V. V. Lavrent'ev, The functional central limit theorem for semimartingales taking values in a Hilbert space, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 165–166

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СЕМИМАРТИНГАЛОВ, ПРИНИМАЮЩИХ ЗНАЧЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Лаврентьев

В [1] приведены условия справедливости теорем о слабой сходимости вероятностных распределений действительных семимартингалов к распределению гауссовского мартингала (в частности, к распределению винеровского процесса).

Цель настоящей работы — указать условия справедливости функциональной центральной предельной теоремы для последовательности семимартингалов, принимающих значения в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$.

Следуя [2], определим $\mathbf{H}\hat{\otimes}_1\mathbf{H}$ как пополнение тензорного произведения $\mathbf{H}\otimes\mathbf{H}$ по проективной норме $\|\cdot\|_1$.

Отображение $(x\otimes y,\ x'\otimes y')\to(x,x')(y,y')$, $x, x', y, y'\in\mathbf{H}$, однозначно продолжается до непрерывной билинейной формы $(\cdot\,,\,\cdot)$ на $(\mathbf{H}\hat{\otimes}_1\mathbf{H})\times(\mathbf{H}\hat{\otimes}_1\mathbf{H})$. С каждым элементом $b\in\mathbf{H}\hat{\otimes}_1\mathbf{H}$ можно ассоциировать непрерывный линейный ядерный оператор $\tilde{b}$, однозначно определенный равенством $(\tilde{b}(h), g)=(b, h\otimes g)$. Симметричный положительный ядерный оператор обычно называют S-оператором.

Процесс $[\![X]\!]_t$: $P-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k\geqslant 0}(X_{(k+1)2^{-n}\wedge t}-X_{k2^{-n}\wedge t})^{\otimes 2}$, $x^{\otimes 2}\equiv x\otimes x$, принимающий значения в $\mathbf{H}\hat{\otimes}_1\mathbf{H}$, будем называть *тензорной квадратичной вариацией* X (см. [2]).

Если M — квадратично интегрируемый мартингал, то через $\langle M\rangle$ будем обозначать предсказуемый возрастающий процесс такой, что $\|M\|^2-\langle M\rangle$ — мартингал. Определим $\mathbf{H}\hat{\otimes}_1\mathbf{H}$-значный процесс $\langle\langle M\rangle\rangle$ как предсказуемый процесс с конечной вариацией такой, что $M\otimes M-\langle\langle M\rangle\rangle$-мартингал. Пусть X — семимартингал и для $\varepsilon>0$ $X_t^\varepsilon=\sum\limits_{0<s\leqslant t}\Delta X_s I(\|\Delta X_s\|>\varepsilon)$. Процесс $X-X^\varepsilon$ снова является семимартингалом, имеет ограниченные скачки и допускает, и притом единственное, представление $X_t-X_t^\varepsilon=B_t^\varepsilon+M_t^\varepsilon$ с предсказуемым процессом локально интегрируемой вариации, B^ε и локально квадратично интегрируемым мартингалом M^ε. Обозначая через $\mu=\mu(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала X, получаем следующее разложение семимартингала:

$$X_t=B_t^\varepsilon+M_t^\varepsilon+\int\limits_0^t\int\limits_{\|x\|>\varepsilon}x\mu(ds, dx).\tag{1}$$

Основные результаты. Пусть X^n $(n\geqslant 1)$ — семимартингалы, допускающие разложение (1). Через $\{S_t^{n\varepsilon}\}_{t\geqslant 0}$ обозначим множество S-операторов, определяемых равенствами $(S_t^{n\varepsilon}y, y)=M(M_t^{n\varepsilon}, y\otimes y)$, $y\in\mathbf{H}$; $\nu^n=\nu^n(dt, dx)$ — компенсатор μ^n (см. [1]); $\xrightarrow{D}$ $(\xrightarrow{D_f})$ — слабая сходимость (конечномерных) распределений процессов; $\xrightarrow{p}$, $\xrightarrow{d}$ — сходимость случайных величин по вероятности и по распределению. Всюду далее через M будет обозначаться непрерывный гауссовский мартингал.

Теорема 1.1. *Пусть для любых $t>0$ и $\varepsilon\in(0, 1]$ выполнены условия:*

(A) $\displaystyle\int\limits_0^t\int\limits_{\|x\|>\varepsilon}\nu^n(ds, dx)\xrightarrow{p}0$, (B) $B_t^{n\varepsilon}\xrightarrow{p}0$,

(C) $(\langle\langle M^{n\varepsilon}\rangle\rangle_t, e_i\otimes e_j)\xrightarrow{p}(\langle\langle M\rangle\rangle_t, e_i\otimes e_j)$,

(D) *семейство* $\{S_t^{n1}\}$ *компактно, т. е.*

$$\sup_n \sum_{i=1}^{\infty} (S_t^{n1} e_i, e_i) < \infty \quad \text{и} \quad \sup_n \sum_{i=r}^{\infty} (S_t^{n1} e_i, e_i) \to 0 \text{ при } r \to \infty,$$

тогда $X^n \xrightarrow{D_f} M$ ($\{e_i\}$ — *некоторый ортонормированный базис в* H).

1.2. *Если выполнены условия* (A), (C), (D) *и для любых* $t > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$ $\sup_{0<s\leqslant t} \| B_s^{n\varepsilon} \| \xrightarrow{P} 0$, *то* $X^n \xrightarrow{D} M$.

Теорема. 2.1. *Условие* (A) *равносильно выполнению условия*

(A*) $$\sup_{0<s\leqslant t} \| \Delta X_s^n \| \xrightarrow{P} 0, \qquad t > 0.$$

2.2. *В предположении* (A) (*или* (A*)) *условие* (C) *равносильно выполнению для любых* $t > 0$ *условия*

(C*) $$([\![M^{n1}]\!]_t, e_i \otimes e_j) \xrightarrow{P} (\langle\langle M \rangle\rangle_t, e_i \otimes e_j), \qquad i, j \geqslant 1.$$

Следствие 1. *Пусть* X^n $(n \geqslant 1)$ — *локально квадратично интегрируемые мартингалы и выполнено функциональное условие Линдеберга*:

(L$_2$) $$\int_0^t \int_{\|x\|>\varepsilon} \| x \|^2 \nu^n (ds, dx) \xrightarrow{P} 0, \qquad \varepsilon \in (0, 1],$$

тогда условия (C), (C*) *равносильны условиям*:

(C$_2$) $$(\langle\langle X^n \rangle\rangle_t, e_i \otimes e_j) \xrightarrow{P} (\langle\langle M \rangle\rangle_t, e_i \otimes e_j),$$

(C$_2^*$) $$([\![X^n]\!]_t, e_i \otimes e_j) \xrightarrow{P} (\langle\langle M \rangle\rangle_t, e_i \cong e_j).$$

Если семейство S-*операторов* $\{S_t^n\}$, $((S_t^n y, y) = M(\langle\langle X^n \rangle\rangle_t, y \otimes y))$ *для любого* $t > 0$ *компактно, то при выполнении также условий* (L$_2$), (C$_2$) *или* (L$_2$), (C$_2^*$) *имеет место сходимость* $X^n \xrightarrow{D} M$.

Следствие 2. *Пусть* X^n $(n \geqslant 1)$ — *локально квадратично интегрируемые мартингалы, выполнено условие* (L$_2$) *и, кроме того,* $M\, |(\langle\langle X^n \rangle\rangle_t - \langle\langle M \rangle\rangle_t, e_i \otimes e_j)| \to 0$, $i, j \geqslant 1$, $M\langle X^n \rangle_t \to \langle M \rangle_t$, $t > 0$, *тогда* $X^n \xrightarrow{D} M$.

Замечание 1. Из теорем 1, 2 и следствий простой переформулировкой вытекают достаточные условия слабой сходимости к винеровскому процессу сумм случайных величин (всегда образующих семимартингал) в схеме серий. Следствие 2 для этого частного случая рассмотрено в [3].

Замечание 2. Выполнение условий (A), (B), (C), (D) для некоторого фиксированного $t = T$ обеспечивает справедливость центральной предельной теоремы $X_T^n \xrightarrow{d} \mathscr{N}(0, S_T)$, где $\mathscr{N}(0, S_T)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и ковариационным оператором $S_T((S_T y, y) = M(\langle\langle M \rangle\rangle_T, y \otimes y))$.

Автор выражает глубокую благодарность А. Н. Ширяеву за постановку задачи и постоянное внимание при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов.— Теория вероятн. и ее применение., 1980, 25:4, с. 683—703.

[2] M. Metivier, J. Pellaumail. Stochastic integration.— New York: Academic Press, 1980.

[3] H. Walk. An invariance principle for the Robbins — Monro process in a Hilbert space.— Z. W-theorie, 1977, B39, № 2, p. 135—150.

Московский государственный университет

Поступило в Правление общества 18 ноября 1981 г.