Доклады Академии наук СССР
1961. Том 138, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Н. ШИРЯЕВ

ЗАДАЧА СКОРЕЙШЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ НАРУШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 21 I 1961)

1. Пусть при $t \geqslant 0$ непрерывно наблюдается случайный процесс $\eta(t)$, удовлетворяющий стохастическому уравнению

$$d\eta(t) = \chi(t - \theta)\, dt + d\xi(t), \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — гауссовский процесс с независимыми приращениями, $\xi(0) = 0$,

$$\mathbf{M}\Delta\xi = 0, \quad \mathbf{M}(\Delta\xi)^2 = \Delta t$$

а функция χ имеет вид

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \leqslant 0, \\ 1, & s > 0. \end{cases}$$

Момент θ появления «разладки» неизвестен.

Цель настоящей заметки состоит в кратком изложении решения следующей задачи, поставленной А. Н. Колмогоровым.

Требуется отыскать такой метод наблюдения *, чтобы после появления разладки возможно скорее был подан на основании наблюдений за ходом $\eta(t)$ соответствующий сигнал о ее наличии. Появление же ошибочных сигналов, подаваемых до момента θ, должно осуществляться в некотором смысле редко.

2. Рассматриваемая задача родственна задаче выбора между гипотезами $\chi = 0$ и $\chi = 1$ на основании наблюдений за ходом функции

$$d\eta(t) = \chi\, dt + d\xi(t), \tag{2}$$

рассмотренной в § 3 работы [2].

Для сравнения напомним хорошо известные результаты, относящиеся к этой последней задаче.

Пусть α и β обозначают вероятности ошибочных решений при гипотезах $\chi = 0$ и $\chi = 1$; $\mathbf{M}_i\nu$ — математические ожидания длительности наблюдений при гипотезах $\chi = i$. Если α и β фиксированы, то

$$\mathbf{M}_0\nu \geqslant 2\omega(\alpha, \beta), \quad \mathbf{M}_1\nu \geqslant 2\omega(\beta, \alpha),$$

где $\omega(\alpha, \beta) = (1 - \alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\beta} + \alpha\ln\frac{\alpha}{1-\beta}$.

Оба неравенства одновременно превращаются в равенство при оптимальной процедуре Вальда: наблюдается процесс $\zeta(t)$, $\zeta(0) = 0$,

$$d\zeta(t) = -\tfrac{1}{2}\, dt + d\eta(t) \tag{3}$$

до первого осуществления одного из равенств $\zeta(t) = A$ или $\zeta(t) = B$, где $B > 0 \geqslant A$. В первом случае принимается гипотеза $\chi = 0$, во втором $\chi = 1$.

Сформулированная в п. 1 задача, хотя в ней число гипотез (возможных значений параметра θ) б е с к о н е ч н о, допускает аналогичное решение, не требующее априорного взвешивания гипотез. Такая постановка задачи

* По поводу употребляемых понятий «метода наблюдения» и др. см. [1].

(далее — вариант А), однако, по существу применима лишь в случае, когда появлению разладки предшествует длительный период наблюдения за процессом $\eta(t)$ (при $\chi(t) = 0$), в котором устанавливается стационарный режим наблюдения.

Вариант А. Найти такой метод подачи сигналов, чтобы при заданном T — математическом ожидании (м. о.) времени между двумя ложными тревогами соответствующее среднее время запаздывания $\tau = \tau(T)$, подсчитываемое в предположении, что разладка появляется на фоне установившегося стационарного режима, возникающего при $\chi(t) = 0$, принимало минимальное значение.

Следующие два варианта (В и С) постановки задачи (дискретный аналог которых изложен в ([1])) предполагают, что для θ принимается априорное распределение

$$\mathbf{P}(\theta < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \tag{4}$$

где λ — известная постоянная.

Иначе говоря, предполагается, что $\chi(t)$ является марковским процессом с двумя состояниями 0 и 1, $\chi(0) = 0$, и единственным переходом $0 \to 1$ с плотностью вероятности, равной λ.

Вариант В. При заданном N — м. о. числа $\varkappa$ ложных сигналов, подающихся до момента θ, найти метод наблюдения, для которого

$$\tau_\varkappa = \mathbf{M}\{\nu_1 + \ldots + \nu_{\varkappa+1} - \theta\},$$

где случайные величины ν_i — длительности i-х этапов наблюдения, обращается в минимум.

Точно так же как и в ([2]), показывается, что последняя задача эквивалентна нахождению оптимального метода в следующей постановке.

Вариант С. При заданной вероятности $\omega = \mathcal{P}(\nu < \theta)$ выработать метод наблюдения с минимальным $\tau(\omega) = \mathbf{M}(\nu - \theta \mid \nu \geqslant \theta)$, где ν — момент подачи сигнала о разладке.

3. Обозначим

$$\pi(t) = \mathcal{P}\{\chi(t) = 1 \mid \eta^t(s)\} \tag{5}$$

апостериорную вероятность появления разладки до момента t. В (5), как обычно, $\eta^t(s)$ обозначает функцию, равную $\eta(s)$, но определенную лишь для $0 \leqslant s \leqslant t$.

Теорема 1. *Оптимальный (в смысле вариантов* В *и* С) *метод состоит в наблюдении процесса* $\pi(t)$, $\pi(0) = 0$, *до первого достижения некоторого значения* L, *которое подсчитывается из условия фиксации* N *или* ω. *Для* $\pi(t)$ *имеет место следующее стохастическое уравнение*:

$$d\pi(t) = (\lambda - \pi^2)(1 - \pi)\,dt + \pi(1 - \pi)\,d\eta(t). \tag{6}$$

Иногда вместо $\pi(t)$ удобно рассматривать

$$\psi(t) = \frac{\pi(t)}{1 - \pi(t)}, \tag{7}$$

$$\varphi(t) = \ln\psi(t), \tag{8}$$

для которых из (6) получаем

$$d\psi(t) = \lambda(1 + \psi)\,dt + \psi\,d\eta(t), \tag{9}$$

$$d\varphi(t) = [\lambda(1 + e^{-\varphi}) - {}^1/_2]\,dt + d\eta(t) \tag{10}$$

при условиях $\psi(0) = 0$, $\varphi(0) = -\infty$.

Естественно, что при $\lambda \to 0$ уравнение (10) переходит в известное уравнение (3) для логарифма отношения правдоподобия.

4. С помощью предельного перехода, указанного нам А. Н. Колмогоровым, из предшествующей теоремы можно получить оптимальный метод наблюдения в постановке задачи в варианте **А**. Причем мы будем рассматривать только такие методы наблюдения, для которых $\tau(T)$ непрерывно зависит от T, распределения для ν_i при $\chi(t) = 0$ нерешетчаты и стационар-

ный режим, являющийся следствием нерешетчатости ν_i, устанавливается таким образом, что при любом T

$$\limsup_{t\to\infty} [\tau^t(T) - \tau(T)] = 0.$$

Здесь $\tau^t(T)$ — м. о. времени запаздывания в предположении, что разладка появилась в момент t.

Для простоты последующих формул мы всюду будем предполагать $M_1\Delta\eta = \sqrt{2}\Delta t$, что всегда можно получить изменением масштаба времени.

Теорема 2. *Среди описанных выше методов наблюдения при заданном T оптимальным является метод, основанный на наблюдении случайного процесса* $\rho(t)$, $\rho(0) = 0$,

$$d\rho(t) = \frac{1}{T}dt + \sqrt{2}\rho\, d\eta(t) \tag{11}$$

до первого достижения единичного уровня. При этом

$$\tau(T) = e^{\gamma}(-\mathrm{Ei}(-\gamma)) - 1 + \gamma\int_0^\infty e^{-t}\frac{\ln(1+t/\gamma)}{t}dt, \tag{12}$$

где $\gamma = 1/T$,

$$-\mathrm{Ei}(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt, \qquad x \geqslant 0,$$

протабулированная интегральная показательная функция.

Из (12) непосредственно получаем

$$\tau(T) = \begin{cases}\ln T - 1 - C + o(1), & T \to \infty,\\ T/2 + O(T^2) & T \to 0,\end{cases} \tag{13}$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — константа Эйлера.

5. Большой интерес представляет сравнение оптимального метода наблюдения * с известными методами последовательного анализа Вальда и Неймана—Пирсона.

Применительно к данной задаче метод последовательного анализа состоит в наблюдении процесса $\zeta(t)$, $\zeta(0) = 0$, $d\zeta(t) = {}^1/_2 dt + d\eta(t)$ с принятием решения в момент ν первого выхода на границу. Если $\zeta(\nu) = B > 0$, где B — «верхняя» граница, то принимается решение о наличии разладки и происходит проверка этого решения. Если разладка действительно имеется, то наблюдения заканчиваются. В случае отсутствия разладки, а также при $\zeta(\nu) = A \leqslant 0$, A — «нижняя» граница, процесс наблюдения начинается сначала (происходит отражение процесса с границ в нуль).

Поскольку $T = T(A, B)$ и $\tau = \tau(A, B)$, то при заданном T метод фактически зависит от одного параметра, скажем A. Таким образом задача сводится к отысканию оптимального A.

Напомним, что τ подсчитывается в предположении установившегося стационарного режима, возникающего в отсутствие разладки. В настоящем случае фактически находится одномерное стационарное распределение для процесса $\zeta(t)$ с описанными краевыми условиями, которое необходимо для подсчета τ.

Теорема 3. *Существует такое $\tilde{T} < \infty$, что для всех $T \geqslant \tilde{T}$ оптимальным является выбор параметра $A \equiv 0$. При этом*

$$\tau(T) = \frac{1}{T}\left\{B\left(e^B - \frac{B}{2} - e^{-B}\right) - \frac{3}{2}(e^B - 2 + e^{-B})\right\}, \tag{14}$$

где $T = e^B - B - 1$.

---

* Заметим, что уравнение (11) для $\rho(t)$ является типичным примером уравнений с обратной связью.

Из (14) получаем

$$\tau(T) = \begin{cases} \ln T - {}^3/_2 + o(1), & T \to \infty, \\ {}^5/_6 T + O(T^2), & T \to 0. \end{cases} \tag{15}$$

У нас нет никаких сомнений в том, что в действительности для всех T выбор $A \equiv 0$ является оптимальным. Наш метод доказательства позволяет лишь установить, что $\tilde{T} \leqslant 3000$. Таким образом, в классе последовательного анализа Вальда оптимальный метод (по крайней мере при $T \geqslant \tilde{T}$) состоит в наблюдении процесса $\zeta(t)$, $\zeta(0) = 0$, с отражающим экраном $A = 0$. Этот метод мы будем называть **вырожденным последовательным анализом**.

Отметим также, что условию $A = 0$ соответствуют ошибки $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Примененный к данной задаче метод Неймана — Пирсона состоит в следующем. Решение о наличии разладки принимается в момент m, если $\zeta(m) \geqslant h$, где m и h — некоторые константы. Если $\zeta(m) \geqslant h$ и выясняется, что разладка в действительности имеет место, то наблюдения заканчиваются. Если же ее нет, а также в случае $\zeta(m) < h$ процесс наблюдения начинается сначала. Снова здесь $T = T(m, h)$ и $\tau = \tau(m, h)$ и при фиксированном T метод наблюдения целиком определяется одним параметром, скажем m. Что же касается установившегося стационарного режима, то здесь это понимается в следующем смысле: при любом фиксированном m распределение появления разладки на отрезке $[0, m]$ при условии ее появления на этом отрезке равномерно. Это допущение не покажется странным, если заметить, что таким свойством обладает распределение (4) при $\lambda \to 0$.

Ввиду громоздкости полученных формул для определения оптимального m, приведем только асимптотический результат.

Теорема 4. *При $T \to \infty$ оптимальным является выбор $m \sim \ln T$, при этом*

$$\tau(T) \sim {}^3/_2 \ln T. \tag{16}$$

Если $T \to 0$, то оптимальным выбором является $m \sim T$, и тогда

$$\tau(T) \sim {}^1/_2 T. \tag{17}$$

Из теорем 2, 3 и 4 вытекает, что при больших T вырожденный последовательный анализ дает удивительно хорошее приближение к оптимальному методу. При малых же T метод Неймана — Пирсона дает хорошее приближение к оптимальному методу.

Приведем результаты численного расчета для этих трех методов:

T	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4
Оптимальн. метод	0,04746	0,34153	1,37173	3,16015	5,34728	7,63502
Последовательн. анализ	0,06324	0,38892	1,44096	3,25994	5,43759	7,71529
Метод Н.—П.	0,05	0,44101	1,76845	4,35794	7,73121	11,45836

Выражаю благодарность А. Н. Колмогорову за помощь, оказанную мне в работе над данной задачей.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 I 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Ширяев, ДАН, 138, № 4 (1961). [2] A. Dvoretzky, J. Kiefer, J. Wolfowitz, Ann. of Math. Stat., 24, № 1 (1953).