В. Б. Невзоров, М. Раннэ, О рекордных моментах в последовательностях неодинаково распределенных дискретных случайных величин, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1992, том 194, 124–133

В.Б.Невзоров, М.Раннэ

О РЕКОРДНЫХ МОМЕНТАХ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ НЕОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

I. Рассмотрим независимые случайные величины X_1, X_2, ... с функциями распределения F_1, F_2, ... соответственно и максимумы $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ (n =I,2,...). Введем также случайные величины ξ_1, ξ_2, ... следующим образом: $\xi_1 = 1$ и $\xi_n = \mathbb{1}\{X_n > M_{n-1}\}$ (n =2,3,...), т.е. ξ_n представляет собой индикатор события $A_n = \{X_n > M_{n-1}\}$. Как нетрудно убедиться, A_n эквивалентно событию, состоящему в том, что n является верхним рекордным моментом в последовательности X_1, X_2,... . Если через $N(n)$ обозначим число рекордов среди величин X_1, X_2, ..., X_n, то справедливо равенство $N(n) = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Обзор результатов, связанных с рекордами, можно найти в работе [I].

В I962 г. А.Реньи (см. [3]) доказал справедливость следующего факта.

ЛЕММА I. Если $F_k = F$ (k =I,2, ...) и F – непрерывная функция распределения, то индикаторы ξ_1, ξ_2, ... независимы и $P\{\xi_n = 1\} = 1/n$ (n =I,2, ...).

В.Б.Невзоров ([I, 2]) обобщил лемму I, получив следующие два результата.

ЛЕММА 2. Если $F_k = F^{\alpha_k}$ (k =I,2,...), где F – непрерывная функция распределения и α_1, α_2,... – произвольная последовательность положительных чисел, то случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы и $P\{\xi_n = 1\} = \alpha_n / (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$ (n =I,2,...).

ЛЕММА 3. Если $F_k = F^{\alpha_k}$ (k =I,2,..., $n-1$), где F – непрерывная функция распределения и $\alpha_k > 0$ ($1 \le k \le n-1$), а F_n – произвольная непрерывная функция распределения, то индикаторы ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n независимы.

Выяснилось, что справедливо и следующее утверждение, обратное результату леммы 3, которое в несколько более слабом виде доказывается в работе [2].

ТЕОРЕМА I. Пусть X_1, X_2, ..., X_n – независимые случайные величины, F_1, F_2, ..., F_{n-1} – непрерывные функции распределения и $0 < F_i(a) < F_i(b) < 1$ ($1 \le i \le n-1$) для некоторых a и b ($-\infty < a < b < \infty$). Если индикатор ξ_n и вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ независимы при любом выборе функции распределения F_n, то существуют положительные константы $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ такие, что $F_k = F_1^{\alpha_k}$ $(2 \leq k \leq n-1)$, и компоненты вектора ξ также независимы.

Теорема I и лемма 3, полученные в предположении непрерывности исходных случайных величин, характеризуют ситуацию, когда индикаторы $\xi_1, \xi_2, \dots$ независимы. В данной работе мы будем исследовать условия независимости этих индикаторов в случае, когда величины $X_1, X_2, \dots$ имеют дискретное распределение.

2. Пусть теперь $X_1, X_2, \dots$ – независимые дискретные случайные величины. Будем считать, не умаляя общности, что они принимают целые значения и $p_{k,\ell} = P\{X_k = \ell\}$ $(k = 1,2,\dots;$ $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Через ℓ_k и r_k $(k = 1,2,\dots)$ обозначим соответственно нижние и верхние точки роста исходных случайных величин:

$$\ell_k = \inf\{m : p_{k,m} > 0\} \geq -\infty,$$

$$r_k = \sup\{m : p_{k,m} > 0\} \leq \infty \qquad (k = 1,2,\dots).$$

Нам потребуются также левосторонние интенсивности отказа

$$R_k(s) = P\{X_k = s\} / P\{X_k \leq s\} \qquad (k = 1,2,\dots).$$

Выясняется, что независимость вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ и индикатора ξ_n при произвольном выборе случайной величины X_n возможна лишь при следующих соотношениях между характеристиками ℓ_k и r_k:

$$-\infty = \ell_1 = \ell_2 = \dots = \ell_{n-1} < r_1 = r_2 = \dots = r_{n-1} = r \leq \infty \qquad (1)$$

или

$$-\infty \leq \ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_{n-1} \leq r_1 = r_2 = \dots = r_{n-1} = r \leq \infty \qquad (2)$$

(в предположении, что ξ имеет невырожденное распределение).

Сформулируем ряд теорем, доказательства которых будут приведены ниже.

ТЕОРЕМА 2. Пусть целочисленные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ независимы, а величины $X_1, \dots, X_{n-1}$ к тому же имеют невырожденное распределение и удовлетворяют условию (1). Для того, чтобы вектор ξ и индикатор ξ_n были независимыми при произвольном выборе распределения случайной величины X_n, необходимо и достаточно, чтобы для любых целых $s \leq r$ выполнялись равенства

$$R_k(s)=\beta_k P\{M_{k-1}=s\}/P\{M_{k-1}<s\} \quad (2\le k\le n-1), \tag{3}$$

где $\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ – положительные константы.

ПРИМЕР I. Условиям теоремы 2 удовлетворяет, в частности, последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ таких, что

$$P\{X_k=-m\}=(1-p_k)p_k^m \qquad (m=0,1,\ldots;\ k=1,\ldots,n-1).$$

В этом случае $\ell_1=\ell_2=\ldots=\ell_{n-1}=-\infty$, $r_1=r_2=\ldots=r_{n-1}=0$ и соотношение (3) выполняется с $\beta_k=(1-p_k)p_1\cdots p_{k-1}/(1-p_1\cdots p_{k-1})$ ($k=2,3,\ldots,n-1$).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Вероятности $c_k=P\{\xi_k=1\}$ можно выразить через коэффициенты β_k следующим образом:

$$c_k=\beta_k/(1+\beta_k).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из условия (I) следует, что

$$0<P\{\xi_k=1\}=P\{X_k>M_{k-1}\}<1 \quad (2\le k\le n-1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношение (3), связывающее распределения случайных величин X_k и M_{k-1}, можно переписать в виде

$$R_k(s)=\gamma_k\cdots\gamma_{\ell+1}R_\ell(s)/(1-(1+\gamma_{\ell+1}+\gamma_{\ell+1}\gamma_{\ell+2}+\ldots+\gamma_{\ell+1}\cdots\gamma_{k-1})R_\ell(s)) \tag{4}$$

$$(1\le\ell<k\le n-1)$$

и, в частности,

$$R_k(s)=\gamma_k R_{k-1}(s)/(1-R_{k-1}(s)) \qquad (k=2,3,\ldots) \tag{5}$$

и

$$R_k(s)=\gamma_2\cdots\gamma_k R_1(s)/(1-(1+\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\ldots+\gamma_2\cdots\gamma_{k-1})R_1(s)) \tag{6}$$

$$(k=2,3,\ldots),$$

где $\gamma_2=\beta_2$ и $\gamma_k=\beta_k(1+\beta_{k-1})/\beta_{k-1}$ ($k=3,4,\ldots$).

Следующая теорема формулируется для одинаково распределенных случайных величин.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ – независимые целочисленные случайные величины, имеющие одинаковое невырожденное распределение. Для того, чтобы при любом выборе X_n вектор ξ и случайная величина ξ_n были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы $\ell_1=-\infty$, $r_1<\infty$ и $P\{X_1=r_1-m_k\}=(1-p)p^k$

$k=0,1,\ldots$), где $0<p<1$ и $0=m_0<m_1<\ldots$ – произвольная последовательность целых чисел.

Теорему 2 дополняет следующий полезный результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть независимые случайные величины X_1, X_2, ..., X_{n-1} удовлетворяют условиям (1) и (3). Тогда компоненты вектора ξ являются независимыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В примере 1 и теореме 3 мы имеем дело с геометрически распределенными случайными величинами. Отметим также, что если случайные величины X_1, X_2, ..., X_{n-1} удовлетворяют условиям (1) и (3) и хотя бы одна из них имеет геометрическое распределение на множестве целых чисел $M=\{m_0, m_1, \ldots\}$, где $m_0>m_1>\ldots$, то и остальные из X-ов также геометрически распределены на множестве M (возможно, с другими параметрами). Действительно, если, скажем, случайная величина X_k имеет геометрическое распределение на множестве M, то функция $R_k(s)$ равна некоторой положительной константе, зависящей от параметра геометрического распределения, для всех $s\in M$ и равна нулю в остальных точках. Из равенства (6) вытекает тогда, что и $R_1(s)$, а следовательно, и остальные левосторонние интенсивности отказа $R_2(s)$, $R_3(s)$, ..., $R_{n-1}(s)$ обладают тем же свойством, характеризующим геометрическое распределение на множестве M.

3. В теоремах 2 и 4 мы требовали выполнения условия (1). Справедливы и аналогичные теоремы 2′ и 4′, которые отличаются соответственно от теорем 2 и 4 лишь тем, что условие (1) заменяется условием (2) и требуется, чтобы соотношение (3), связывающее распределения случайных величин X_k и M_{k-1}, выполнялось не для всех $s\leqslant r$, а только для $s\in[\ell_k, r_k]$.

Приведем два примера последовательностей X_1, X_2, ..., удовлетворяющих условиям теорем 2′ и 4′.

ПРИМЕР 2. Пусть Y_1, Y_2, ... – независимые случайные величины, имеющие одинаковое геометрическое распределение с параметром p $(0<p<1)$ на множестве $\{0,1,2,\ldots\}$, а $X_k=Y_k+k-1$ ($k=1,2,\ldots$). Для такой последовательности случайных величин X_1, X_2, ... $\ell_k=k-1$, $r_k=\infty$ и справедливы при $k=2,3,\ldots$ равенства

$$R_k(s)=\frac{1}{p}\cdot\frac{P\{X_{k-1}=s\}}{P\{X_{k-1}<s\}}=\frac{1}{p}\cdot\frac{R_{k-1}(s)}{1-R_{k-1}(s)} \qquad (s\geqslant k-1),$$

т.е. соотношение (5) выполняется с $\gamma_k=1/p$. В этом случае $\beta_k=(1-p)/p(1-p^{k-1})$, $c_k=P\{\xi_k=1\}=(1-p)/(1-p^k)$

и

$$EN(n) = (1-p) \sum_{k=1}^{n} (1/(1-p^k)) .$$

ПРИМЕР 3. Пусть X_1, X_2, ... , X_n - независимые случайные величины, причем X_k имеет равномерное распределение на множестве $\{k, k+1, \ldots, n\}$ $(1 \leq k \leq n)$. Эта последовательность также удовлетворяет условию (5) с $\gamma_k = 1$. Следовательно, $\beta_k = \frac{1}{k-1}$ и $c_k = \frac{1}{k}$.

4. Интересно сравнить распределения из теорем I и 2. Функции распределения F_k из теоремы I связаны соотношением $F_k(x) = (F_1(x))^{\alpha_k}$, где α_2 , α_3 , ... - некоторые положительные константы. Если дополнительно предположить, что существуют плотности распределения f_1 , ..., f_{n-1} и ввести функции $S_k(x) = f_k(x)/F_k(x)$, то они будут связаны соотношением

$$S_k(x) = \alpha_k S_1(x) \qquad (2 \leq k \leq n-1) .$$

Отношение $f_k(x)/(1-F_k(x))$ называют обычно интенсивностью отказа случайной величины X_k . Функцию $S_k(x)$ можно по аналогии назвать левосторонней интенсивностью отказа. Таким образом, в теореме I появляются распределения с пропорциональными интенсивностями отказа. Функции $R_k(s)$ из теоремы 2 также являются левосторонними интенсивностями отказа, но только для дискретных распределений.

Мы уже отмечали, что случайная величина ξ_n является индикатором события $A_n = \{X_n > M_{n-1}\}$ или индикатором события, состоящего в том, что X_n является верхней рекордной величиной. Традиционно в теории рекордов рассматриваются, как правило, верхние рекорды. Если же мы введем минимумы $m_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ и рассмотрим события $\{X_n < m_{n-1}\}$, эквивалентные появлению на n -ом месте в последовательности X_1 , X_2 , ... нижнего рекордного значения и индикаторы $\eta_n = \mathbb{1}\{X_n < m_{n-1}\}$, то теоремы I - 4 можно переформулировать соответствующим образом. В этом случае вместо последовательности функций распределения $F_k(x) = (F(x))^{\alpha_k}$ в теореме I будем иметь дело с функциями распределения вида $F_k(x) = 1 - (1 - F(x))^{\alpha_k}$, а в теоремах 2 и 4 вместо левосторонних интенсивностей отказа $R_k(s)$ появятся обычные интенсивности отказа $P\{X_k = s\}/P\{X_k \geq s\}$. Геометрические же распределения из теоремы 3, примеров I и 2 будут сосредоточены на множествах целых чисел, ограниченных слева, а не справа.

5. Докажем теорему 2. Начнем с проверки необходимости усло-

вия (3).

Независимость индикаторов ξ_k и ξ_n, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, приводит к соотношению

$$P\{\xi_k=1, \xi_n=1\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{n,m} F_{n-1}(m) \dots F_{k+1}(m) \sum_{t=-\infty}^{m-1} p_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{n,m} F_1(m) \dots F_{n-1}(m) \sum_{t=-\infty}^{\infty} p_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) =$$

$$= P\{\xi_n=1\} P\{\xi_k=1\}.$$

Обозначим $c_k = P\{\xi_k=1\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} p_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t)$. Вспомнив, что (7) должно быть справедливым при любом выборе распределения случайной величины X_n и, в частности, для вырожденного в произвольной целой точке s распределения, приходим к равенству

$$F_{n-1}(s) \dots F_{k+1}(s) \sum_{t=-\infty}^{s-1} p_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) = c_k F_1(s) \dots F_{n-1}(s). \tag{8}$$

Поскольку справедливо условие (I), нетрудно убедиться, что неравенства

$$0 < P\{\xi_n=1\} = P\{M_{n-1} < s\} = F_1(s) F_2(s) \dots F_{n-1}(s) < 1$$

имеют место для любого $s \leqslant \tau$. Тогда из (8) следует соотношение

$$\sum_{t=-\infty}^{s-1} p_{k,t} F_1(t) \dots F_{k-1}(t) = c_k F_1(s) \dots F_k(s), \tag{9}$$

справедливое при $s \leqslant \tau$.

Из равенств (9), взятых при s и $s+1$ вытекает, что

$$P\{X_k=s\} P\{M_{k-1} < s\} = c_k (P\{M_{k-1} \leqslant s\} P\{X_k \leqslant s\} - P\{M_{k-1} < s\} P\{X_k < s\} \tag{I0}$$

и

$$(1-c_k) P\{X_k=s\} P\{M_{k-1} < s\} = c_k P\{X_k \leqslant s\} P\{M_{k-1}=s\}. \tag{II}$$

Таким образом, для всех точек s таких, что $P\{X_k=s\} > 0$, справедливо соотношение

$$P\{X_k=s\} / P\{X_k \leqslant s\} = \beta_k P\{M_{k-1}=s\} / P\{M_{k-1} < s\}, \tag{I2}$$

где $\beta_k = c_k/(1-c_k) = P\{\xi_k=1\}/P\{\xi_k=0\}$. Из (II) следует также, что если $P\{M_{k-1}=s\}=0$ и $P\{M_{k-1}<s\}>0$, то $P\{X_k=s\}=0$.

Аналогичным образом можно получить равенство (3), если (I) заменить условием (2).

Докажем теперь, что условие (3) является достаточным для независимости вектора $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})$ и индикатора ξ_n . Одновременно будет приведено доказательство утверждения теоремы 4.

Итак, пусть выполняются условия (I) и (3). Проверим, что при произвольном выборе функции распределения F_n и любом наборе целых чисел k_1 , ... , k_j $(1\le k_1<k_2<\dots<k_j\le n,\ j=2,\dots,n)$ выполняется равенство

$$P\{\xi_{k_1}=1,\dots,\xi_{k_j}=1\} = \prod_{m=1}^{j} P\{\xi_{k_m}=1\} . \tag{13}$$

Действительно,

$$P\{\xi_{k_1}=1,\dots,\xi_{k_j}=1\} = P\{M_{k_1-1}<X_{k_1},\dots,M_{k_j-1}<X_{k_j}\} =$$

$$=\sum_{t_j=-\infty}^{\infty} P\{X_{k_j}=t_j\}P\{X_{k_j-1}<t_j\}\dots P\{X_{k_{j-1}+1}<t_j\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{t_{j-1}=-\infty}^{t_j-1} P\{X_{k_{j-1}}=t_{j-1}\}P\{X_{k_{j-1}-1}<t_{j-1}\}\dots P\{X_{k_{j-2}+1}<t_{j-1}\}\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\sum_{t_1=-\infty}^{t_2-1} P\{X_{k_1}=t_1\}P\{M_{k_1-1}<t_1\} . \tag{14}$$

Из равенства (9) следует, что последняя сумма в правой части (14) равна $c_{k_1}P\{M_{k_1}<t_2\}$ и тогда

$$P\{M_{k_1-1}<X_{k_1},\dots,M_{k_r-1}<X_{k_r}\} = c_{k_1}\sum_{t_r=-\infty}^{\infty} P\{X_{k_r}=t_r\}\cdot$$

$$\cdot P\{X_{k_r-1}<t_r\}\dots P\{X_{k_{r-1}+1}<t_r\}\dots\sum_{t_2=-\infty}^{t_3-1} P\{X_{k_2}=t_2\}P\{M_{k_2-1}<t_2\}. \tag{15}$$

Последовательно осуществляя переход от (14) к (15), получаем, что

$$P\{\xi_{k_1}=1,\dots,\xi_{k_j}=1\} = c_{k_1}\dots c_{k_j} = \prod_{m=1}^{j} P\{\xi_{k_m}=1\} .$$

Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 2 и заодно доказали теорему 4.

6. Возникает вопрос, насколько существенны условия (I) и (2). В приведенном доказательстве мы использовали неравенства $0 < c_k = P\{X_k > M_{k-1}\} < 1 \quad (2 \le k \le n-1)$ и $0 < P\{M_{n-1} < s\} < 1$ $(-\infty < s \le \gamma)$, вытекающие из условия (I). Аналогичные соотношения, использующие условие (2), требуются при выводе утверждений теорем $2'$ и $4'$. Заметим, что если при некотором $k\ (2 \le k \le n-1)$ индикатор ξ_k имеет вырожденное распределение, т.е. вероятность $P\{X_k > M_{k-1}\}$ равна нулю или единице, то условие (3) уже не обязано выполняться, хотя ξ_k и ξ_n будут независимыми при любом выборе X_k.

7. При доказательстве теорем 2 и 4 мы пользовались условием (3), но более удобным это условие становится, если его записать в виде (4), (5) или (6). Покажем, как, например, перейти от (3) к (6).

Фиксируем s и обозначим $T_\gamma = P\{X_\gamma \le s\}/P\{X_\gamma < s\}$, а вместо $R_k(s)$ будем для простоты писать R_k. Справедливы равенства

$$R_k = 1 - 1/T_k$$

и

$$\frac{P\{M_{k-1} = s\}}{P\{M_{k-1} < s\}} = \frac{P\{M_{k-1} \le s\}}{P\{M_{k-1} < s\}} - 1 = T_1 T_2 \ldots T_{k-1} - 1 \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Соотношение (3) перепишется в виде

$$1 - \frac{1}{T_k} = \beta_k\ (T_1 T_2 \ldots T_{k-1} - 1). \tag{16}$$

Из (16) получаем, что

$$\frac{(1+\beta_k)}{T_1 \ldots T_{k-1}} - \beta_k = \frac{1}{T_1 \ldots T_k}.$$

Вводя новые величины $Z_k = 1/T_1 T_2 \ldots T_k$, приходим к простым рекуррентным соотношениям

$$Z_k = (1+\beta_k) Z_{k-1} - \beta_k \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

позволяющим выразить Z_k через Z_1, а затем и получить равенства (4) - (6).

8. Покажем справедливость теоремы 3. Докажем вначале, что

$\ell_1 = -\infty$. Действительно, пусть $\ell_1 > -\infty$. Это означает, что $P\{X_1=\ell_1\} > 0$ и $P\{X_1<\ell_1\} = 0$. Поскольку X_1 имеет невырожденное распределение, существует такое $d > \ell_1$, что $P\{X_1=\ell_1+1\} = P\{X_1=\ell_1+2\} = \ldots = P\{X_1=d-1\} = 0$ и $P\{X_1=d\} > 0$. В качестве X_n возьмем вырожденную в точке d случайную величину. Тогда

$$P\{\xi_n=1\} = P\{X_1<d, \ldots, X_{n-1}<d\} = (P\{X_1=\ell_1\})^{n-1} > 0,$$

$$P\{\xi_2=1\} = P\{X_2>X_1\} \geq P\{X_2=d, X_1=\ell_1\} = P\{X_1=d\}P\{X_1=\ell_1\} > 0,$$

но

$$P\{\xi_2=1, \xi_n=1\} \leq P\{X_1<X_2<d\} = 0.$$

Получаем, что индикаторы ξ_2 и ξ_n при таком выборе распределения X_n зависимы. Следовательно, $\ell_1 = -\infty$.

Можем считать, не умаляя общности, что $P\{X_1=s\} > 0$ для любого целого $s \leq r$. Поскольку $R_k(s) = R_{k-1}(s)$, из (5) получаем, что

$$R_k(s) = \gamma_k R_k(s)/(1-R_k(s))$$

и

$$R_k(s) = 1-\gamma_k \qquad (k=2,3,\ldots), \qquad (17)$$

где $\gamma_k > 0$.

Из (17) и одинаковой распределенности исходных случайных величин следует, что $\gamma_k = \gamma$ не зависит от k, а $R_1(s) = 1-\gamma$ не зависит от s. Тогда

$$P\{X_1=s\} = (1-\gamma)P\{X_1\leq s\} = (1-\gamma)P\{X_1<s\} + (1-\gamma)P\{X_1=s\}$$

и

$$P\{X_1=s\} = \frac{1-\gamma}{\gamma}P\{X_1<s\} = \frac{1}{\gamma}P\{X_1=s-1\}.$$

Из последнего равенства, выбрав произвольное целое $d < r$, приходим к соотношениям

$$P\{X_1=d-s\} = \gamma^s P\{X_1=d\} \qquad (s=0,1,\ldots) \qquad (18)$$

и

$$P\{X_1=d+t\} = \gamma^{-t} P\{X_1=d\} \qquad (1\leq t\leq r-d). \qquad (19)$$

Из (18) и (19) следует, что

$$1=\sum_{s=-\infty}^{r} P\{X_1=s\}=P\{X_1=d\}\ \Big(\sum_{s=0}^{\infty}\gamma^s+\sum_{t=1}^{r-d}\gamma^{-t}\Big).$$

Видим теперь, что $\gamma<1$ и $r<\infty$. Таким образом, мы пришли к геометрическому распределению, сосредоточенному на множестве $\{r, r-1, \ldots\}$, где r – некоторое целое число. Если отказаться от допущения, что $P\{X_1=s\}>0$ для любого $s\leqslant r$, то получаем более широкий класс геометрических распределений, носители которых ограничены справа. Теорема 3 доказана в части необходимости. Достаточность утверждения теоремы 3 следует из теоремы 2.

Литература

1. Невзоров В.Б. Рекорды. – Теория вероятн. и ее примен. 1987, т.32, № 2, с.219-251.
2. Nevzorov V.B. Two characterizations using records. – Lect.Notes Math., 1986, v.1233, p.79-85.
3. Renyi A. On the extreme elements of observations. – In: Selected Papers of Alfred Renyi. V.3, Budapest: Akademiai Kiado, 1976, p.50-65.