

УДК 517.944/.947

**О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ  
 ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА**

**Я. И. КАНЕЛЬ**

(Москва)

1. В [1] была поставлена задача о поведении при  $t \rightarrow \infty$  решений задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad u = (u_1, \dots, u_n),$$

$$\Phi(u) = (\Phi_1(u), \dots, \Phi_n(u)), \quad \mu = \text{const} > 0.$$

В [2] доказано существование решения смешанной краевой задачи для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \text{grad } \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad u = (u_1, \dots, u_n), \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (1)$$

В [3] доказано существование и единственность решений смешанной краевой задачи и задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений с ограниченными коэффициентами и для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi(v)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (2)$$

При  $\mu = 0$  система (2) описывает одномерное изэнтропическое движение газа.

В [4] исследовано поведение при  $t \rightarrow \infty$  решения задачи Коши для одного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0.$$

Ниже доказывается существование решений смешанной краевой задачи и задачи Коши для системы (1) при несколько более слабых ограничениях на функцию  $\Phi(u)$ , чем в [2]. Исследуется поведение решений этих задач при  $t \rightarrow \infty$ . В п. 4 результаты для системы (1) распространяются на систему

$$\frac{\partial \text{grad } L(u)}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 \text{grad } L(u)}{\partial x^2} + \frac{\partial \text{grad } \Phi(u)}{\partial x} = 0, \quad (1')$$

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad \mu = \text{const} > 0,$$

а в п. 5 — на систему (2).

2. Рассмотрим для системы (1) смешанную краевую задачу при условиях

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_{x=x_1} = u|_{x=x_2} = c = \text{const.} \quad (3)$$

Здесь  $u_0(x)$  — достаточно гладкая вектор-функция,  $u_0(x_1) = u_0(x_2) = c$ . Относительно функции  $\Phi(u)$  будем предполагать, что она достаточно гладкая и удовлетворяет условию

$$M^2 / (\max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)| + 1) \rightarrow \infty \text{ при } M \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь  $|\Phi''(u)|$  — норма оператора в  $E^n$ , соответствующего матрице

$$\Phi''(u) = \left\| \frac{\partial^2 \Phi(u)}{\partial u_i \partial u_j} \right\|.$$

При всех этих предположениях имеет место

**Теорема 1.** *Существует решение  $u(x, t)$  задачи (1) — (3). Вектор-функция  $u(x, t) \rightarrow c$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ .*

**Доказательство.** Учитывая, что при замене  $u = u' + c$  вид системы (1) не меняется, можно предположить, что  $c = 0$ .

Умножим (1) скалярно на  $u$ , затем проинтегрируем по прямоугольнику  $R_{T_1}(x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq t \leq T_1)$  произвольной высоты  $T_1 > 0$ . Воспользуемся тождеством

$$\left( u, \frac{\partial \text{grad } \Phi(u)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} [(u, \text{grad } \Phi(u)) - \Phi(u)]$$

и условиями (3) (где  $c = 0$ ). После интегрирования по частям получим

$$\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_0^2(x) dx. \quad (5)$$

Продифференцируем (1) по  $x$ . Будем иметь

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'(u)}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь  $u_x = \partial u / \partial x$ ,  $\Phi'(u) = \text{grad } \Phi(u)$ . Умножим полученное равенство скалярно на  $u_x$  и проинтегрируем по  $R_{T_1}$ . После интегрирования по частям будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (u_0')^2 dx + \\ + \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt + \int_0^{T_1} \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу (1) и (3) последнее слагаемое правой части (6) равно нулю. Имеем

$$\left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \leq \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 = \left|\Phi'' \frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \leq |\Phi''(u)|^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \leq \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{2\mu} |\Phi''(u)|^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \quad (7)$$

Пусть  $T_1 \leq T$ , где  $T > 0$  — любое число. Пусть  $M = \max_{t \leq T} |u(x, t)|$ .

Из (6), (7) и (5) следует

$$\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx dt \leq \leq \int_{x_1}^{x_2} (u_0')^2 dx + \frac{1}{2\mu^2} \max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)|^2 \int_{x_1}^{x_2} u_0^2 dx. \quad (8)$$

Имеем, в силу условия  $u(x_1, t) = 0$ ,

$$|u|^2 = (u, u) = \int_{x_1}^x \frac{\partial(u, u)}{\partial x} dx = 2 \int_{x_1}^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) dx \leq \leq 2 \sqrt{\int_{x_1}^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx} \sqrt{\int_{x_1}^x u^2 dx}. \quad (9)$$

Из (5), (8) и (9) получим при  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $0 \leq T_1 \leq T$

$$|u(x, T_1)|^2 \leq \frac{1}{\mu} C_0 \max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)| + C_0. \quad (10)$$

Здесь постоянная  $C_0$  зависит лишь от данных задач и не зависит от  $T$ . Из (10) легко следует неравенство

$$M^2 \leq \frac{1}{\mu} C_0 \max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)| + C_0,$$

или

$$M^2 / (\max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)| + \mu) \leq \frac{1}{\mu} C_0. \quad (11)$$

Из (11) и (4) следует, что  $M \leq M_0 < +\infty$ , где  $M_0$  зависит лишь от данных задачи и не зависит от  $T$ . Следовательно, всюду в полосе  $R(x_1 \leq x \leq x_2, t \geq 0)$  справедливо неравенство

$$|u(x, t)| \leq M_0. \quad (12)$$

Из этого неравенства следует существование решения (см. [3]). Докажем, что

$$z(t) = \int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x, t) dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

В силу произвольности  $T_1$  в (5), будем иметь

$$\int_0^{+\infty} z(t) dt < +\infty. \quad (13)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \\ &- 2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = -2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx, \end{aligned}$$

так как  $\partial u / \partial t = 0$  при  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , в силу (3).

Воспользовавшись равенством (1), получим

$$\frac{dz}{dt} = -2\mu \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx + 2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \Phi'' \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

Отсюда и из (7) будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt < 3\mu \int_0^{+\infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt + \frac{1}{\mu} \max_{|u| \leq M_0} |\Phi''(u)|^2 \int_0^{+\infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dt dx. \quad (14)$$

Из (8), (12) и произвольности  $T_1$  в (8) следует, что

$$\int_0^{+\infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt < +\infty.$$

В силу (13) второе слагаемое правой части (14) также конечно. Отсюда следует, что

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt < +\infty.$$

Из сходимости интегралов

$$\int_0^{+\infty} z(t) dt \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{dz}{dt} \right| dt$$

следует, что  $z(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . В силу (5), где  $T_1 = t$ , будем иметь

$$\int_{x_1}^{x_2} u^2(x, t) dx < \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_0^2(x) dx$$

при любом  $t \geq 0$ . Отсюда и из (9) получаем  $|u(x, t)| < C_0 \sqrt[4]{z(t)}$ , где  $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $t \geq 0$ ,  $C_0 = \text{const} > 0$ . Из последнего неравенства и стремления  $z(t)$  к нулю при  $t \rightarrow \infty$  следует, что  $u(x, t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

**З а м е ч а н и е.** В [2] доказано существование решения задачи (1)–(3) при условии (4) и дополнительном условии

$$\max_{i, j, k \leq n, |u| \leq M} \left| \frac{\partial^3 \Phi(u)}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \right| = \frac{o(M)}{M} \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty.$$

3. Рассмотрим задачу Коши для системы (1) при начальном условии

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (15)$$

где  $u_0(x)$  — достаточно гладкая вектор-функция.

**Теорема 2.** Пусть выполняется условие (4), и пусть функции  $u_0(x)$ ,  $u_0'(x)$ ,  $u_0''(x)$ ,  $u_0'''(x)$ ,  $u_0^{(4)}(x)$  ограничены на всей числовой оси и сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0(x) - c)^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0')^2 dx.$$

Тогда существует решение  $u(x, t)$  задачи (1), (15) такое, что его модуль и модули производных  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial u / \partial t$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\partial^2 u / \partial x \partial t$ ,  $\partial^2 u / \partial t^2$ ,  $\partial^3 u / \partial x^3$ ,  $\partial^3 u / \partial x^2 \partial t$ ,  $\partial^4 u / \partial x^4$  ограничены в полуплоскости  $t > 0$ .

Теорема следует из априорной оценки (12) модуля решения смешанной задачи и оценок по модулю его производных через максимумы модулей самого решения, начальной функции и ее производных. Подробно эта оценка для  $|\partial u / \partial x|$  проведена в работе [2]. Высшие производные по  $x$  и по  $t$  оцениваются аналогично.

Доказательство теоремы проводится, как обычно, путем рассмотрения решений смешанной задачи в расширяющейся последовательности прямоугольников. Мы его приводить не будем.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и сходится интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0'')^2 dx$ . Тогда решение  $u(x, t)$ , о котором говорится в теореме 2, стремится к  $c$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на всей числовой прямой.

**Доказательство.** Не умаляя общности, можно предположить, что  $c = 0$ . Пусть  $x_1 < x_2$  — любые числа. Так же как (5), получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = \\ & = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_0^2(x) dx + \int_0^{T_1} [\Phi(u) - (u, \Phi'(u))] \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt + \int_0^{T_1} \left( u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Из сходимости интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2(x) dx$  и ограниченности функций  $u$ ,  $\partial u / \partial x$  (теорема 2) следует, что правая часть (16) ограничена при  $x_1 \rightarrow -\infty$ ,  $x_2 \rightarrow +\infty$  и любом фиксированном  $T_1 \geq 0$ , а значит (см. (16)), тем же свойством обладает интеграл  $\int_{x_1}^{x_2} u^2(x, T_1) dx$ . Следовательно, интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx$  сходится при любом фиксированном  $t \geq 0$ . Отсюда и

из ограниченности производной  $\partial u^2 / \partial x = 2(u, \partial u / \partial x) \leq 2|u| |\partial u / \partial x|$  следует, что  $u(x, t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  и любом фиксированном  $t \geq 0$  (см. [4]).

Из ограниченности  $\partial u / \partial t$  следует, что  $u(x, t) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  равномерно по  $t$  при  $0 \leq t \leq T$ , где  $T > 0$  — любое число. Следовательно, переходя в (16) к пределу при  $x_1 \rightarrow -\infty$ ,  $x_2 \rightarrow +\infty$ , получим

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2(x) dx. \quad (5')$$

Выведем энергетическое неравенство для  $\partial u(x, t) / \partial x$ . Пусть  $T > 0$  — любое число,  $T_1 \leq T$ .

Легко убедиться, что для решения  $u(x, t)$  задачи Коши справедливы равенство (6), где  $x_1 < x_2$  и  $T_1 > 0$  — произвольные числа, и неравенство (7). Из (6), (7) и (16) будем иметь

$$\int_{x_1}^{x_2} u_x^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \leq \int_{x_1}^{x_2} (u_0')^2 dx + \frac{1}{\mu^2} \max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)|^2 \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} u_0^2(x) dx + \int_0^{T_1} \left[ \Phi(u) - (u, \Phi') + \left( u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt \right\} +$$

$$+ \int_0^{T_1} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt,$$

где  $M = \sup |u(x, t)|$  в полосе  $-\infty < x < +\infty$ ,  $0 < t < T$ .

С помощью этого неравенства, пользуясь ограниченностью соответствующих производных, выводим, как и выше, что сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x, T_1) dx, \quad \int_0^{T_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \rightarrow 0$$

при  $x \rightarrow \pm\infty$  равномерно по  $t$  на любом отрезке  $[0, T]$ . Переходя в (17) к пределу при  $x_1 \rightarrow -\infty$ ,  $x_2 \rightarrow +\infty$ , получим при  $T_1 \leq T$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2(x, T_1) dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0')^2 dx +$$

$$+ \frac{1}{2\mu^2} \max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 dx, \quad M = \sup_{t < T} |u(x, t)|.$$

Так же как и (9), легко получить неравенство

$$|u(x, t)|^2 \leq 2 \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x, t) dx}. \quad (9')$$

Из (5'), (8'), (9') и (4) следует ограниченность  $|u(x, t)|$  в полуплоскости  $t > 0$ .

Далее применяются те же рассуждения, что и в п. 2.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось показать, что можно дифференцировать по  $t$  под знаком интеграла

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Этот интеграл сходится равномерно по  $t$  на любом отрезке  $[0, T]$ , что легко доказать с помощью (17), учитывая произвольность  $x_1$ ,  $x_2$  и равномерную сходимость  $u(x, t)$  и  $\partial u / \partial x$  к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Имеем в силу (1)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) dx = \\ &= 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - 2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right| &\leq 2 \left| \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} \right| + 3 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx + \\ &+ \max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)|^2 \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично (17) можно получить неравенство

$$\begin{aligned} \int_{x_t}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \Big|_{t=T_1} dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 dx dt &\leq \int_{x_1}^{x_2} (u_0'')^2 dx + \\ + 2 \int_0^{T_1} \left[ \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) - \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt &+ \frac{1}{\mu} \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} \right)^2 dx dt, \\ \Phi'(u) &= \text{grad } \Phi(u). \end{aligned} \quad (19)$$

Используя неравенства (19), (17) и (16), учитывая ограниченность  $u(x, t)$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$ ,  $\partial^3 u / \partial x^3$ ,  $\partial^3 u / \partial x^2 \partial t$  и сходимость интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0'')^2 dx$ , как и выше, выводим, что интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial^2 u / \partial x^2)^2 dx$  сходится равномерно по  $t$  на любом отрезке  $[0, T]$ .

Из (18), равномерной по  $t$  сходимости интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx,$$

равномерного по  $t$  стремления  $\partial u / \partial x$  к нулю при  $x \rightarrow \pm \infty$  и ограниченности  $\partial u / \partial t$  следует равномерная по  $t$  сходимость интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Таким образом можно дифференцировать по  $t$  под знаком интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial u / \partial x)^2 dx$ . Теорема доказана.

4. Результаты пп. 2 и 3 можно обобщить на систему (1').

В [5] показано, что система уравнений неизэнтропического движения газа при отсутствии вязкости может быть приведена к виду (1'), где  $\mu = 0$ . Таким образом мы вводим некоторую искусственную вязкость.

Будем предполагать, что функции  $L(u)$  и  $\Phi(u)$  достаточно гладкие и выполняются условия

$$\min_{|\xi|=1, |u| \leq M} (L''(u)\xi, \xi) = \gamma(M) > 0, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (20)$$

$$M^2\gamma(M) / (\max_{|u| \leq M} |\Phi''(u)| + 1) \rightarrow \infty \quad \text{при } M \rightarrow \infty, \quad (4')$$

$$M\gamma(M) \rightarrow \infty \quad \text{при } M \rightarrow \infty. \quad (21)$$

На начальную функцию  $u_0(x)$  накладываются те же условия, что и в пп. 2, 3. При всех этих условиях для системы (1') справедливы теоремы 1–3.

Доказательство проводится аналогично случаю системы (1). При выводе неравенства вида (5) дополнительно используются тождество

$$\left( \frac{\partial \operatorname{grad} L(u)}{\partial t}, u \right) = \frac{\partial}{\partial t} [(\operatorname{grad} L, u) - L]$$

и условие (20). При этом сначала доказывается, что из условия (20) следует неравенство  $(\operatorname{grad} L, u) - L(u) \geq \frac{1}{2} \gamma(M)$  при  $|u| \leq M$ .

При выводе неравенства вида (8) используется замена  $v = \operatorname{grad} L(u)$ . Можно доказать, что в силу условий (20) и (21) вектор-функция  $v = \operatorname{grad} L(u)$  взаимно-однозначно отображает пространство  $E^n$  само на себя. С помощью неравенств вида (5) и (8), так же как и выше, выводится априорная оценка для  $|u|$ , а следовательно, и для  $|v|$ . С помощью замены  $u = \operatorname{grad} L(u)$  система (1') приводится к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi(v)}{\partial x} = 0.$$

Для такой системы справедливы оценки максимумов модулей производных решения через максимумы модулей самого решения, начальной функции  $u_0(x)$  и ее производных (см. [2]). Поэтому доказательства теорем 2 и 3 для системы (1') ничем, по существу, не отличаются от доказательств в случае системы (1).

#### 5. Рассмотрим систему (2).

Будем предполагать, что функция  $\varphi(v)$  достаточно гладкая при  $v > 0$  и выполняются условия

$$\varphi'(v) < 0, \quad \varphi''(v) > 0, \quad \int_0^v \sqrt{-\varphi'(s)} ds = \infty \quad \text{при } v > 0, \quad (22)$$

$$v^3 \varphi'(v) \rightarrow \infty \quad \text{при } v \rightarrow +\infty. \quad (23)$$

Легко проверить, что условиям (22) и (23) удовлетворяет, например, функция  $k/v^\gamma$ ,  $k = \operatorname{const} > 0$ ,  $\gamma = \operatorname{const}$ ,  $1 < \gamma < 2$ .

Пусть  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  — возможное решение системы (2), непрерывное в полосе  $R(x_1 \leq x \leq x_2, t \geq 0)$ , удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad (24)$$

$$u(x_1, t) = u(x_2, t) = c_1 = \operatorname{const}, \quad v(x_1, t) = v(x_2, t) = c = \operatorname{const} > 0.$$

Относительно функций  $u_0(x)$  и  $v_0(x)$  будем предполагать, что они достаточно гладкие и такие, что  $u_0(x_1) = u_0(x_2) = c_1$ ,  $v_0(x_1) = v_0(x_2) = c$ ,  $v_0(x) > 0$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

Получим априорные оценки для функций  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ , из которых будет следовать теоремы 1—3 для системы (2).

Буквально так же, как в [3], можно доказать, что в полосе  $R$  выполняется неравенство

$$v(x, t) > h = \text{const} > 0, \quad (25)$$

где  $h$  зависит лишь от

$$c_1, \quad c, \quad \max_{[x_1, x_2]} |u_0(x)|, \quad \max_{[x_1, x_2]} |v_0(x)|$$

и вида функции  $\varphi(v)$ .

Оценим  $|u(x, t)|$  и  $v(x, t)$  сверху. Не умаляя общности, можно считать, что  $c_1 = 0$ .

Умножим первое уравнение системы (2) на  $u$ , а второе — на  $\varphi(c) - \varphi(v)$ . Результаты сложим. Полученное равенство проинтегрируем по прямоугольнику  $R_{T_1}(x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq t \leq T_1)$  произвольной высоты  $T_1 > 0$ .

Получим после интегрирования по частям с учетом условий (24) и (2)

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1}{2} u^2 + \int_c^{v(x, t)} [\varphi(c) - \varphi(s)] ds \right) \Big|_{t=T_1} dx + \quad (26)$$

$$+ \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \varphi'(v) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1}{2} u_0^2(x) + \int_c^{v_0(x)} [\varphi(c) - \varphi(s)] ds \right) dx.$$

Пусть  $T_1 \leq T$ , где  $T > 0$  — любое число. Дифференцируя (2) по  $x$ , аналогично (8) можно получить энергетическое неравенство для производных функций  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \Big|_{t=T_1} dx + \mu \int_0^{T_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx dt \leq \quad (27)$$

$$\leq \int_{x_1}^{x_2} [(u_0')^2 + (v_0')^2] dx + \frac{1}{\mu^2} \left( 1 + \frac{|\varphi'(h)|^2}{|\varphi'(M)|} \right) \times$$

$$\times \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{1}{2} u_0^2 + \int_c^{v_0} [\varphi(c) - \varphi(s)] ds \right) dx \leq \frac{1}{\mu^2} C_0 \frac{1}{|\varphi'(M)|} + C_0,$$

$$C_0 = \text{const} > 0.$$

Здесь  $C_0$  зависит лишь от данных задачи,  $M = \max v(x, t)$  в прямоугольнике  $R_T(x_1 \leq x \leq x_2, x \leq t \leq T)$ .

Положим

$$f(v) = \int_c^v \sqrt{\int_c^y (\varphi(c) - \varphi(s)) ds} dy.$$

Имеем при  $t \leq T$

$$\begin{aligned}
 |f(v)| &= \left| \int_{x_1}^x \frac{\partial f}{\partial x} dx \right| = \left| \int_{x_1}^x f'(v) \frac{\partial v}{\partial x} dx \right| \leq \\
 &\leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} [f'(v)]^2 dx} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx} = \\
 &= \sqrt{\int_{x_1}^v \left(\int_c^v [\varphi(c) - \varphi(s)] ds\right) dx} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx} < \frac{C_1}{\mu \sqrt{|\varphi'(M)|}}
 \end{aligned} \tag{28}$$

в силу (26) и (27). Здесь  $C_1$  зависит лишь от данных задачи. Возможны только два случая: либо  $M \leq 3c$ , что и требуется, либо  $M > 3c$ . Пусть  $M > 3c$ . В точках прямоугольника  $R_T$ , где  $v > 3c$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
 |f(v)| &= \int_c^v \sqrt{\int_c^y [\varphi(c) - \varphi(s)] ds} dy > \int_{2c}^v \sqrt{\int_{2c}^y [\varphi(c) - \varphi(s)] ds} dy > \\
 &> \int_{2c}^v \sqrt{\int_{2c}^y [\varphi(c) - \varphi(2c)] ds} dy = \frac{2}{3} [\varphi(c) - \varphi(2c)]^{1/2} (v - 2c)^{3/2} > \\
 &> \frac{2}{9\sqrt{3}} [\varphi(c) - \varphi(2c)]^{1/2} v^{3/2}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Из (28) и (29) в точках, где  $v > 3c$ , будем иметь

$$v^{3/2} < C_2 \frac{1}{\mu \sqrt{|\varphi'(M)|}}$$

где  $C_2$  не зависит от  $M$ . Отсюда следует, что

$$M^{3/2} = \max_{R_1} v^{3/2} \leq C_2 \frac{1}{\mu \sqrt{|\varphi'(M)|}}.$$

Из последнего неравенства и из (23) следует, что  $M < M_0$ , где  $M_0$  зависит лишь от данных задачи и не зависит от  $T$ . Следовательно,  $v < M_0$  всюду в полосе  $R(x_1 \leq x \leq x_2, t \geq 0)$ , что и требовалось.

Далее имеем

$$u^2|_{t \leq T} = \int_{x_1}^x \frac{\partial u^2}{\partial x} dx \leq 2 \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} u^2 dx} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx} < U_0^2,$$

в силу (26), (27) и  $M > h > 0$ . Здесь  $U_0$  зависит лишь от данных задачи и не зависит от  $T$ . Таким образом,  $|u| < U_0$  в полосе  $R$ .

Из неравенств  $|u| < U_0$ ,  $h < v < M_0$  и результатов [3] следует, что существует единственное решение задачи (2), (24) в полосе  $R\{x_1 \leq x \leq x_2, t \geq 0\}$ .

Пользуясь неравенствами (26), (27) и полученными априорными оценками для  $u$  и  $v$ , буквально так же как и в п. 2, можно доказать, что

$$\int_{x_1}^x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_{x_1}^x \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из неравенств

$$u^2 \leq 2 \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} u^2 dx},$$

$$|f(v)| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx} \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(\int_c^{v(x,t)} [\varphi(c) - \varphi(s)] ds\right) dx},$$

в которых вторые множители правых частей ограничены в силу (26), следует, что  $u(x, t) \rightarrow 0$ ,  $f(v(x, t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ . Так как при этом  $f(c) = 0$ ,  $f'(v) > 0$ , то  $v(x, t) \rightarrow c$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ .

Пользуясь полученными априорными оценками, можно доказать существование решения задачи Коши для системы (2) при начальных условиях

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad v|_{t=0} = v_0(x),$$

если функции  $u_0(x)$  и  $v_0(x)$  ограничены на всей числовой оси вместе с производными до четвертого порядка включительно, сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0 - c_1|^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |v_0 - c|^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0')^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (v_0')^2 dx$$

и  $v_0(x) > h_0 = \text{const} > 0$ .

Доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 2. При этом следует лишь учитывать, что для решений  $u_n(x, t)$ ,  $v_n(x, t)$ , которые соответствуют расширяющейся последовательности прямоугольников ( $|x| \leq n$ ,  $0 \leq t \leq n$ ), справедливы неравенства  $v_n > h > 0$ , где  $h$  не зависит от  $n$ .

Предполагая дополнительно, что сходятся интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u_0'')^2 dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (v_0'')^2 dx,$$

можно доказать, что  $u(x, t) \rightarrow c_1$ ,  $v(x, t) \rightarrow c$  при  $t \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$  на всей числовой оси. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. При доказательстве учитывается неравенство  $v > h = \text{const} > 0$ .

Поступила в редакцию  
3.07.1965

#### Цитированная литература

1. И. М. Гельфанд. Задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, 14, вып. 2 (89), 87—158.
2. Т. Д. Вентцель. Квазилинейные параболические системы с растущими коэффициентами. Вестн. МГУ. Сер. VI, 1963, 34—44.
3. Т. Д. Вентцель. О некоторых квазилинейных параболических системах. Докл. АН СССР, 1958, 117, № 1, 21—24.
4. А. М. Ильин, О. А. Олейник. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени. Матем. сб., 1960, 51 (43), 191—216.
5. С. К. Годунов. Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике. Успехи матем. наук, 1962, 17, вып. 3, 147—158.