.

3. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Для того чтобы показать, что при выполнении пп. 3–5 не произойдет заикливания, докажем, что справедлива

Лемма 1. Для любого k найдется конечное m_k такое, что $x_{km_k} \in G(\alpha_{k+1})$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что на некотором k -м шаге алгоритм строит бесконечную последовательность $\{x_{ki}\}, i = 1, 2, \dots, \infty$, и при этом $x_{ki} \notin G(\alpha_{k+1})$. В соответствии с п. 3,

$$\min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{ki})} n(x_{ki} - y) = \max_{x \in M_{ki}} \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{ki})} n(x - y), \tag{3.1}$$

а кроме того, поскольку точку x_{ki} отделяет от $M_{k,i+1}$ опорная гиперплоскость, достраиваемая по-

сле выполнения п. 5, то

$$x_{ki} \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k,i+1}). \quad (3.2)$$

Так как $G(\alpha_{k+1})$ – непустое открытое множество, то в него можно вложить тело нормы некоторого положительного радиуса ρ_{k+1} . Для любого i многогранник M_{ki} содержит $G(\alpha_{k+1})$, и поэтому максимальный радиус тела нормы, вложенного в M_{ki} , не меньше ρ_{k+1} :

$$\max_{x \in M_{ki}} \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{ki})} n(x-y) \geq \rho_{k+1}. \quad (3.3)$$

Теперь для любых $i > v$, последовательно используя (3.2), вложенность многогранников $\{M_{ki}\}$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, (3.1) и (3.3), получаем

$$n(x_{ki} - x_{kv}) \geq \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k,v+1})} (x_{ki} - y) \geq \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{ki})} n(x_{ki} - y) \geq \rho_{k+1} > 0. \quad (3.4)$$

Последовательность $\{x_{ki}\}$, $i = 1, 2, \dots, \infty$, ограничена, поскольку содержится, по построению, в M_k . Тогда из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит (3.4). Лемма доказана.

В соответствии с п. 2 и п. 4 шага алгоритма либо на каком-то шаге мы получим решение задачи, либо алгоритм строит бесконечную последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, для которой

$$f(z) > \alpha_{k+1}, \quad r_{km_k} > r, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (3.5)$$

где m_k таково, что $x_{km_k} = x_{k+1} \in G(\alpha_{k+1})$. Далее в этом разделе считаем, что выполняется условие (3.5).

Прежде чем приступить к обсуждению сходимости алгоритма, докажем справедливость следующего факта.

Лемма 2. Начиная с некоторого шага, всегда $x_{k1} \in G(\alpha_{k+1})$.

Доказательство. Если предположить противное, то существует последовательность $\{k_j\} \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$, такая, что $x_{k_j 1} \notin G(\alpha_{k_j+1})$. Пусть положительное число ρ_k есть максимальный радиус тела нормы, вложенного в $\text{cl}(G(\alpha_k))$. Последовательность $\{\rho_k\}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, невозрастающая. Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho^* > 0. \quad (3.6)$$

Действительно, если предположить, что $\rho^* = 0$, то, начиная с некоторого шага, получим, что $\rho_k < r$, $k \geq N_0$, и тогда тело нормы $B(x_k, r)$ имеет точки вне $G(\alpha_{N_0})$. Это означает, что

$$\varphi(x_k) = \min_{y \in B(x_k, r)} f(y) \leq \alpha_{N_0}, \quad k \geq N_0.$$

Тогда, как следует из п. 1, последовательность $\{\alpha_k\}$, $k = N_0, \dots, \infty$, является стационарной, а вместе с ней – и последовательность $\{\rho_k\}$. Это противоречит предположению о том, что $\rho^* = 0$.

Теперь, используя (3.6) и продолжая рассуждения по аналогии с доказательством леммы 1, получаем

$$n(x_{k_i 1} - x_{k_v 1}) \geq \rho_{k_i+1} \geq \rho^* > 0 \quad \forall i > v,$$

что влечет противоречие с возможностью выделить из ограниченной последовательности $\{x_{k_j 1}\}$, $j = 1, 2, \dots, \infty$, сходящуюся подпоследовательность. Лемма доказана.

Утверждение леммы фактически говорит о том, что, начиная с некоторого номера, на каждом шаге опорная гиперплоскость будет строиться только один раз, т.е. передачи управления из п. 5 в п. 3 не происходит.

Рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве лемм 1, 2, позволяют доказать следующий факт.

Лемма 3. Начиная с некоторого шага, всегда $x_k \in G(\alpha_{k+1})$. Другими словами, лемма утверждает, что, начиная с некоторого шага, в п. 2 всегда выполняется вариант а).

Теорема. Любая предельная точка x^* последовательности $\{x_k\}, k = 0, 1, \dots, \infty$, является решением задачи (1.3), причем $\varphi(x^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k$. Если к тому же $f(x)$ – строго квазиогнутая функция, то последовательность $\{x_k\}$ сходится к единственному решению задачи.

Доказательство. По построению, последовательность $\{\alpha_k\}$ не убывает. Тогда из ограниченности сверху функции $f(x)$ следует существование конечного предела $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha^*$. Пусть последовательность $\{x_{k_j}\}, k_j \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$, сходится к x^* . В соответствии с п. 1 шага алгоритма, имеем

$$\varphi(x_k) = \min_{y \in B(x_k, r)} f(y) \leq \alpha_{k+1}$$

и, следовательно,

$$\min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus G(\alpha_{k+1}))} n(x_k - y) \leq r. \tag{3.7}$$

В силу леммы 3, начиная с некоторого шага, в п. 2 всегда выполняется вариант а). Тогда из п. 3, учитывая лемму 2, выпуклость $G(\alpha_{k_j+1})$ и неравенство (3.7), получаем

$$d_{k_j} = \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k_j+1})} n(x_{k_j} - y) = \min_{y \in \mathbb{R}^p \setminus G(\alpha_{k_j+1})} n(x_{k_j} - y) \leq r. \tag{3.8}$$

Согласно п. 3 и условию (3.5), также имеет место

$$r_{k_j} = \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k_j})} n(x_{k_j} - y) = \max_{x \in M_{k_j}} \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k_j})} n(x - y) > r. \tag{3.9}$$

Разобьем дальнейшее доказательство на несколько этапов.

Этап 1. Докажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} d_{k_j} = r. \tag{3.10}$$

Действительно, используя неравенство треугольника, вложенность многогранников $\{M_k\}, k = 0, 1, \dots, \infty$, соотношения (3.8), (3.9), получаем

$$\begin{aligned} r < r_{k_j} &\leq \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k_j})} \{n(x_{k_{j-1}} - y) + n(x_{k_j} - x_{k_{j-1}})\} = \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k_j})} n(x_{k_{j-1}} - y) + n(x_{k_j} - x_{k_{j-1}}) \leq \\ &\leq \min_{y \in \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus M_{k_{j-1}+1})} n(x_{k_{j-1}} - y) + n(x_{k_j} - x_{k_{j-1}}) = d_{k_{j-1}} + n(x_{k_j} - x_{k_{j-1}}) \leq r + n(x_{k_j} - x_{k_{j-1}}). \end{aligned}$$

Отсюда и из сходимости последовательности $\{x_{k_j}\}, j = 1, 2, \dots, \infty$, следует (3.10).

Этап 2. Покажем, что

$$\varphi(x^*) = \alpha^*. \tag{3.11}$$

В силу п. 1 шага алгоритма, $\varphi(x_k) \leq \alpha_{k+1}$, а из непрерывности функции $f(x)$ следует и непрерывность $\varphi(x)$. Таким образом, имеем неравенство $\varphi(x^*) \leq \alpha$. Предположим, что $\varphi(x^*) < \alpha^*$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\varphi(x^*) = \min_{y \in B(x^*, r)} f(y) < \alpha_k - \varepsilon < \alpha^*$$

при всех достаточно больших k и, следовательно, можно указать такое $r(\varepsilon)$, что

$$\mu_k = \min_{y \in \mathbb{R}^p \setminus G(\alpha_k)} n(x^* - y) < r(\varepsilon) < r. \tag{3.12}$$

Из вложенности множеств $\{G(\alpha_k)\}, k = 1, 2, \dots, \infty$, вытекает, что последовательность $\{\mu_k\}, k = 1, 2, \dots, \infty$, невозрастающая и, кроме того,

$$\mu_{k_j} \geq \min_{y \in \mathbb{R}^p \setminus G(\alpha_{k_j+1})} \{n(x_{k_j} - y) - n(x^* - x_{k_j})\} = d_{k_j} - n(x^* - x_{k_j}).$$

Отсюда с учетом (3.10) следует, что $\lim_{j \rightarrow \infty} \mu_{k_j} \geq r$, а это противоречит (3.12).

Этап 3. Покажем, что x^* – точка максимума функции $\varphi(x)$ на \mathbb{R}^p . В самом деле, предположим,

что существует такая точка $\hat{x} \in \mathbb{R}^p$, что $\varphi(\hat{x}) > \varphi(x^*)$ или, учитывая (3.11), что

$$\varphi(\hat{x}) = \min_{y \in B(\hat{x}, r)} f(y) > \alpha^*.$$

Это означает, что ρ^* , как максимальный радиус тела, вложенного в $\text{cl}(G(\alpha^*))$, больше r . Тогда, используя включения

$$B(\hat{x}, \rho^*) \subset \text{cl}(G(\alpha^*)) \subset \text{cl}(G(\alpha_k)) \subset M_k,$$

получаем $r_k \geq \rho^* > r$. Это противоречит (3.10).

Осталось заметить, что если $f(x)$ – строго квазивогнутая функция, то, как легко видеть, и $\varphi(x)$ – строго квазивогнутая функция. Таким образом, последовательность $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, в силу предыдущих рассуждений сходится к единственному решению задачи. Теорема доказана полностью.

4. ОБСУЖДЕНИЕ АЛГОРИТМА

Дополним принципиальную схему алгоритма комментариями, поясняющими реализацию его шага.

1°. Наиболее просто подсчитывать значение $\varphi(x_k)$ из п. 1 шага алгоритма для случая, когда $B(0, r)$ является многогранником. Если $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, – его вершины, то из квазивогнутости следует, что

$$\varphi(x_k) = \min_{i=1, 2, \dots, l} f(x_k - v_i).$$

2°. Если заранее известно, что $f(x)$ – вогнутая или строго квазивогнутая функция, то из равенства $f(x_k) = \alpha_{k+1}$ следует, что x_k – точка максимума функции $f(x)$ на \mathbb{R}^p , так что в этом случае нет необходимости знать точку $z \in \text{Arg max}_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$, а в п. 2 вариант б) не имеет места. Однако если $f(x)$ только квазивогнута, то равенство $f(x_k) = \alpha_{k+1}$ гарантирует только то, что x_k – локальное решение задачи. Поэтому может возникнуть необходимость выполнять вариант б) из п. 2, что и показывает следующий

Пример 1. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$, $n(x) = |x|$, $r = 1$, $B(0, 1) = [-1, 1]$, $x_0 = 7$. Тогда для функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 3, \\ 6 - x, & 3 < x \leq 6, \\ 0, & 6 < x \leq 10, \\ 10 - x, & x > 10, \end{cases}$$

имеет место $\varphi(x_0) = \alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $f(x_0) = \alpha_1 < f(3) = 3$. Нетрудно увидеть, что точка $x^* = 3$ является решением задачи, в то время как x_0 – только ее локальное решение в окрестности радиуса 2.

3°. Отыскание точки $y_k \in \Omega_k$ в п. 2 шага алгоритма, удовлетворяющей (2.1) для случая, когда $B(0, r)$ – многогранник с вершинами $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, сводится к следующему. Достаточно из точки x_k провести лучи с направляющими $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, l$, до пересечения с границей множества $G(\alpha_{k+1})$. Ясно, что хотя бы одна из точек пересечения является проекцией точки x_k на Ω_k в норме $n(\cdot)$, т.е. удовлетворяет (2.1). Заметим также, что если $\varphi(x_k) = \alpha_{k+1}$ и $f(x)$ – строго квазивогнутая функция, то соотношению (2.1) удовлетворяет точка $y_k = x_k - \hat{z}_k$, где точка $\hat{z}_k \in B(0, r)$ найдена при отыскании $\varphi(x_k)$ в п. 1:

$$\varphi(x_k) = f(x_k - \hat{z}_k) = \min_{y \in B(0, r)} f(x_k - y).$$

Полезные факты для приближенного решения задачи (2.1) можно найти в [13].

4°. Если $f(x)$ – вогнутая функция и нам известен ее супердифференциал $\partial \bar{f}(x)$, то гиперплоскость

$$\pi(y_k) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid (w, x - y_k) = 0\},$$

где $w \neq 0$ – любой элемент и $\partial \bar{f}(y_k)$, является опорной к $G(\alpha_{k+1})$ в точке y_k .

5°. Задача (2.2), с геометрической точки зрения, требует вложить тело нормы наибольшего радиуса в многогранник M_{km} . Как показано в [14], она сводится к задаче линейного программирования.

6°. Нетрудно представить пример, когда на начальных шагах может возникнуть ситуация $x_{km} \notin G(\alpha_{k+1})$, если многогранник M_0 является слишком грубой оценкой для $G(\alpha_0)$. Тем не менее заикливания в пп. 3–5 шага алгоритма, в силу леммы 1, из-за дополнительного построения опорных гиперплоскостей не произойдет. Более того, в соответствии с леммой 2, начиная с некоторого шага, необходимость в этом построении отпадает, т.е. всегда будет выполняться $x_{k1} \in G(\alpha_{k+1})$. А кроме того, отпадает необходимость в реализации варианта б) из п. 2.

7°. Можно показать, что для случая вогнутой или строго квазивогнутой функции $f(x)$ можно заменить в описании алгоритма множество $G(\alpha)$ на $D(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^p | f(x) \geq \alpha\}$. Это все равно приведет к решению задачи. Но для просто квазивогнутой функции этого делать нельзя, что показывает

Пример 2. В примере 1 возьмем другую точку: $x_0 = 5$. Тогда $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $G(\alpha_1) = (0, 6)$, $D(\alpha_1) = [0, 10]$, $f(x_0) = 1 > \alpha_1$. Если возьмем $M_0 = [0, 10]$, то при замене в алгоритме $G(\alpha)$ на $D(\alpha)$ он выдает стационарную последовательность $x_k = x_0$, $k = 1, 2, \dots, \infty$. Однако точка x_0 не является даже локальным решением, так как $\varphi(x) > \varphi(x_0)$ для любого $x \in (1, 5)$.

8°. Число граней многогранника M_k , а также M_{km} , для которого решается задача (2.2), растет с каждым шагом. В программной реализации можно использовать модификацию алгоритма, в которой, начиная с некоторого шага, формировать $M_{k,m+1}$ из M_{km} в п. 3 шага алгоритма заменой наиболее удаленной в норме $n(\cdot)$ от точки x_k граничной гиперплоскости многогранника M_{km} на опорную гиперплоскость $\pi(y_k)$.

9°. При соответствующих дополнительных требованиях на $f(x)$ и $n(x)$ условия оптимальности из [8] и [15] можно использовать для выбора критерия остановки работы алгоритма.

Предложенный в настоящей работе алгоритм решения з.ф.д. для квазивогнутой функции достаточно прост в реализации. Основные этапы выполнения его шага состоят в отыскании проекции точки в используемой норме $n(\cdot)$ на дополнение выпуклого множества, в построении опорной гиперплоскости к выпуклому множеству и в решении задачи линейного программирования.

Эффективность некоторых модификаций алгоритма проверена автором на задачах с нормой вида $n(x) = \max_{i=1,2,\dots,p} |x^{(i)}|$. В заключение приведем результаты решения одной модельной задачи.

Пример 3. Пусть $p = 2$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^p$, $n(x) = \max\{|x^{(1)}|, |x^{(2)}|\}$, $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$, $f_1(x) = \exp\{-(x^{(1)})^2 - (x^{(2)})^2\}$, $f_2(x) = \exp\{-16(x^{(1)} - 1)^2 - 4(x^{(2)} - 1)^2 + 100\}$. Легко увидеть, что $f(x)$ – строго квазивогнутая функция. Результаты применения алгоритма к решению задачи (1.3) с данной функцией $f(x)$ для различных значений r отражены в табл. 1.

Количество шагов алгоритма, сделанных для достижения решения с заданной точностью, зависело главным образом от грубости оценки множества $G(x_0)$ многогранником M_0 . Используя достаточное условие решения для случая квазивогнутой функции $f(x)$, приведенное в [15], можно убедиться в том, что действительно получены решения задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брейтон Р.К., Хэчтел Г.Д., Санджованни-Винчензелли А.Л. Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // Тр. Ин-та по электротехн. и радиоэлектронике. М., 1981. Т. 69. № 10. С. 180–215.
2. Schjaer-Jacobsen H., Madsen K. Algorithms for worst-case tolerance optimization // IEEE Trans. Circuits Syst. 1979. V. CAS-26. № 9. P. 775–783.
3. Дудов С.И., Мещанов В.П. Параметрическая оптимизация проектируемых устройств по критериям стоимости и качества // Обзоры по электротехн. Сер. 1. Электроника СВЧ. М.: ЦНИИ “Электроника”, 1990. Вып. 1 (1512).
4. Madsen K., Schjaer-Jacobsen H., Voldby J. Automated minimax design of networks // IEEE Trans. Circuits Syst. 1975. V. CAS-22. № 10. P. 791–795.
5. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

6. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
8. Дудов С.И. Необходимые и достаточные условия максимина функции разности аргументов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1869–1884.
9. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование М.: Наука, 1964.
10. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
11. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
12. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
13. Бердышев В.И. Варьирование нормы в задаче о наилучшем приближении // Матем. заметки. 1981. Т. 29. № 2. С. 181–196.
14. Дудов С.И. Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. № 5. С. 153–159.
15. Дудов С.И. К решению задачи фиксированных допусков // “Понтрягинские чтения-VII”. Тезисы докл. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1996. С. 70.