



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пяткин, Некоторые верхние оценки для инцидентного (k, l) -хроматического числа, *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, 2003, том 10, выпуск 2, 66–78

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

15 января 2025 г., 08:24:15



НЕКОТОРЫЕ ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ
ДЛЯ ИНЦИДЕНТОРНОГО
(k, l)-ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА*)

А. В. Пяткин

Исследуется минимальное число цветов, достаточное для (k, l)-раскраски инциденторов любого мультиграфа степени Δ при разных значениях k и l . Получены новые верхние оценки для этого числа.

Введение

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E . Через $\Delta(G)$, $\Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ обозначаются соответственно его максимальная степень и максимальные исходящая и входящая полустепени. Пусть $E' \subset E$. Подграф $G' = (V, E')$ называется *2-фактором*, если $\Delta(G') \leq 2$. Отметим, что в отличие от традиционного определения 2-фактора в этом определении не требуется однородности мультиграфа G' . Подграф $G' = (V, E')$ называется *линейным фактором*, если $\Delta^+(G') \leq 1$ и $\Delta^-(G') \leq 1$. Ясно, что любой линейный фактор является 2-фактором. Обратное, вообще говоря, не верно. Будем говорить, что подграф G' *покрывает* вершину $v \in V$, если ее степень в G' больше нуля.

Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором*. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e , инцидентную вершине v . Будем также говорить, что инцидентор (v, e) *примыкает* к вершине v . Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e) . Эти два инцидентора называются *сопряженными* по отношению друг к другу. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Множество всех инциденторов

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00039 и 03-01-06473), Фонда содействия отечественной науке и Молодежного гранта СО РАН.

мультиграфа G обозначим через I . Раскраской инциденторов называется произвольное отображение $f : I \rightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (цветов). Для дуги $e = uv$ будем писать $f(e) = (a, b)$, если $f(u, e) = a$ и $f(v, e) = b$. Раскраску инциденторов называем *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется (k, l) -раскраской, где $0 \leq k \leq l$, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги лежит в интервале $[k, l]$. Наименьшее число цветов, необходимое для (k, l) -раскраски инциденторов мультиграфа G , называется (k, l) -хроматическим числом и обозначается через $\chi_{k,l}(G)$.

Заметим, что в случае $k = l = 0$ мы имеем дело с обычной задачей реберной раскраски мультиграфов и $\chi_{0,0}(G) = \chi'(G)$ — это реберное хроматическое число мультиграфа G . Впервые задача раскраски инциденторов сформулирована в работе [10]. В ней было доказано, что $\chi_{0,\infty}(G) = \Delta(G)$. Случай $k = 1, l = \infty$ рассмотрен в работе [13], где было установлено, что $\chi_{1,\infty}(G) = \max\{\Delta(G), \Delta^+(G)+1, \Delta^-(G)+1\}$. В ней же была высказана гипотеза, что для раскраски смешанного мультиграфа требуется $\max\{\chi'(G), \Delta(G) + 1\}$ цветов. Для кубических мультиграфов эта гипотеза доказана в [15]. Окончательно случай $l = \infty$ изучен в 1999 г. в кандидатской диссертации автора, где было доказано, что

$$\chi_{k,\infty}(G) = \max\{\Delta(G), \Delta^+(G) + k, \Delta^-(G) + k\}. \quad (1)$$

Различные доказательства этой формулы можно найти в работах [2, 4, 16].

Понятия (k, l) -инциденторной раскраски и (k, l) -хроматического числа были введены в работе [6]. В ней найдены значения и оценки (k, l) -хроматического числа для некоторых k и l , в частности показано, что $\chi_{0,1}(G) = \Delta(G)$.

Положим $\chi_{k,l}(\Delta) = \max\{\chi_{k,l}(G) \mid G \text{ — мультиграф степени } \Delta\}$. Из (1) вытекает равенство $\chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$. Очевидно, что

$$k + \Delta \leq \chi_{k,l+1}(\Delta) \leq \chi_{k,l}(\Delta) \leq \chi_{k+1,l}(\Delta). \quad (2)$$

Нижняя оценка в (2) получается при рассмотрении мультиграфа, имеющего источник или сток степени Δ . В [6] была высказана гипотеза, что для любого k существует такое l , что

$$\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta). \quad (3)$$

Так как $\chi_{0,1}(\Delta) = \Delta$, то при $k = 0$ гипотеза верна. Заметим, что при $l = 0$ равенство $\chi_{0,0}(\Delta) = \chi_{0,\infty}(\Delta)$ не выполняется, так как из формулы Шеннона [12] следует, что $\chi_{0,0}(\Delta) = \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. Таким образом, при $k = 0$ искомое l равно 1. В [11] было показано, что

$$\chi_{k,l}(3) = \begin{cases} k + 4, & \text{если } k = l = 0 \text{ или } k = l = 1; \\ k + 3 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Существенное продвижение в изучении (k, l) -хроматического числа было сделано в работе [4]. В ней доказаны формулы $\chi_{k,k}(G) = \chi_{k,\infty}(G)$ при $k \geq \Delta(G) - 1$ и $\chi_{k,\Delta(G)-1}(G) = \chi_{k,\infty}(G)$. Более того, построены примеры, показывающие, что при $l < \Delta(G) - 1$ последнее равенство может не выполняться. Это означает, что если в гипотезе (3) заменить $\chi(\Delta)$ на $\chi(G)$, то она будет неверна. Тем не менее из указанных результатов не следует справедливость гипотезы (3), так как в ней l не должно зависеть от Δ . В [4] были также уточнены некоторые оценки для (k, l) -хроматического числа, полученные в [6], в частности показано, что $\chi_{1,1}(\Delta) \leq \lceil 3\Delta/2 \rceil$. Основным инструментом для получения перечисленных результатов является теорема Визинга о линейном факторе, которая приведена в следующем разделе.

Отметим также некоторые работы, в которых изучались другие виды раскрасок инциденторов. К ним относятся предписанная [1] (для каждой дуги задается допустимое для окраски ее инциденторов множество цветов), тотальная [2, 7] (одновременно красятся инциденторы и вершины мультиграфа), интервальная [3, 5] (при каждой вершине использованные цвета должны образовывать интервал) и обобщённая [9] (для некоторых дуг помимо инциденторов красятся также и средние части) инциденторные раскраски.

В настоящей статье техника разбиения ориентированного мультиграфа на 2-факторы и линейные факторы используется для получения новых верхних оценок для (k, l) -хроматического числа при различных ограничениях на k и l .

1. Разбиение ориентированного мультиграфа на 2-факторы и линейные факторы

Существенным подспорьем в изучении раскраски инциденторов является теорема Петерсена [14] о разбиении любого мультиграфа степени $\Delta \leq 2t$ на t непересекающихся 2-факторов. Это связано с тем, что для 2-фактора легко построить раскраску инциденторов f , использующую только 3 цвета a, b и c , где $a < b < c$. Действительно, для каждого цикла (компоненты связности) 2-фактора зададим некоторое направление обхода и положим $f(e) = (a, b)$, если дуга e сонаправлена обходу, и $f(e) = (b, c)$ в противном случае. Нетрудно убедиться, что f является (k, l) -раскраской инциденторов, где $k = \min\{b - a, c - b\}$ и $l = \max\{b - a, c - b\}$. Таковую раскраску 2-фактора будем называть *канонической*. Отметим два свойства канонической раскраски, которые используются в дальнейшем: во-первых, цвет b используется при каждой вершине, во-вторых, цвет a используется для окраски только начальных, а цвет c — только конечных инциденторов. Ясно, что при

канонической раскраске линейного фактора достаточно лишь двух цветов. Поэтому полезным дополнением к теореме Петерсена является следующее утверждение из [4].

Теорема Визинга (о линейном факторе). *В любом ориентированном мультиграфе степени Δ существует линейный фактор, покрывающий все вершины степени Δ .*

Нам потребуются два следствия из этой теоремы.

Лемма 1. *В любом ориентированном мультиграфе степени Δ существует линейный фактор, покрывающий все вершины степени Δ , компонентами которого являются только пути длины не более двух.*

Для доказательства достаточно рассмотреть линейный фактор, удовлетворяющий условиям теоремы Визинга и имеющий наименьшее число ребер. Далее такие линейные факторы будем называть *минимальными*.

Лемма 2. *Любой ориентированный мультиграф $G = (V, E)$ степени Δ можно разбить на $(\Delta - k)$ 2-факторов и $(2k - \Delta)$ линейных факторов, где $\Delta \geq k \geq \lceil \Delta/2 \rceil$.*

Доказательство. Применяя $2k - \Delta$ раз подряд теорему Визинга, получаем $2k - \Delta$ линейных факторов, после удаления которых остается мультиграф степени не более $2\Delta - 2k$. По теореме Петерсена этот мультиграф можно разбить на $\Delta - k$ 2-фактора. Лемма 2 доказана.

С помощью леммы 2 можно расширить множество тех k и l , для которых достигается нижняя оценка в неравенстве (2).

Теорема 1. *Если $k \geq \lceil \Delta/2 \rceil$, то $\chi_{k,k}(\Delta) = k + \Delta$.*

Доказательство. Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени Δ . При $k > \Delta$ утверждение было доказано в работах [4, 11]. Пусть $\lceil \Delta/2 \rceil \leq k \leq \Delta$. По лемме 2 имеем $E = E_1 \cup \dots \cup E_k$, где E_i образует 2-фактор при $i = 1, \dots, \Delta - k$ и линейный фактор при остальных значениях i . Каждый 2-фактор E_i раскрасим канонически цветами i , $k + i$ и $2k + i$ ($i = 1, \dots, \Delta - k$), а линейный фактор E_j — цветами j и $j + k$ ($j = \Delta - k + 1, \dots, k$). Нетрудно убедиться, что такая (k, k) -раскраска будет правильной, а наибольшим использованным цветом является $\Delta + k$. Теорема 1 доказана.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей леммой.

Лемма 3. *Если при некоторых натуральных t, p, k и l , где $k \leq l$, верно неравенство $\chi_{k,l}(2t) \leq p$, то при любых натуральных s и r выполняются неравенства*

$$1) \chi_{k,l}(2tr) \leq pr; \quad 2) \chi_{ks,ls}(2ts) \leq ps; \quad 3) \chi_{ks,ls}(2tsr) \leq psr.$$

Доказательство. 1. Пусть G — мультиграф степени $2tr$. По теореме Петерсена он разбивается на tr непересекающихся 2-факторов. Объединяя их в группы по t штук, получим разбиение графа G на r подграфов степени не выше $2t$. Раскрасив каждый из них в p цветов, получим (k, l) -раскраску графа G в pr цветов.

2. Пусть G — мультиграф степени $2ts$. Как и в предыдущем случае, разобьем G на s мультиграфов степени не выше $2t$. Обозначим их через G_1, \dots, G_s . Пусть f_j — (k, l) -раскраска графа G_j в p цветов ($j = 1, \dots, s$). Построим (ks, ls) -раскраску f инциденторов мультиграфа G следующим образом. Рассмотрим произвольный инцидентор i . Тогда $i \in G_j$ для некоторого $j = 1, \dots, s$. Положим $f(i) = s(f_j(i) - 1) + j$. Ясно, что $f(i) \leq s(p - 1) + s = sp$ для любого инцидентора i . Покажем, что f является (ks, ls) -раскраской. Пусть i_1 и i_2 являются соответственно начальным и конечным инциденторами некоторой дуги $e \in G_j$. Тогда $f(i_2) - f(i_1) = s(f_j(i_2) - f_j(i_1)) \in [ks, ls]$. Предположим, что f не является правильной раскраской, т. е. $f(i_1) = f(i_2)$ для некоторых смежных инциденторов $i_1 \in G_{j_1}$ и $i_2 \in G_{j_2}$. Тогда $s(f_{j_1}(i_1) - f_{j_2}(i_2)) = j_2 - j_1$. Так как $|j_2 - j_1| < s$, то $j_1 = j_2$. Следовательно, $f_{j_1}(i_1) = f_{j_1}(i_2)$, что противоречит правильности раскраски f_{j_1} .

3. Получается последовательным применением оценок 1 и 2. Лемма 3 доказана.

Верхнюю оценку $\chi_{1,1}(\Delta) \leq \lceil 3\Delta/2 \rceil$ из [4] теперь нетрудно обобщить на случай произвольного k .

Теорема 2. При любом $k \geq 1$ справедливо неравенство $\chi_{k,k}(\Delta) \leq \lceil 3\Delta/2 \rceil + k - 1$.

Доказательство. Так как $\chi_{1,1}(2) = 3$, то по лемме 3 имеем $\chi_{k,k}(2kt) \leq 3kt$ при любых натуральных t и k . Пусть $\Delta = 2kt + m$, где $0 < m < 2k$, а G — мультиграф степени Δ . Если $m = 1$, то по теореме Визинга мультиграф G разбивается на линейный фактор и мультиграф степени не более $2kt$. Этот мультиграф красим в $3kt$ цветов и добавляем каноническую (k, k) -раскраску линейного фактора цветами $3kt + 1$ и $3kt + k + 1$. Если $m = 2$, то $k > 1$, так как $m < 2k$. Применяя теорему Визинга дважды, разобьем G на два линейных фактора и мультиграф степени не более $2kt$. Этот мультиграф раскрасим в $3kt$ цветов, первый линейный фактор — цветами $3kt + 1$ и $3kt + k + 1$, а второй — цветами $3kt + 2$ и $3kt + k + 2$. Так как $k > 1$, эта раскраска будет правильной.

Если $m \geq 3$, то $\lceil 3\Delta/2 \rceil = 3kt + \lceil 3m/2 \rceil \geq 3kt + m + 2$. Применяя к мультиграфу G теорему Петерсена и в случае нечетного m теорему Визинга, разобьем G на два мультиграфа G_1 и G_2 , степень первого из которых не превосходит $2kt$, а второго — $m + 1$. По доказанному имеем $\chi_{k,k}(G_1) \leq 3kt$. Так как $m + 1 \leq 2k$, то по теореме 1 имеем $\chi_{k,k}(G_2) \leq$

$m + 1 + k$. Значит, $\chi_{k,k}(G) \leq 3kt + m + 1 + k \leq \lceil 3\Delta/2 \rceil + k - 1$. Теорема 2 доказана.

В случае $l > k$ верхнюю оценку для (k, l) -хроматического числа можно улучшить.

Теорема 3. При $k \geq 1$ и любых натуральных t и m справедливо неравенство $\chi_{k,(2m+1)k}((4m+2)kt) \leq (4m+3)kt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 достаточно доказать, что $\chi_{1,2m+1}(4m+2) \leq 4m+3$ при любом m . Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени $4m+2$. Можно считать, что он однороден. По теореме Петерсена $E = \bigcup_{i=1}^{2m+1} E_i$, где каждый мультиграф (V, E_i) является однородным 2-фактором. Раскраска графа G осуществляется в два этапа: сначала строятся канонические $(1, 1)$ -раскраски каждого из 2-факторов (объединение этих раскрасок может не быть правильной раскраской G), а затем они преобразуются в $(1, 2m+1)$ -раскраску мультиграфа G .

На первом этапе для каждого $i = 1, \dots, 2m+1$ канонически раскрасим 2-фактор E_i цветами $2i-1$, $2i$ и $2i+1$. Ясно, что раскраска мультиграфа G , полученная в результате объединения этих $(1, 1)$ -раскрасок 2-факторов, может не быть правильной, поскольку смежные инциденторы дуг, принадлежащие E_i и E_{i+1} для некоторых i , могут получить одинаковые цвета. Рассмотрим произвольную вершину v и 2-фактор E_i , где $i \in \{1, \dots, 2m+1\}$. Вершине v инцидентны два инцидентора дуг из E_i . Заметим, что один из них обязательно раскрашен цветом $2i$, а другой — либо цветом $2i-1$, либо цветом $2i+1$. Будем говорить, что 2-фактор E_i является *красным при вершине v* , если этот инцидентор окрашен цветом $2i-1$, и *синим при вершине v* в противном случае. Ясно, что все четные цвета из множества $\{2, 4, \dots, 4m+2\}$ использованы при v ровно по одному разу. Нечетный цвет $2i+1$ назовем *плохим*, если им окрашены два инцидентора при вершине v , и *свободным*, если не окрашен ни один. Непосредственно из определения канонической раскраски 2-фактора следует, что

1) если 2-фактор E_i синий при вершине v , то примыкающий к ней инцидентор дуги этого 2-фактора, окрашенный нечетным цветом, является конечным, а если E_i красный при вершине v , — то начальным;

2) цвета 1 и $4m+3$ не могут быть плохими; цвет 1 свободен тогда и только тогда, когда 2-фактор E_i является синим, а $4m+3$ — когда E_{2m+1} является красным;

3) для всякого $i \in \{1, \dots, 2m\}$ цвет $2i+1$ свободен тогда и только тогда, когда E_i красный, а E_{i+1} синий;

4) при $i \in \{1, \dots, 2m\}$ цвет $2i+1$ является плохим тогда и только тогда, когда E_i синий, а E_{i+1} красный;

На втором этапе осуществляется перекраска плохих цветов при каждой вершине мультиграфа. Пусть цвета $a_1 < a_2 < \dots < a_p$ являются плохими при вершине v . Все эти цвета нечетные, т. е. $a_j = 2i_j + 1$ при каждом $j = 1, \dots, p$. Покажем, что найдутся такие свободные цвета $b_1 < \dots < b_{p+1}$, что $b_i < a_i < b_{i+1}$ для каждого $i = 1, \dots, p$.

Действительно, если E_1 синий, то $b_1 = 1$. В противном случае, так как E_{i_1} синий, найдется такое число $j \in [1, i_1 - 1]$, что E_j является красным, а E_{j+1} — синим. Но тогда цвет $2j + 1 < a_1$ свободен и можно положить $b_1 = 2j + 1$. Аналогично находится цвет b_{p+1} . Наконец, для всякого $s = 1, \dots, p - 1$ 2-фактор $E_{i_{s+1}}$ является красным, а E_{i_s} — синим. Следовательно, для некоторого $j \in [i_s + 1, i_{s+1} - 1]$ 2-фактор E_j будет красным, а E_{j+1} — синим. Тогда цвет $2j + 1$ свободен и удовлетворяет соотношению $a_s < 2j + 1 < a_{s+1}$. Следовательно, можно положить $b_{s+1} = 2j + 1$.

Выберем число q таким образом, что $a_q < 2m + 2 < a_{q+1}$ (если $a_1 > 2m + 2$ или $a_p < 2m + 2$, то считаем, что $q = 0$ или $q = p$ соответственно). Для $i = 1, \dots, q$ начальный инцидентор цвета a_i перекрашивается в цвет b_i . Так как цвет сопряженного конечного инцидентора не превосходит $2m + 2$, то разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги не будет превосходить $2m - 1$. Аналогично для каждого $j = q + 1, \dots, p$ конечный инцидентор цвета a_j перекрашивается в цвет b_{j+1} .

Заметим, что так как перекрашиваются только инциденторы нечетного цвета, ни у какой дуги не могут быть перекрашены оба инцидентора. Следовательно, осуществив такую перекраску для каждой вершины v , получим $(1, 2m + 1)$ -раскраску мультиграфа G в $4m + 3$ цвета. Теорема 3 доказана.

Таким образом, верхняя оценка $\lceil 3\Delta/2 \rceil$ для $\chi_{k,k}(\Delta)$ из теоремы 2 при $l = (2m + 1)k$ обобщается до $\lceil (4m + 3)\Delta/(4m + 2) \rceil$ (с точностью до аддитивной константы, зависящей только от k и m). Проиллюстрируем это утверждение для случая $k = m = 1$.

Следствие. Если $\Delta \not\equiv 5 \pmod{6}$, то $\chi_{1,3}(\Delta) \leq \lceil 7\Delta/6 \rceil$.

Доказательство. Пусть $\Delta = 6t + s$, где $s < 5$. Рассмотрим произвольный мультиграф G степени Δ . Случай $s = 0$ рассмотрен при доказательстве теоремы 3.

Если $s = 1$, то в G существует линейный фактор, покрывающий все вершины. Раскрасим его в два цвета, а оставшийся мультиграф степени не более $6t$ раскрасим в $7t$ цветов и получим искомую раскраску.

Если $s = 2$, то G разбивается на 2-фактор и мультиграф степени не более $6t$; первый из них красится в три цвета, а второй — в $7t$ цветов.

При $s = 3$ мультиграф G представим в виде $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$,

где $\Delta(G_1) \leq 6t$, $\Delta(G_2) \leq 2$, а G_3 является линейным фактором. По теореме 3 мультиграф G_1 красим цветами $1, \dots, 7t$, 2-фактор G_2 — цветами $7t + 1, 7t + 2, 7t + 3$, а линейный фактор G_3 — цветами x и $7t + 4$. Далее каждый инцидентор цвета x перекрашиваем в цвет из множества $\{7t + 1, 7t + 2, 7t + 3\}$, отсутствующий при вершине, к которой примыкает данный инцидентор. Получим (1,3)-раскраску инциденторов мультиграфа G .

Наконец, если $s = 4$, то $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$, где $\Delta(G_1) \leq 6t$, а G_2 и G_3 являются 2-факторами. Мультиграф G_1 красим цветами $1, \dots, 7t$, G_2 — цветами $7t + 1, 7t + 2, 7t + 3$, а G_3 — цветами $x, 7t + 4, 7t + 5$, после чего перекрашиваем все инциденторы цвета x в свободные цвета из множества $\{7t + 1, 7t + 2, 7t + 3\}$ так же, как в предыдущем случае. Следствие доказано.

Доказательство этой оценки при $\Delta \not\equiv 5 \pmod{6}$, к сожалению, не получается, хотя для $\Delta = 5$ она доказывается в следующем разделе (теорема 5). Это доказательство, однако, требует более тщательного выбора линейного фактора и более тонких способов построения раскраски.

2. Использование минимального линейного фактора

В этом разделе доказываются две теоремы с применением минимальных линейных факторов для мультиграфов малой степени.

Теорема 4. *Справедливо соотношение $\chi_{1,2}(4) = 5$.*

Доказательство. Ввиду оценки (2) достаточно доказать, что $\chi_{1,2}(4) \leq 5$. Пусть $G = (V, E)$ — мультиграф степени 4. Можно считать, что G однороден. Тогда по теореме Петерсена в G найдется однородный 2-фактор F . По лемме 1 в мультиграфе $G \setminus F$ существует минимальный линейный фактор, покрывающий все вершины (так как $G \setminus F$ является однородным мультиграфом степени 2, то компонентами связности этого минимального линейного фактора будут пути длины один и два). Множество его ребер обозначим через E_1 . Легко видеть, что множество ребер $E_2 = G \setminus (E_1 \cup F)$ является паросочетанием.

Будем строить (1,2)-раскраску f в два этапа.

1. Пусть $e = uv \in E_1$. Если вершине v инцидентны две дуги из E_1 (и, следовательно, ни одной дуги из E_2), то полагаем $f(e) = (2, 4)$. В противном случае красим $f(e) = (1, 2)$. Для каждой дуги $e \in E_2$ положим $f(e) = (4, 5)$. Канонически раскрасим 2-фактор F цветами $x, 3$ и y , где $x < 3 < y$. При этом все инциденторы, окрашенные цветом x , будут начальными, а цветом y — конечными.

2. Для каждой вершины v перекрасим примыкающий к ней инцидентор цвета x (цвета y) в свободный при этой вершине цвет из множества

$A_1 = \{1, 2\}$ (множества $A_2 = \{4, 5\}$). Покажем, что такая перекраска возможна. Действительно, если вершине v инцидентно по одной дуге из E_1 и E_2 , то при ней использовано ровно по одному цвету из множеств A_1 и A_2 . В противном случае вершине v инцидентны две дуги из E_1 и свободными являются цвета 2 и 5.

Нетрудно проверить, что полученная раскраска является $(1,2)$ -раскраской мультиграфа G . Теорема 4 доказана.

Заметим, что из теоремы 4 и леммы 3 следует неравенство $\chi_{k,2k}(4kt) \leq 5kt$, откуда с точностью до аддитививной константы, зависящей только от k , получается оценка $\chi_{k,2k}(\Delta) \leq \lceil 5\Delta/4 \rceil$.

Теперь докажем теорему об $(1,3)$ -раскраске мультиграфов степени 5.

Теорема 5. *Справедливо равенство $\chi_{1,3}(5) = 6$.*

Доказательство. Ввиду оценки (2) достаточно доказать, что $\chi_{1,3}(5) \leq 6$. Пусть $G = (V, E)$ — однородный мультиграф степени 5. Применим три раза подряд лемму 1, т. е. обозначим через E_1 , E_2 и E_3 множества ребер минимальных линейных факторов в мультиграфах G , $G \setminus E_1$ и $G \setminus (E_1 \cup E_2)$ соответственно. Тогда мультиграф $F = G \setminus (E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ является 2-фактором. Пусть $G_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2, 3$. Будем говорить, что вершина v имеет *min* (a_1, a_2, a_3) , если ее степень в подграфе G_i равна a_i ($i = 1, 2, 3$). По выбору линейных факторов имеем $a_1 \geq 1$, $a_1 + a_2 \geq 2$ и $a_1 + a_2 + a_3 \geq 3$ для любой вершины v типа (a_1, a_2, a_3) . Будем искать $(1,3)$ -раскраску f инциденторов мультиграфа G в три этапа.

На первом этапе красятся инциденторы дуг из множеств E_1 , E_2 и E_3 . Сначала введем терминологию. Для всякого $i = 1, 2, 3$ дугу $e \in E_i$ назовем *простой*, если она принадлежит пути длины один в E_i . Пусть uvw — путь длины два в E_i . Дугу uv будем называть *начальной*, а vw — *конечной* дугой пути uvw . Раскраска строится следующим образом (см. рисунок).

Раскраска E_1 . Полагаем $f(e) = (1, 2)$ для каждой простой или конечной дуги $e \in E_1$. Пусть uv является начальной дугой пути в E_1 . Если вершина v покрыта в G_2 и G_3 , то полагаем $f(uv) = (1, 2)$. Если v покрыта G_2 , но непокрыта G_3 , то полагаем $f(uv) = (1, 3)$. Наконец, положим $f(uv) = (2, 5)$ в случае, если v непокрыта G_2 .

Раскраска E_2 . Полагаем $f(e) = (5, 6)$ для каждой простой или начальной дуги $e \in E_2$, а также для тех конечных дуг, которые исходят из вершин, покрытых G_3 . Для каждой конечной дуги $e \in E_2$, которая исходит из вершины, непокрытой G_3 , полагаем $f(e) = (4, 6)$.

получится искомая (1,3)-раскраска инциденторов мультиграфа G . В противном случае переходим к третьему этапу.

На третьем этапе по очереди рассматриваются все вершины, при которых после второго этапа не удалось перекрасить инцидентор цвета x , y или z . Пусть v — одна из таких вершин, имеющая тип (a_1, a_2, a_3) . Ввиду (4) $a_1 + a_2 + a_3 = 4$. Рассмотрим все возможные типы.

(а) Если v является вершиной типа $(2,2,0)$, то ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_1$, $u_2v, vw_2 \in E_2$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = (1,3)$, $f(vw_1) = (1,2)$, $f(u_2v) = (5,6)$, $f(vw_2) = (4,6)$ и $f(v, e) = z$. Так как цвет 2 свободен при v , то можно осуществить перекраску $f(u_1v) = (1,2)$, $f(v, e) = 3$.

(б) Если v — вершина типа $(2,0,2)$, то ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_1$, $u_2v, vw_2 \in E_3$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = (2,5)$, $f(vw_1) = (1,2)$, $f(u_2v) = f(vw_2) = (3,4)$ и $f(v, e) = z$. Так как цвет 6 свободен при v , то можно осуществить перекраску $f(u_2v) = (3,6)$, $f(v, e) = 4$.

(с) Пусть тип вершины v есть $(2,1,1)$. Тогда ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$, $e_3 \in E_3$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = f(vw_1) = (1,2)$, $f(v, e_2) = \alpha \in A_2$, $f(v, e_3) = \beta \in A_3$ и $f(v, e) = x$. Обозначим через $\gamma \in A_3$ свободный при v цвет из A_3 и положим $f(u_1v) = (1, \gamma)$, $f(v, e) = 2$.

(д) Пусть v имеет тип $(1,2,1)$. Тогда ей инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_2$, $e_1 \in E_1$, $e_3 \in E_3$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = f(vw_1) = (5,6)$, $f(v, e_1) = \alpha \in A_1$, $f(v, e_3) = \beta \in A_3$ и $f(v, e) = y$. Обозначим через $\gamma \in A_3$ свободный при v цвет из A_3 и положим $f(vw_1) = (\gamma, 6)$, $f(v, e) = 5$.

(е) Наконец, вершине типа $(1,1,2)$ инцидентны дуги $u_1v, vw_1 \in E_3$, $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$ и $e \in F$, причем $f(u_1v) = f(vw_1) = (3,4)$, $f(v, e_1) = \alpha \in A_1$, $f(v, e_2) = \beta \in A_2$ и $f(v, e) = z$. Обозначим через $\gamma \in A_2$ свободный при v цвет из A_2 и положим $f(u_1v) = (3, \gamma)$, $f(v, e) = 4$.

Заметим, что на третьем этапе ни у одной дуги из E_1 , E_2 или E_3 не перекрашиваются оба инцидентора. Это следует из того, что перекраске могут подвергнуться либо начальные инциденторы цвета 5, либо конечные инциденторы меньшего цвета. Следовательно, после третьего этапа получается искомая (1,3)-раскраска инциденторов мультиграфа G . Теорема 5 доказана.

В заключение приведем сводку результатов, касающихся мультиграфов степеней $\Delta = 4$ и $\Delta = 5$.

Из теорем 1 и 4 следует, что $\chi_{k,l}(4) = k + 4$ при $k \geq 1$ и $l > 1$. При $k = l = 1$ имеем оценку $5 \leq \chi_{k,l}(4) \leq 6$. Для всякого $l \geq 3$ по теореме 1 имеем $\chi_{3,l}(5) = 8$ и $7 \leq \chi_{2,l}(5) \leq 8$, а из теоремы 5 следует, что $\chi_{1,l}(5) = 6$. По теореме 2 выполняются неравенства $7 \leq \chi_{2,2}(5) \leq 9$ и $6 \leq \chi_{1,1}(5) \leq 8$, а из теоремы 4 следует оценка $6 \leq \chi_{1,2}(5) \leq 7$.

Автор выражает благодарность рецензенту В. Г. Визингу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Визинг В. Г.** Раскраска инцидентов мультиграфа в предписанные цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.
2. **Визинг В. Г.** Раскраска инцидентов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.
3. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инцидентов ориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 40–51.
4. **Визинг В. Г.** Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа в задачах раскраски инцидентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.
5. **Визинг В. Г.** Интервальная раскраска инцидентов неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 1. С. 14–40.
6. **Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В.** О (k, l) -раскраске инцидентов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.
7. **Визинг В. Г., Тофт Б.** Раскраска инцидентов и вершин неориентированного мультиграфа // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.
8. **Дистель Р.** Теория графов: Пер. с англ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002.
9. **Плеханова Н. С., Пяткин А. В.** Передача сообщений в локальной сети с двумя центральными ЭВМ // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 2. С. 91–99.
10. **Пяткин А. В.** Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.
11. **Пяткин А. В.** (k, l) -раскраска инцидентов кубических мультиграфов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 49–53.
12. **Шеннон К. Э.** Теорема о раскраске ребер графа // Кибернетический сборник. Вып. 1. М.: Мир, 1960. С. 249–253.
13. **Melnikov L. S., Vizing V. G.** The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.
14. **Petersen J.** Die Theorie der regulären Graphen // Acta Math. 1891. V. 15. P. 193–220.

- 15. Pyatkin A. V.** Proof of Melnikov–Vizing conjecture for multigraphs with maximum degree at most 3 // *Discrete Math.* 1998. V. 185, N 1–3. P. 275–278.
- 16. Pyatkin A. V.** The incidentor coloring of multigraphs and its applications // *Discrete Appl. Math.* 2002. V. 120, N 1–3. P. 209–217.

Адрес автора:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск,
Россия

Статья поступила
3 марта 2003 г.