С. И. Эминов, Ортонормированный базис в пространствах Соболева–Слободецкого на отрезке,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 558–560

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 4, с. 558–560

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968

ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА–СЛОБОДЕЦКОГО НА ОТРЕЗКЕ

© 2005 г. **С. И. Эминов**

1. Введение. Многие задачи дифракции и теории упругости сводятся к решению интегрального уравнения с логарифмической особенностью в ядре

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} u(t)\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt + \int\limits_{-1}^{1} u(t)M(t,\tau)\,dt = e(\tau), \quad -1\le\tau\le 1. \tag{1.1}$$

Численному решению этого уравнения посвящено большое число работ (см. [1]). Разлагая неизвестную функцию по системе функций $u(\tau)=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\varphi_n(\tau)$, где

$$\varphi_n(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\pi\ln 2}}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n=1,\\[2mm] \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{\pi}}\,\dfrac{\cos[(n-1)\arccos(\tau)]}{\sqrt{1-\tau^2}}, & n>1,\end{cases}$$

интегральное уравнение можно преобразовать к бесконечной системе вида

$$c_n+\sum_{m=1}^{+\infty}c_mM_{mn}=c_n, \quad 1\le n<+\infty, \tag{1.2}$$

которая при определенных ограничениях на ядро $M(t,\tau)$ будет системой Фредгольма второго рода, а приближенное решение, найденное методом усечения, будет сходиться к точному решению.

Аналогично для решения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt + \int\limits_{-1}^{1} u(t)N(t,\tau)\,dt = e(\tau), \quad -1\le\tau\le 1, \tag{1.3}$$

используется разложение по функциям [2]

$$\varphi_n(\tau)=\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin[n\arccos(\tau)], \quad n=1,2,\ldots$$

Уравнения (1.1) и (1.3) можно включить в семейство уравнений с параметром.

2. Об одном классе интегральных уравнений. Введем уравнения с параметром s $(-1<s<+\infty)$

$$A_su+Bu=\nu, \tag{2.1}$$

где A_s – положительный интегральный оператор вида

$$(A_su)(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|^{2s}\int\limits_{-1}^{1}u(t)\exp(ix(t-\tau))\,dt\,dx, \quad -1\le\tau\le 1. \tag{2.2}$$

Семейство уравнений (2.1) включает в себя многие известные уравнения математической физики. В самом деле, при $s=0$ оператор A_s с точностью до постоянной совпадает с единичным оператором. При $s=1$ оператор A_s совпадает с оператором двойного дифференцирования, а $s=1/2$ – с первым слагаемым в левой части уравнения (1.3). Оператор $A_{1/2}$ является симметричным и положительно-определенным в $L_2[-1,1]$ [3].

Когда $-1<s\le -1/2$, оператор A_s содержит неинтегрируемую особенность в нуле. Поэтому необходимо рассматривать видоизмененные операторы, интегрируемые на всем промежутке $(-\infty,+\infty)$. После соответствующей регуляризации оператор A_s при $s=-1/2$ в точности будет совпадать с интегральным оператором, имеющим логарифмическую особенность в нуле.

Таким образом, семейство уравнений (2.1) при частных значениях параметра s содержит многие важнейшие уравнения математической физики. Поэтому исследование уравнения (2.1) имеет большое теоретическое и прикладное значение.

Рассмотрим уравнение (2.1) при $s \geq 0$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Оператор A_s является положительным и поэтому он имеет обратный A_s^{-1}. Применяя к обеим частям уравнения (2.1) оператор A_s^{-1}, получаем

$$u + A_s^{-1}Bu = A_s^{-1}\nu. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) рассматривается в энергетическом пространстве оператора A_s. Если окажется, что оператор $A_s^{-1}B$ вполне непрерывен в этом пространстве и ν принадлежит области определения оператора A_s^{-1}, то уравнение (2.3) будет уравнением Фредгольма второго рода. В связи с этим представляется важным изучение энергетического пространства положительного оператора A_s и построение ортонормированного базиса.

3. Пространство решений. Энергетическое пространство A_s положительного оператора совпадает с пространством Соболева–Слободецкого на отрезке. Это пространство на отрезке $\overset{\circ}{H}_s[-1,1]$ определяется как пополнение множества бесконечно дифференцируемых финитных функций (т.е. функций, обращающихся в нуль вне некоторого интервала $[-a,a]$, $0 < a < 1$) $C_0^\infty(-1,1)$ по норме

$$\|u\|_s^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2(1+|x|)^{2s}\,dx, \tag{3.1}$$

где $\tilde{u}$ – преобразование Фурье функции u, т.е. $\tilde{u}(x) = \int_{-1}^{1} u(t)\exp(itx)\,dt$.

Пространство $\overset{\circ}{H}_s[-1,1]$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(u,v)_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}}(x)(1+|x|)^{2s}\,dx.$$

Справедлива

Теорема 1. *Норма (3.1) при $s \geq 0$ эквивалентна норме*

$$\|u\|_{s1}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(x)|^2|x|^{2s}\,dx. \tag{3.2}$$

Доказательство этой теоремы можно получить из результатов работы [4].

Остановимся на особенностях нормы (3.2) и соответствующего скалярного произведения

$$(u,v)_{s1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}}(x)|x|^{2s}\,dx. \tag{3.3}$$

В данной работе будет доказано, что полиномы Гегенбауэра с соответствующим весом ортогональны в смысле скалярного произведения (3.3) и неортогональны, если взять скалярное произведение, соответствующее норме (3.2). Поэтому введена норма (3.2) и рассматриваются положительные интегральные операторы в виде (2.2).

4. Построение ортонормированного базиса в пространстве Соболева–Слободецкого. Ортонормированный базис в пространствах Соболева–Слободецкого будем конструировать на основе полиномов Гегенбауэра. Сначала приведем известные соотношения, содержащие полиномы Гегенбауэра $C_n^\lambda(t)$. Интегралы от четных полиномов имеют вид [5]

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1/2}\cos(bt)C_{2n}^\lambda(t)\,dt = \alpha_n^\lambda J_{2n+\lambda}(b)/b^\lambda, \tag{4.1}$$

где $\alpha_n^\lambda = (-1)^n \cdot 2\pi\Gamma[2\lambda+2n]/[(2n)! \cdot 2^\lambda\Gamma[\lambda]]$, $n = 0,1,\ldots$, а интегралы, содержащие нечетные полиномы, записываются в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1/2}\sin(bt)C_{2n+1}^\lambda(t)\,dt = \beta_n^\lambda \frac{J_{2n+1+\lambda}(b)}{b^\lambda}, \tag{4.2}$$

где $\beta_n^\lambda = (-1)^n \cdot 2\pi\Gamma[2\lambda + 2n + 1]/[(2n+1)! \cdot 2^\lambda \Gamma[\lambda]]$, $n = 0, 1, \ldots$ Здесь Γ – гамма-функция, J_k – функция Бесселя k-го порядка.

Формулы (4.1) и (4.2) справедливы при ограничении $\lambda > -1/2$. Введем в рассмотрение систему четных функций

$$\varphi_{2n-1}^s(t) = \alpha_n^{-s-1/2}(2n - 3/2 + s)^{1/2}(1 - t^2)^s C_{2n-2}^{s+1/2}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

преобразование Фурье которых имеет вид $\tilde{\varphi}_{2n-1}^s(x) = (2n - 3/2 + s)^{1/2} J_{2n-3/2+s}(x)/x^{1/2+s}$.

Введем также систему нечетных функций

$$\varphi_{2n}(t) = (-i)\beta_n^{-s-1/2}(2n - 1/2 + s)^{1/2}(1 - t^2)^s C_{2n-1}^{s+1/2}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

преобразование Фурье которых определяется формулой

$$\tilde{\varphi}_{2n}^s(x) = (2n - 1/2 + s)^{1/2} J_{2n-1/2+s}(x)/x^{1/2+s}.$$

Введенные функции ортонормированы в смысле скалярного произведения (3.3), что непосредственно проверяется с помощью табличного интеграла [5]

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_\nu(x)J_\mu(x)}{x}\,dx = \frac{2}{\pi(\nu^2 - \mu^2)} \sin\frac{\nu - \mu}{2}\pi, \quad \nu + \mu > 0.$$

А полнота введенных функций следует из полноты полиномов Гегенбауэра. Таким образом, определен ортонормированный базис в пространствах Соболева–Слободецкого для случая $s \geq 0$.

5. Базисы в пространствах Соболева–Слободецкого для случая $-1 < s < 0$. В случае $-1/2 < s < 0$ применимы все построения предыдущего пункта. Перейдем к построению базиса в случае $-1 < s \leq -1/2$. Норму определять формулой (3.2) не удается, так как интеграл расходится. Поэтому норму и скалярное произведение определим следующими формулами:

$$(u, v)_{s1} = C_s \tilde{u}(0)\overline{\tilde{v}}(0) + \int_{|x|<1} (\tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}}(x) - \tilde{u}(0)\overline{\tilde{v}}(0))|x|^{2s}\,dx + \int_{|x|\geq 1} \tilde{u}(x)\overline{\tilde{v}}(x)|x|^{2s}\,dx,$$

$$(u, u)_{s1} = C_s|\tilde{u}(0)|^2 + \int_{|x|<1} (|\tilde{u}(x)|^2 - |\tilde{u}(0)|^2)|x|^{2s}\,dx + \int_{|x|\geq 1} |\tilde{u}(x)|^2|x|^{2s}\,dx.$$

Когда одно из чисел m или n больше единицы, то

$$(\varphi_m^s, \varphi_n^s) = \delta_{mn}, \tag{5.1}$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. И наконец,

$$(\varphi_1^s, \varphi_1^s)_{s1} = C_s|\tilde{\varphi}_1^s(0)|^2 + \int_{|x|<1} (|\tilde{\varphi}_1^s(x)|^2 - |\tilde{\varphi}_1^s(0)|^2)|x|^{2s}\,dx + \int_{|x|>1} |\tilde{\varphi}_1^s(x)|^2|x|^{2s}\,dx. \tag{5.2}$$

Можно подобрать постоянную C_s таким образом, чтобы правая часть равенства (5.2) была положительной величиной. Это условие вместе с условием (5.1) обеспечивает корректность введения нормы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974.
2. *Нефедов Е.И., Радциг Ю.Ю., Эминов С.И.* // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 2. С. 186–187.
3. *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 12. С. 2160–2168.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
5. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н.* Интегралы, ряды. Специальные функции. М., 1983.

Новгородский государственный университет
им. Ярослава Мудрого

Поступила в редакцию
06.02.2003 г.