V. G. Zhuravlev, The Hecke theorem: Form and Idea,
Chebyshevskii Sb., 2011, Volume 12, Issue 1, 79–92

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Посвящается 65-ой годовщине со дня рождения
профессора Сергея Михайловича Воронина

Том 12 Выпуск 1 (2011)

УДК 511

ТЕОРЕМА ГЕККЕ: ФОРМА И ИДЕЯ[1]

В. Г. Журавлев (г. Владимир)
vzhuravlev@mail.ru

Библ. — 10 назв.
Ключевые слова: Теорема Гекке, распределение дробных долей, множества ограниченного остатка на торе.
The Hecke theorem: Form and Idea.
V.G. Zhuravlev

> Если у тебя возникло противоречие,
> значит, — не спишь.

Предисловие

Математик и миф.

Что такое миф, знает всякий, кто хотя бы раз написал введение к статье или диссертации. В этом смысле — миф бессмертен! Но, миф — мифу рознь. Однажды, давным-давно это было, Сергей Михайлович Воронин круг за кругом вводил автора в славянскую языческую летопись "Слова о полку Игореве"[1]:

> О Руская земле,
> уже за шеломянем еси!
> Долго ночь меркнет.
> Заря свет запала,
> мгла поля покрыла.

Неожиданным и притягивающим было самой действо: он, математик, легко и свободно погружался в атмосферу мифа и уверенно вел меня за собою. И вдруг,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00578-а.

как прозрение, стало явным, что у каждого математика есть свои мифы, на которых собственно держится его математика, да и сама она, подобно мифу, передается по цепочке от одного поколения к другому.

В искусстве, литературе, науке существуют отдельные произведения, темы, постоянно притягивающие к себе внимание, и, что удивительно, интерес к ним со временем не ослабевает. Причины, казалось бы, почти очевидны: простота, ясность и краткость их сюжетов, как в Библии. В них сразу и явственно строится основа, каркас, форма. И лишь по прошествии некоторого времени начинаешь видеть исток: всегда и везде в них присутствует мощная скрытая идея. Идея, как взгляд извне, нечто вечно становящееся и пульсирующее, она есть и ее — нет, что-то неуловимое сетями слов и знаков. Подлинные исходные идеи всегда скрыты, поэтому числом они столь немногим.

Перо жар-птицы.

Одной из тем теории чисел, которой посвящено огромное количество работ, является теорема Гекке о распределении точек на окружности (см. *Приложение*). Это теорема того самого Гекке, который лишь один из всех многочисленных друзей пришел поздравить Гильберта в его последний день рождения; того Гекке, которого, в отличие от интуициониста и тополога Брауэра, все любили и который не держал, как Брауэр, по году статьи на рецензии.

Форма теоремы Гекке — некоторая разностная функция, идея теоремы — минимальное перекладывание отрезков. Перекладывание является причиной ограниченности отклонений для распределения точек на окружности, оно же указывает и путь для многомерного обобщения теоремы Гекке. И что же после этого, схвачена идея? К сожалению, нет: снова у нас лишь видоизмененная форма. Теперь это — перекладывающиеся торические развертки.

Идея предполагает веру.

Идея подобна музыке: она вечно неопределенная, становящаяся, меняющаяся. Вот, кажется, ухватил её, а в руках твоих... лишь перо жар-птицы, лишь форма — тень идеи. У идеи — множество теней, каждый видит свою в зависимости от точки зрения его. На фундаментальном уровне множественность теней — это мера единства идеи, сама же идея — это всегда иное, она всегда не здесь, всегда за горизонтом своим. Чтобы искать идею, нужно верить в нее. Прежде чем доказывать теорему, я должен верить в доказательство, а если я верю в него, зачем мне его тогда доказывать.

Доказательство можно сравнить с облаком. Мы видим форму облака, а приблизившись, теряем ее: форма куда-то исчезает. Любое доказательство убедительно лишь издалека.

Погрузившись в него, вы быстро спуститесь к основам, откуда назад уже никто не возвращается. Как при исполнении музыкального произведения, самое трудное в доказательстве — это удерживать баланс целого, чего мы и старались придерживаться ниже при изложении теоремы Гекке.

Целое порождает части и связи между ними, хотя очевидным кажется обратное.

Настоящая работа посвящается Сергею Михайловичу:

Время — брать в долг,
и время — отдавать долги свои.

Он был веселым и щедрым человеком, любил математику и Бабеля:

Дома еврей выпивает рюмку водки,
— ни бог, ни Талмуд не запрещают
ему выпить две.

1 Приложение.

1. Теорема Гекке.

Пусть α — вещественное число, $\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ и b — произвольное целое число. Определим счетные функции

$$\begin{aligned} r_0(i) &= \sharp\{j; \{j\beta\} < 1 - \alpha, 0 \le j < i\}, \\ r_1(i) &= \sharp\{j; \{j\beta\} \ge 1 - \alpha, 0 \le j < i\}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x. Рассмотрим отклонения

$$\begin{aligned} \delta_0(i) &= r_0(i) - i(1 - \alpha), \\ \delta_1(i) &= r_1(i) - i\alpha \end{aligned}$$

функций $r_0(i)$, $r_1(i)$ от ожидаемых значений, где $1-\alpha$ и α — длины интервалов, в которые попадают дробные доли $\{j\beta\}$. Относительно отклонений $\delta_0(i)$, $\delta_1(i)$ Гекке доказал следующий результат.

Теорема 1 (Гекке [2]). *Если α — иррациональное число, то выполняются неравенства*

$$|\delta_0(i)| \le n, \quad |\delta_1(i)| \le n \tag{2}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

Покажем, как можно перенести теорему Гекке на торы $\mathbb{T}^D$ любой размерности D, при этом исходить мы будем из следующей аналогии.

Функции $r_0(i)$, $r_1(i)$ можно связать с поворотами окружности. Пусть

$$S_\alpha : x \mapsto x + \alpha \ \mathtt{mod}\ 1 \tag{3}$$

— поворот единичной окружности $C = \mathbb{T}^1$ на угол α. Тогда $r_0(i)$, $r_1(i)$ можно рассматривать как количество попаданий точек

$$S_\beta^0(0) = 0, \quad S_\beta^1(0), \quad \dots, \quad S_\beta^{i-1}(0),$$

где S_β^j — композиция поворота S_β кратности j, соответственно в полуинтервалы $[0, 1 - \alpha)$ и $[1 - \alpha, 1)$; а $\delta_0(i)$, $\delta_1(i)$ — как отклонения в задаче о распределении дробных долей. Разрежем окружность в некоторой точке и отождествим

окружность с единичным полуинтервалом $T^1 = [0,1)$. Если теперь $T^1 = [0,1)$ разбить
$$T^1 = T_0^1 \sqcup T_1^1 \tag{4}$$
на два полуинтервала
$$T_0^1 = [0, 1-\alpha), \quad T_1^1 = [1-\alpha, 1),$$
то поворот окружности (3) будет равносилен прекладыванию полуинтервалов T_0^1 и T_1^1, а именно :
$$T^1 \xrightarrow{S_v} T^1 : \quad S_v(x) = x + v_k, \tag{5}$$
если $x \in T_k^1$ для $k = 0, 1$; при этом векторы сдвигов v_0 и v_1 равны α и $\alpha - 1$ соответственно.

В случае размерности $D \geq 2$ пусть снова задан некоторый сдвиг
$$\mathbb{T}^D \xrightarrow{S_\alpha} \mathbb{T}^D : \quad x \mapsto S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \,\mathtt{mod} L \tag{6}$$
тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ — вектор сдвига и L — невырожденная решетка из $\mathbb{R}^D$. Разрежем тор $\mathbb{T}^D$ таким способом, чтобы его развертка T^D содержалась в пространстве $\mathbb{R}^D$. Теперь если снова отождествить тор $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D, то сдвигу тора (6) будет отвечать перекладывание областей T_k из разбиения развертки
$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_s. \tag{7}$$
За исключением вырожденных случаев, наименьшее количество областей, на которое возможно разбиение (7) равно $s_{min} = D + 1$. Так, в одномерном случае — это два ранее рассмотренных полуинтервала (4); при $D = 2$ можно взять, например, плоскую проекцию трехмерного куба, состоящую из трех перекладывающихся параллелограммов.

2. Перекладывающиеся торические развертки.

Чтобы получить многомерное обобщение теоремы Гекке, будем, по сравнению с (6), двигаться в обратном направлении: начнем с минимальных разверток тора
$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D, \tag{8}$$
допускающих перекладывание вида
$$T^D \xrightarrow{S_v} T^D : \quad x \mapsto S_v(x) = x + v_k, \tag{9}$$
если $x \in T_k$. При этом будем требовать, чтобы разбиение тора (8) и векторы перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_D$ удовлетворяли свойству: после отождествления тора $\mathbb{T}^D$ с его разверткой T^D перекладыванию S_v будет отвечать сдвиг тора S_α (6) на некоторый вектор α, однозначно определяемый перекладыванием (9).

По аналогии с (1) определим счетные функции

$$r_k(i) = \sharp\{j; S_\beta^j(0) \in T_k; 0 \le j < i\} \tag{10}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$; где S_β — сдвиг (3) тора $\mathbb{T}^D$ на вектор

$$\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b_1 l_1 + \cdots + b_D l_D), \tag{11}$$

при этом b_k — любые целые числа и $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \ldots, D$. Предположим, что векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно не зависимы над $\mathbb{R}$. Тогда для каждой области T_k можно определить отклонение

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i a_k \tag{12}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$, где $a_1, \ldots, a_D$ — координаты вектора $-\alpha$ в базисе $l_1, \ldots, l_D$ и

$$a_0 = 1 - a_1 - \cdots - a_D.$$

Относительно отклонений $\delta_k(i)$ в [3] доказан следующий результат.

Теорема 2. *Пусть векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно не зависимы над $\mathbb{R}$, и пусть вектор сдвига α тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/L$ иррационален, то есть его координаты $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D$ в некотором базисе решетки L обладают свойством: числа*

$$\alpha'_1, \ldots, \alpha'_D, 1 \tag{13}$$

линейно не зависимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ выполняются неравенства

$$|\delta_k(i)| \le c_k n \tag{14}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Здесь $c_k = c_k(T)$ — константы не зависят от параметров n и i и явным образом определяются исключительно размерами развертки тора T^D.

3. Многомерная теорема Гекке.

Пусть A — аффинное отображение, переводящее векторы $l_1, \ldots, l_D$ в соответствующие единичные векторы

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), ..., e_D = (0, 0, \ldots, 1).$$

Образ AT развертки тора T снова является разверткой некоторого тора той же размерности D. При переходе от развертки T к AT сохраняются все выше приведенные конструкции, при чем константы в неравенствах (14) остаются инвариантными

$$c_{AT,k} = c_{T,k}$$

относительно аффинных отображений A. Поэтому без потери общности можем предположить, что

$$l_1 = e_1, \quad \dots, \quad l_D = e_D. \tag{15}$$

Тогда из теоремы 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3 (многомерная теорема Гекке).

1. *При выполнении условий теоремы 2 и условия (15) справедливы неравенства:*

$$|\delta_k(i)| \le d_T\, n \tag{16}$$

для $k = 1, \dots, D$*; и соответственно для* $k = 0$ *—*

$$|\delta_0(i)| \le D d_T\, n, \tag{17}$$

где d_T *— диаметр развертки* T^D*.*

2. *Если, кроме того, в разбиении (8) каждая область* T_k *кубируема, то отклонения (12) можно записать в виде*

$$\delta_k(i) = r_k(i) - i\,\mathrm{vol}(T_k) \tag{18}$$

для $k = 0, 1, \dots, D$*. Здесь в формуле (18) через* $\mathrm{vol}(T_k)$ *обозначен объем области* T_k*.*

В одномерном случае $T^1 = [0, 1]$ — единичный отрезок, и в силу формул (16), (17) константы $c_k(T^1) = 1$ те самые, какие требуются в неравенствах Гекке (2).

4. Перекладывающиеся фигуры.

В п.п. 1-2 с помощью перекладывающихся торических разверток T^D были построены разбиения торов $\mathbb{T}^D$ на множества ограниченного остатка. Покажем, как такие развертки T^D можно конструировать на основе перекладывающихся фигур $F^D \subset \mathbb{R}^D$, трансляционно разбивающих пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L} F^D[l] \tag{19}$$

с помощью параллельных переносов

$$F^D[l] = F^D + l$$

на векторы l некоторой полной решетки $L \subset \mathbb{R}^D$, где множества $F^D[l_1]$ и $F^D[l_2]$ для $l_1 \ne l_2$ не имеют общих внутренних точек.

Исходя из аналогии с перекладывающейся проекцией трехмерного куба, можно предложить два метода посторения перекладывающихся фигур.

Первый метод — это вытягивание

$$C^D \Rightarrow C^D_s$$

единичного куба $C^D = [0, 1]^D$ вдоль вектора s из положительного конуса $\mathbb{R}^D_+$.

Второй, в некотором смысле обратный, — метод зеркального вытягивания

$$C^D \Rightarrow C_s^{*D}.$$

Указанные множества C_s^D и C_s^{*D} определяются следующим образом:

$$C_s^D = \mathtt{Str}_s(C^D), \tag{20}$$

где

$$\mathtt{Str}_s(X) = \bigcup_{t\in I}(X + ts)$$

— операция вытягивания множества $X \subset \mathbb{R}^D$ вдоль вектора s; и

$$C_{s,\alpha}^{*D} = \mathtt{Str}_s^*(C^D), \tag{21}$$

где

$$\mathtt{Str}_s^*(X) = [\mathtt{Str}_s(X) \setminus \{X \cup X + s\}]^c$$

и индекс у X^c обозначает замыкание множества X.

Вытянутый куб C_s^D представляет собою выпуклый многогранник, разбивающий пространство $\mathbb{R}^D$ с помощью параллельных переносов на векторы соответствующей решетки L_s. Выпуклые многогранники такого типа, называемые параллелоэдрами, впервые были построены геометрическими методами Федоровым [4] для размерности $D = 3$ и на основе квадратичных форм Вороным [5] для $D = 3, 4$. Так, например, в наших обозначениях C_s^3 — это ромбический додекаэдр.

Геометрически наше построение многогранников C_s^D совпадает с методом В.П. Гришухина [6]. Отличие в доказательствах того, что C_s^D являются параллелоэдрами: в [6] используются квадратичные формы, при нашем подходе — динамические системы (сдвиги торов). Указанный метод также позволяет строить невыпуклые многогранники C_s^{*D}, трансляционно разбивающие пространство $\mathbb{R}^D$.

5. Построение перекладывающихся торических разверток.

Для наших целей важными являются не сами вытянутые кубы C_s^D (20) и C_s^{*D} (21), а порождаемые ими перекладывающиеся фигуры $C_{s,\alpha}^D$, $C_{s,\alpha}^{*D}$, зависящие от параметра $\alpha = \lambda s$, где $0 < \lambda < 1$. Фигура $F^D \subset \mathbb{R}^D$ называется перекладывающейся, если для нее задано разбиение

$$F^D = F_0 \cup F_1 \cup \ldots \cup F_D \tag{22}$$

на множества F_k без общих внутренних точек, а также задано перекладывание

$$\mathcal{S}_v(F^D) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(F_0) \cup \mathcal{S}_v(F_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(F_D), \tag{23}$$

при этом $\mathcal{S}_v(F_k) = F_k[v_k]$ для v_k из некоторой фиксированной системы векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$. Множества $\mathcal{S}_v(F_k)$ снова не имеют общих внутренних точек, а сама фигура F^D инвариантна $\mathcal{S}_v(F^D) = F^D$ относительно перекладывания (23). В общем случае количество фигур в разбиении (22) может быть любым.

Перекладывающиеся фигуры $C^D_{s,\alpha}$, $C^{*D}_{s,\alpha}$ — это те же вытянутые кубы C^D_s, C^{*D}_s с заданными на них разбиениями вида (22). Каждой перекладывающейся фигуре F^D можно поставить в соответствие подмножество $T^D \subset F^D$ из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & T^D & \overset{\mathrm{mod}\,L}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^D & \overset{\mathrm{mod}\,L}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^D & \end{array} \qquad (24)$$

Здесь горизонтальные стрелки обозначаю биективное отображение $x \mapsto x \,\mathtt{mod}\, L$ между множеством T^D и тором

$$\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L,$$

где L — трансляционная решетка (19), S_v — отображение, индуцированное перекладыванием $\mathcal{S}_v$ (13), и

$$S_\alpha(x) = x + \alpha \bmod L$$

— сдвиг тора $\mathbb{T}^D$ на некоторый вектор α. Коммутативность диаграммы (24) означает, что перекладывание S_v множества T^D равносильно сдвигу S_α тора $\mathbb{T}^D$. Множества T^D с указанными выше свойствами называются перекладывающимися торическими развертками. Их значение состоит в том, что такие торические развертки T^D задают посредством биекции (24) разбиение тора

$$\mathbb{T}^D = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D \qquad (25)$$

на множества $\mathbb{T}^D_k$ ограниченного остатка [3].

Заметим, что для размерности $D = 1$ коммутативность диаграммы (24) означает хорошо известный факт: вращение окружности эквивалентно перекладыванию двух интервалов.

6. Множества ограниченного остатка.

Пусть дана перекладывающаяся торическая развертка T^D и отвечающее ей разбиение тора $\mathbb{T}^D$. Пусть S_β — сдвиг тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/L$ на тот же самый вектор

$$\beta = \frac{1}{n}(\alpha + b_1 l_1 + \dots + b_D l_D),$$

что и в определении (11). При этом $n = 1, 2, 3, \ldots$, b_k — любые целые числа и векторы

$$l_k = v_k - v_0$$

для $k = 1, \ldots, D$ образуют базис трансляционной решетки L. Для каждого множества $\mathbb{T}_k^D$ из разбиения (25) определим счетную функцию

$$\mathbf{r}_k(i) = \sharp\{j : S_\beta^j(0) \in \mathbb{T}_k^D, 0 \le j < i\}, \tag{26}$$

где

$$S_\beta^j(0) \equiv j\beta \,\texttt{mod}\, L.$$

Тогда для любого $k = 0, 1, \ldots, D$ можно определить отклонение

$$\delta_k(i) = \mathbf{r}_k(i) - i a_k, \tag{27}$$

где

$$a_k = \mathrm{vol}\, \mathbb{T}_k^D / \mathrm{vol}\, \mathbb{T}^D$$

— частота попаданий за i шагов точек S_β-орбиты в область $\mathbb{T}_k^D \subset \mathbb{T}^D$. Здесь $\mathrm{vol}\, \mathbb{T}_k^D$ и $\mathrm{vol}\, \mathbb{T}^D$ обозначают соответственно объемы множеств $\mathbb{T}_k^D$ и всего тора $\mathbb{T}^D$.

Из теоремы 2 относительно отклонений (27) вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть T^D — перекладывающаяся торическая развертка, являющаяся многогранником, $V(T^D)$ — множество вершин многогранника T^D, и пусть α — иррациональный сдвиг относительно решетки L (см. определение (13)). Тогда при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i)| \le c_k(T^D) n \tag{28}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь константы $c_k(T^D)$ вычисляются по формуле

$$c_k(T^D) = \max_{v \in V(T^D)} l_k^* \cdot v - \min_{v \in V(T^D)} l_k^* \cdot v, \tag{29}$$

где $l_1^*, \ldots, l_D^*$ — двойственный базис к базису $l_1, \ldots, l_D$ трансляционной решетки $L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D]$ и

$$l_0^* = -l_1^* - \ldots - l_D^*.$$

Множество $X \subseteq \mathbb{T}^D$, удовлетворяющее свойству (28), называется *множеством ограниченного остатка.* Соглано теореме 2, таким является любое множество $\mathbb{T}_k^D$ из разбиения (25) тора $\mathbb{T}^D$. При этом константы $c_k(T^D)$ в силу формулы (29) не зависят от разбиения торической развертки T^D, а определяются лишь размерами самой развертки T^D.

7. Значения констант $c_k(T^D)$ для торических разверток.

Из теоремы 4 выводим следующий результат.

Теорема 5. *Для множеств множеств ограниченного остатка* $\mathbb{T}_k^D \subset \mathbb{T}_{s,\alpha}^D$ *константы* $c_k(T_{s,\alpha}^D)$ *в неравенстве (28) вычисляются по формулам*

$$c_k(T_{s,\alpha}^D) = 1 + \frac{D-1}{\sigma(s)+1}$$

и

$$c_k(T_{s,\alpha}^D) = 1 + \frac{(D-1)s_k}{\sigma(s)+1} \tag{30}$$

для $k=0$ *и* $k=1,\ldots,D$ *соответственно. Здесь в формулах (30) использовано обозначение*

$$\sigma(s) = s_1 + \ldots + s_D.$$

Из формул (30) вытекают два важных следствия.

Следствия 1. *Для константы*

$$c(T_{s,\alpha}^D) = \max_{0\le k\le D} c_k(T_{s,\alpha}^D)$$

выполняется неравенство

$$c(T_{s,\alpha}^D) \le D$$

для любого $s \in \mathbb{R}_+^D$.

Следствия 2. *При* $s = e_0 = (1,\ldots,1)$ *имеет место формула*

$$c(T_{s,\alpha}^D) = 2 - \frac{2}{D+1}$$

для любой размерности $D \ge 2$ *и, следовательно,*

$$c(T_{s,\alpha}^D) \nearrow 2 \quad \text{при} \quad D \to +\infty.$$

Для зеркально вытянутых кубов C_s^{*D} также справедливы формулы (30). В данном случае в формулах (30) выражение в знаменателе $\sigma(s)+1$ заменяется на $\sigma(s)-1$.

8. Призведения торических разверток.

Существует некоторая общая конструкция произведения разверток, позволяющая из двух торических разверток T^{D_1} и T^{D_2} строить новую развертку

$$T^{D_1} \otimes_i T^{D_2} \tag{31}$$

размерности $D = D_1 + D_2$. Приведем определение произведения (31).

Пусть даны две произвольные перекладывающиеся торические развертки T^{D_1} и T^{D_2}, имеющие разбиения

$$T^{D_1} = T_0^{D_1} \cup T_1^{D_1} \cup \ldots \cup T_{D_1}^{D_1},$$

$$T^{D_2} = T_0^{D_2} \cup T_1^{D_2} \cup \ldots \cup T_{D_2}^{D_2}$$

и соответственно векторы перекладывания

$$v_0, \ldots, v_{D_1}, \quad w_0, \ldots, w_{D_2}.$$

Для любого $k = 0, 1, \ldots, D_1$ определим *произведение*

$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$$

следующими условиями:

1)
$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} = \{(x, y); x \in T^{D_1}, y \in T^{D_2}\} \subset \mathbb{R}^D, \tag{32}$$

где $D = D_1 + D_2$, таким образом $T^{D_1} \otimes_k T^{D_2}$ как множество совпадает с прямым произведением $T^{D_1} \times T^{D_2}$ множеств T^{D_1} и T^{D_2};

2) на множестве (32) задано разбиение

$$T^{D_1} \otimes_k T^{D_2} = \coprod_{\substack{0 \le i \le D_1 \\ i \ne k}} T_i^D \coprod_{0 \le j \le D_2} T_{k,j}^D$$

на множества

$$\begin{aligned} T_i^D &= T_i^{D_1} \times T^{D_2} \quad \text{для} \quad i = 0, \ldots, D_1, \quad i \ne k, \\ T_{k,j}^D &= T_k^{D_1} \times T_j^{D_2} \quad \text{для} \quad j = 0, \ldots, D_2, \end{aligned}$$

а также определено перекладывание $\mathcal{S}_{v \otimes_k w}$ этих множеств

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{v \otimes_k w} &: \ T_i^D \longrightarrow T_i^D + (v_i, 0) \quad \text{для} \quad i = 0, \ldots, D_1, \quad i \ne k, \\ \mathcal{S}_{v \otimes_k w} &: \ T_{k,j}^D \longrightarrow T_{k,j}^D + (v_k, w_j) \quad \text{для} \quad j = 0, \ldots, D_2. \end{aligned}$$

Можно доказать, что

1) *произведение двух перекладывающихся разверток $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ снова будет перекладывающейся торической разверткой;*

2) *константы для произведения $c_k(T^{D_1} \otimes_i T^{D_2})$ явным образом вычисляются через константы исходных разверток $c_k(T^{D_1})$, $c_j(T^{D_2})$.*

Рассмотренные выше семейства разверток $T_{s,\alpha}^D$, $T_{s,\alpha}^{*D}$ для вытянутых кубов $C_{s,\alpha}^D$, $C_{s,\alpha}^{*D}$ не разложимы в произведения перекладывающихся торических разверток меньшей размерности. Поэтому данные развертки следует выбирать в качестве базисных разверток, из которых с помощью операции умножения

$T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ можно получать новые развертки и разбиения торов на множества ограниченного остатка. Применяя операцию умножения несколько раз, получаем расширяющееся множество разбиений (25) торов $\mathbb{T}^D$ с растущей размерностью D на множества ограниченного остатка $\mathbb{T}^D_k \subset \mathbb{T}^D$. При этом, согласно сказанному выше, мы можем следить за ростом констант $c_k(T^D)$ в неравенстве (28) для отклонений $\delta_k(i)$ распределения точек орбит на торах.

9. Пример: переклыдывающиеся прямоугольники.

Выберем в качестве разверток T^{D_1}, T^{D_2} перекладывающиеся отрезки. Их произведения $T^{D_1} \otimes_i T^{D_2}$ представляет собой прямоугольники, разбитые на три перекладывающиеся области, каждая из которых является множеством ограниченного остатка. Применяя теорему Гекке, получаем значения для их констант.

Интересно посмотреть, как выглядят оценки для отклонений, если их сформулировать не в геометрических терминах, а аналитически на языке функции $\{x\}$, также как в теореме Гекке (2). Для этого определим следующую счетную функцию

$$r_1(i) = \sharp\{0 \le j < i; \quad \{\{j(\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\} + \{j\beta_2\}\alpha_1\} \ge 1 - \alpha_1, \quad \{j\beta_2\} < 1 - \alpha_2 \quad \} \tag{33}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — произвольный вектор и

$$\beta_1 = \tfrac{1}{n}(\alpha_1 - b_1 - b_2\alpha_1), \quad \beta_2 = \tfrac{1}{n}(\alpha_2 - b_2).$$

Если перейти к единичному базису $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$, то ту же счетную функцию (33) можно переписать еще в одном эквивалентном виде

$$r_1(i) = \sharp\{0 \le j < i; \quad 1 - \alpha_1 \le \{j\widetilde{\beta}_1\} + \alpha_1\{j\beta_2\} < 1, \quad \{j\beta_2\} < 1 - \alpha_2 \quad \}, \tag{34}$$

где

$$\widetilde{\beta}_1 = \frac{1}{n}(\alpha_1 - b_1 - \alpha_1\alpha_2).$$

Теорема 6. *Пусть числа $\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2, \alpha_2, 1$ линейно не зависимы над $\mathbb{Z}$. Тогда для отклонения*

$$\delta_1(i) = r_1(i) - i(\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2)$$

выполняется неравенство

$$|\delta_1(i)| \le (1 + \alpha_1)n \tag{35}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Множества T_1, определяемые неравенствами из (34), являются, согласно (35), множествами ограниченного остатка. Они представляют собою параллелограммы, параметризованные пятью свободными параметрами α_1, α_2, b_1, b_2, n. Семейство параллелограммов T_1 включает в себя подсемейство параллелограммов Szüsz [7], у которых фиксированны параметры $b_1 = 0$, $b_2 = 0$. Все параллелограммы из семейства T_1 имеют острые углы, и это неслучайно: Лиарде [8] доказал, что любой невырожденный прямоугольник на торе не может быть множеством ограниченного остатка. Ранее для двумерного случая множества ограниченного остатка с фрактальными границами были исследованы в [9].

Заключение.

Наш метод — геометрический. Он более всего созвучен методу французских математиков (Рози [10], Ференци [11]) и д.р.) Данный метод позволяет:

1) строить множества ограниченного остатка на торе $\mathbb{T}^D$ любой размерности D;

2) для отклонений $\delta_k(i)$ на этих множествах находить явные оценки вида (30);

3) а также вычислять средние значения $\langle\delta_k\rangle$ отклонений $\delta_k(i)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ироическая песнь о походе на половцев удельного князя Новогорода-Северского Игоря Святославича // М., 1800.

[2] Hecke E. Eber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins// Math. Sem. Hamburg. Univ. Bd. 1 (1921), 54-76.

[3] Журавлев В.Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных долей// Алгебра и анализ, (2011), 1-35 (в печати).

[4] Федоров Е.С. Начала учения о фигурах// Из-во АН СССР, Москва, 1953.

[5] Вороной Г.Ф. Собрание сочинений, том 2// Из-во Академии Наук Украинской ССР, Киев, 1952.

[6] Гришухин В.П. Свободные и несвободные многогранники Вороного// Математические заметки, **80**: 3 (2006), 367-378.

[7] Szüsz R. Über die Verteilung der Vielfachen einer komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats// Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 5 (1954), 35-39.

[8] Liardet P. Regularities of distribution// Compositio Math. 61 (1987), 267-293.

[9] Журавлев В.Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка// Зап. науч. семин. ПОМИ 322 (2005), 83-106.

[10] Rauzy G. Ensembles à restes bornés// Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1983-1984, exposé 24.

[11] Ferenczi S. Bounded Remaider Sets// Acta Arithmetica 61 4 (1992), 319-326.

Владимирский государственный гуманитарный университет
E-mail: vzhuravlev@mail.ru
Поступило 30.05.2011