

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Сальтелли, И. М. Соболев, Анализ чувствительности нелинейных математических моделей: численные опыты, *Матем. моделирование*, 1995, том 7, номер 11, 16–28

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

26 марта 2025 г., 07:41:35



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 7 номер 11 год 1995

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: ЧИСЛЕННЫЕ ОПЫТЫ

© *А. Сальтелли, И.М. Соболев*

Институт изучения окружающей среды
Объединенного центра исследований, Испра, Италия
Институт математического моделирования
Российской Академии Наук, Москва *

*Второй автор пользовался поддержкой РФФИ (грант 93-01-17383)

Показатели чувствительности, предложенные в [1], использованы для анализа чувствительности в трудной задаче, когда другие имеющиеся методы неприменимы. Успешно исследованы нелинейные и немонотонные модели, зависящие от четырех или восьми переменных.

SENSITIVITY ANALYSIS FOR NONLINEAR MATHEMATICAL MODELS: NUMERICAL EXPERIENCE

A. Saltelli, I.M. Sobol'

Environment Institute
of the Joint Research Centre, Ispra, Italy
Institute for Mathematical Modelling
of the Russian Academy of Sciences, Moscow

Sensitivity indices introduced in [1] were used for sensitivity analysis of a difficult problem where other available methods did not apply. Nonlinear and nonmonotonic models depending on four or eight variables were successfully investigated.

Введение

В статье [1] определены величины, названные глобальными показателями чувствительности (ПЧ) математической модели. Они позволяют предсказать влияние неточности входных данных модели на результат моделирования. ПЧ очень полезны при исследовании нелинейных моделей и, особенно, тогда, когда модель представляет собой "черный ящик" (например, компьютерную программу).

ПЧ по идее сходны с известным методом анализа чувствительности FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) [2-7]: в обоих методах вариация моделирующей функции представляется в форме суммы слагаемых различных размерностей. ПЧ связаны также с мерой важности (importance measure), обсуждавшейся в [8,9]. Модификация этой меры; предложенная в [10-12], совпадает

(даже по вычислительному алгоритму) с ПЧ первого порядка ($s=1$). Приложения ПЧ можно найти в [13, 14], а различные подходы к вычислению этих показателей обсуждаются в [15].

Обстоятельный обзор различных приемов анализа чувствительности (SA – Sensitivity Analysis) сделан в работе [16]. ПЧ имеют ряд преимуществ по сравнению с этими приемами. ПЧ сильнее локальных методов, основанных на оценках производных (например, [17, 18]), ибо содержат информацию о всей области изменения переменных. Они эффективнее приемов, использующих оценки корреляции и регрессии, так как позволяют исследовать нелинейные и немонотонные модели [12].

Для нелинейных задач существенна возможность оценивать ПЧ порядка $s>1$. Такие оценки содержат иногда даже качественную информацию. Например, если переменные x_i и x_j характеризуют наличие каких-то двух химических элементов, и показатель чувствительности S_{ij} заметно превосходит S_i и (или) S_j , то можно предположить, что важную роль играет некое химическое соединение, включающее оба эти элемента.

Для расчета ПЧ приходится вычислять интегралы высокой кратности. В [1] рекомендуется использовать методы Монте-Карло или более быстро сходящиеся методы квази-Монте-Карло [19]. Основная цель настоящей работы – показать, что такой подход сравнительно легко реализуем и дает достаточно надежные результаты при не слишком большой затрате времени. В качестве теста мы выбрали нелинейную и немонотонную функцию, зависящую от нескольких параметров, фиксируя которые можно регулировать роли различных переменных. Точные значения ПЧ для этой функции известны. В качестве квазислучайных точек мы использовали точки ЛП_T-последовательности [20, 21]. Программы для быстрого генерирования этих точек можно найти в [22–24].

В [1] рассматривалась задача: можно ли достаточно эффективно описать модель при помощи некоторого подмножества исходных переменных? Чаще, однако, встречается несколько иная постановка задачи: какие из переменных являются наиболее влиятельными? В настоящей работе мы затронем обе эти постановки.

Глобальные показатели чувствительности

Рассмотрим моделирующую функцию $f(x)$, определенную в n -мерном единичном кубе I^n , так что $x=(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, где

$$I^n = \{x | 0 \leq x_i \leq 1; i=1, 2, \dots, n\}.$$

Пусть $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n$ – произвольная группа различных индексов, $1 \leq s \leq n$. Обозначим через \sum сумму по всем таким группам:

$$\sum T_{i_1 \dots i_s} = \sum_{i=1}^n T_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} T_{ij} + \dots + T_{12 \dots n}$$

– всего $2^n - 1$ слагаемых. В [1] доказано, что любая интегрируемая функция $f(x)$ может быть единственным образом разложена на сумму разноразмерных слагаемых

$$f(x) = f_0 + \sum f_{i_1 \dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}). \quad (1)$$

При этом интегралы от каждой функции $f_{i_1 \dots i_s}$ по любому из "своих" переменных равны нулю:

$$\int_0^1 f_{i_1 \dots i_s} dx_{i_k} = 0 \quad \text{при } k=1, 2, \dots, s.$$

Очевидно, что

$$f_0 = \int_{I^n} f(x) dx.$$

Если квадрат функции $f(x)$ интегрируем, то интегрируемы квадраты всех $f_{i_1 \dots i_s}$. Пусть

$$D = \int_{I^n} f^2(x) dx - f_0^2, \quad D_{i_1 \dots i_s} = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_{i_1 \dots i_s}^2 dx_{i_1} \dots dx_{i_s}.$$

Возведя (1) в квадрат и проинтегрировав по I^n , получим равенство

$$D = \sum D_{i_1 \dots i_s}. \quad (2)$$

Показателями чувствительности порядка s называются числа

$$S_{i_1 \dots i_s} = D_{i_1 \dots i_s} / D.$$

Очевидно, $\sum S_{i_1 \dots i_s} = 1$.

Естественно называть величины $D_{i_1 \dots i_s}$ и D дисперсиями, ибо если считать точку x случайной и равномерно распределенной в I^n , то $f(x)$ и все разноразмерные слагаемые $f_{i_1 \dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ окажутся случайными величинами, а D и $D_{i_1 \dots i_s}$ — их дисперсиями. (Конечно, если предположить, что распределение x в I^n не равномерное и ввести плотность вероятностей $p(x) \neq 1$, то и дисперсии, и значения ПЧ окажутся другими).

Выберем произвольную группу переменных x_i, \dots, x_j и обозначим ее для краткости одной буквой:

$$y = (x_{i_1}, \dots, x_{i_s}).$$

Следуя [1,14], введем ПЧ группы, $S(i_1, \dots, i_s)$, который равен сумме всех ПЧ, индексы которых состоят только из i_1, \dots, i_s , и полный ПЧ группы, $S^{tot}(i_1, \dots, i_s)$, который равен сумме всех ПЧ, индексы которых содержат какие-нибудь из чисел i_1, \dots, i_s . Нетрудно показать, что оба вида показателей группы связаны между собой.

В самом деле, обозначим через z совокупность переменных, не вошедших в y (так что, $x=(y,z)$), и индексы этих переменных пусть будут j_1, \dots, j_{n-s} :

$$z = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-s}}).$$

Тогда из определений следует, что

$$S^{tot}(i_1, \dots, i_s) + S(j_1, \dots, j_{n-s}) = 1.$$

Пример. Пусть $n=4$ и фиксированы переменные x_1 и x_3 . Тогда

$$S(1,3) = S_1 + S_3 + S_{13}, \quad S(2,4) = S_2 + S_4 + S_{24},$$

$$S^{tot}(1,3) = S_1 + S_3 + S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_{23} + S_{34} +$$

$$+ S_{123} + S_{124} + S_{134} + S_{234} + S_{1234} = 1 - S(2,4).$$

Легко видеть, что всегда

$$0 \leq S(i_1, \dots, i_s) \leq S^{tot}(i_1, \dots, i_s) \leq 1.$$

Докажем, что в крайних случаях, когда можно сделать наиболее определенные выводы, эти показатели совпадают. Для этого предположим дополнительно, что $f(x)$ кусочно непрерывна. Тогда:

(А) Для того, чтобы $f(x)$ не зависела от переменных группы y , необходимо и достаточно, чтобы

$$S(i_1, \dots, i_s) = S^{tot}(i_1, \dots, i_s) = 0.$$

(В) Для того, чтобы $f(x)$ зависела только от переменных группы y , необходимо и достаточно, чтобы

$$S(i_1, \dots, i_s) = S^{tot}(i_1, \dots, i_s) = 1.$$

Для проверки этих утверждений достаточно заметить, что в (2) все слагаемые неотрицательны, и $D_{i_1 \dots i_s}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда $f_{i_1 \dots i_s} \equiv 0$.

Ясно, что в случае ПЧ, близких к 1, более информативен показатель $S(i_1, \dots, i_s)$, а в случае ПЧ, близких к нулю, более информативен показатель $S^{tot}(i_1, \dots, i_s)$.

З а м е ч а н и е. Если группа y состоит из одной переменной x_i , то, очевидно, $S(i) = S_i$, а $S^{tot}(i)$ равен сумме всех $S_{i_1 \dots i_s}$, у которых один из индексов равен i .

Алгоритмы расчета

Для расчета всех дисперсий в [1] построен метод Монте-Карло, не требующий явного нахождения членов разложения (1).

Во-первых, если считать точку $x = (x_1, \dots, x_n)$ случайной и равномерно распределенной в I^n , то

$$f_0 = \mathbf{M}f(x), \quad D = \mathbf{M}f^2(x) - f_0^2;$$

здесь и далее \mathbf{M} — символ математического ожидания.

Во-вторых, пусть $x=(y,z)$ и $\tilde{x}=(\tilde{y},\tilde{z})$ – две независимые случайные точки, равномерно распределенные в I^n . Рассмотрим случайную величину

$$\eta(i_1, \dots, i_s) = f(y,z) f(y,\tilde{z}) - f_0^2.$$

Ее математическое ожидание равно

$$\mathbf{M}\eta(i_1, \dots, i_s) = \mathbf{M}f(y,z) f(y,\tilde{z}) - f_0^2 = \mathbf{M}g^2(y) - f_0^2,$$

где

$$g(y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(y,z) dz = f_0 + \sum f_{k_1 \dots k_p}(x_{k_1}, \dots, x_{k_p})$$

– в сумме остались только такие слагаемые, у которых все индексы принадлежат группе y . Поэтому

$$\mathbf{M}g^2(y) = \int_0^1 \dots \int_0^1 g^2 dy = f_0^2 + \sum D_{k_1 \dots k_p} = f_0^2 + D(i_1, \dots, i_s),$$

где дисперсия группы $D(i_1, \dots, i_s)$ равна сумме всех дисперсий, индексы которых состоят только из i_1, \dots, i_s . Итак,

$$\mathbf{M}\eta(i_1, \dots, i_s) = D(i_1, \dots, i_s).$$

Как известно [25], любые математические ожидания могут вычисляться простейшим методом Монте-Карло. Поэтому при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f(y^{(m)}, z^{(m)}) \xrightarrow{P} f_0, \quad \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f^2(y^{(m)}, z^{(m)}) - f_0^2 \xrightarrow{P} D,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f(y^{(m)}, z^{(m)}) f(y^{(m)}, \tilde{z}^{(m)}) - f_0^2 \xrightarrow{P} D(i_1, \dots, i_s).$$

Если j_1, \dots, j_{n-s} – индексы, соответствующие группе переменных z , то вполне аналогично

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N f(y^{(m)}, z^{(m)}) f(\tilde{y}^{(m)}, z^{(m)}) - f_0^2 \xrightarrow{P} D(j_1, \dots, j_{n-s}).$$

Таким образом, для реализации испытания номер m нужны две n -мерные случайные точки $x^{(m)}$ и $\tilde{x}^{(m)}$. Мы вместо них использовали одну квазислучайную точку размерности $2n$.

После нахождения групповых ПЧ, $S(i_1, \dots, i_s) = D(i_1, \dots, i_s)/D$, в принципе, легко вычислить ПЧ любых порядков. Во-первых, $S_i = S(i)$. Затем S_{ij} определяются из равенств

$$S(i, j) = S_i + S_j + S_{ij}.$$

Потом находим S_{ijk} , и т.д. К сожалению, на этом этапе возможна потеря точности, и если ПЧ высоких порядков ($s > 1$) малы, то вычисляются они плохо. Впрочем, в тех случаях, когда они малы, их точные значения обычно никого не интересуют...

Напомним, что для того, чтобы избежать потери точности при вычитании f_0^2 , в [1] рекомендуется заменить функцию $f(x)$ функцией $f(x) - c$, где c – любая постоянная, близкая к f_0 .

Замечания о трудоемкости

Для того, чтобы по вышеприведенным формулам оценить все ПЧ, требуется рассчитать модель $2^n N$ раз. В задачах с большим количеством n переменных это сделать невозможно. Однако, чтобы оценить только ПЧ первого порядка, требуется рассчитать модель всего $N(n+1)$ раз. Наконец, если мы готовы ограничиться оценкой ПЧ только для одной группы переменных, то для оценки $S(i_1, \dots, i_s)$ потребуется всего $2N$ расчетов модели, а если добавить сюда и оценки $S^{tot}(i_1, \dots, i_s) = 1 - S(j_1, \dots, j_{n-s})$, то всего $3N$ расчетов.

В [12, 15] рассмотрена возможность вычисления $S(i_1, \dots, i_s)$ и $S^{tot}(i_1, \dots, i_s)$ с использованием ранговых статистик. Численные значения при этом сильно искажаются, но робастность выводов увеличивается.

Моделирующая функция

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(x_i), \tag{3}$$

где

$$\varphi_i(x) = (|4x-2| + a_i)/(1 + a_i),$$

а все параметры $a_i \geq 0$. Частный случай $f(x)$, когда все a_i равны нулю, использовался в качестве теста в [26] и [22].

Фиксируя различные значения a_i , можно регулировать роль переменной x_i в (3). В самом деле, легко видеть, что при $0 \leq x \leq 1$

$$1 - (1+a_i)^{-1} \leq \varphi_i(x) \leq 1 + (1+a_i)^{-1}.$$

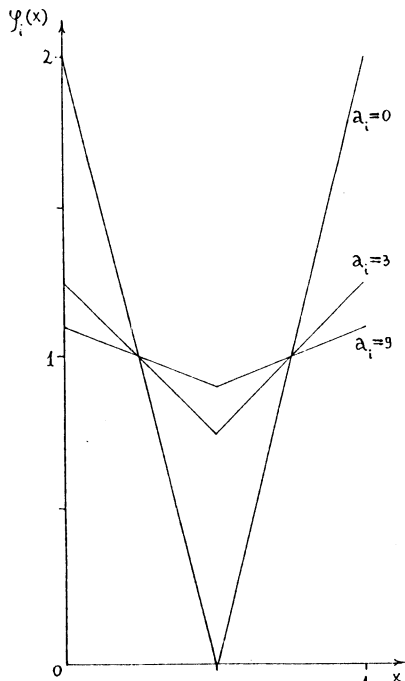


Рис.1

Если $a_i=0$, то $0 \leq \varphi_i(x) \leq 2$; соответствующую переменную x_i будем считать существенной. Если $a_i=3$, то $0.75 \leq \varphi_i(x) \leq 1.25$, и соответствующую переменную x_i в (3) будем считать второстепенной. Наконец, если $a_i=9$, то $0.9 \leq \varphi_i(x) \leq 1.1$, и соответствующую переменную x_i в (3) будем считать несущественной (рис.1). При $x \neq 1/2$ функции $\varphi_i(x)$ дифференцируемы:

$$\varphi_i'(x) = \pm 4(1+a_i)^{-1}.$$

Так что для существенных переменных $|\varphi_i'|=4$, для второстепенных переменных $|\varphi_i'|=1$, а для несущественных переменных $|\varphi_i'|=0.4$.

Очевидно, при любых $a_i \geq 0$ интеграл $\int_0^1 \varphi_i(x) dx = 1$, так что всегда

$$\int_{I^n} f(x) dx = 1.$$

Разложение функции (3) на разноразмерные слагаемые легко получить:

$$f = \prod_{i=1}^n \{1 + [\varphi_i(x_i) - 1]\} = 1 + \sum [\varphi_{i_1}(x_{i_1}) - 1] \dots [\varphi_{i_s}(x_{i_s}) - 1].$$

Отсюда вытекает, что дисперсии $D_{i_1 \dots i_s}$ равны произведениям одноиндексных дисперсий:

$$D_{i_1 \dots i_s} = D_{i_1} \dots D_{i_s},$$

а одноиндексные дисперсии нетрудно вычислить:

$$D_i = \int_0^1 [\varphi_i(x) - 1]^2 dx = \frac{1}{3}(1+a_i)^{-2}.$$

Существенным, второстепенным и несущественным переменным x_i отвечают дисперсии D_i , равные $1/3$, $1/48$ и $1/300$.

Легко видеть, что локальные методы оценки чувствительности в случае функции (3) неприменимы, ибо производные $\partial f / \partial x_i$ меняют знак внутри I^n и не существуют в центре. Более того, функции $\varphi_i(x)$ не монотонны, так что оценки, основанные на корреляционном или регрессионном анализе также обречены на неудачу; не поможет и использование ранговых статистик [12].

Пример 1: случай четырех переменных, $n=4$

Мы рассмотрели четыре варианта задачи:

- (1.1) $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$;
- (1.2) $a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_4 = 9$;
- (1.3) $a_1 = a_2 = 0, a_3 = a_4 = 9$;
- (1.4) $a_1 = 0, a_2 = a_3 = a_4 = 9$.

В Табл. 1 приведены все сосчитанные ПЧ, превосходящие 10^{-4} , и их точные значения. Прочерк означает, что результат расчета оказался отрицательным (потеря точности при вычитании). Конечно, для практических задач четыре десятичных знака не нужны, но мы хотели получить представление о точности методики. Из Табл. 1 видно, что при $N=2^{14}$ погрешности нигде не превосходят 0.002. Однако основные выводы о роли отдельных переменных можно сделать уже при $N=2^8$.

Таблица 1. Пример 1, $n=4$.

Результаты двух расчетов и точные значения ($N=\infty$).

Вариант (1.1)

N	$10^4 S_i$				$10^4 S_{ij}$						D
	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	
2^{10}	1503	1746	1414	1914	546	428	520	375	494	324	2.071
2^{14}	1529	1566	1552	1561	510	519	506	528	526	523	
∞	1543	1543	1543	1543	514	514	514	514	514	514	
		$10^4 S_{ijk}$									
		123	124	134	234						
2^{10}		52	287	136	219						2.150
2^{14}		157	168	166	172						
∞		171	171	171	171						

Вариант (1.2)

N	$10^4 S_i$				$10^4 S_{ij}$						D
	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	
2^{10}	2601	2616	2386	61	931	692	4	593	2	-	1.337
2^{14}	2416	2432	2424	26	807	808	7	809	9	9	
∞	2418	2418	2418	24	806	806	8	806	8	8	
		$10^4 S_{ijk}$									
		123	124	134	234						
2^{10}		98	19	6	5						1.376
2^{14}		263	2	2	3						
∞		269	3	3	3						

Вариант (1.3)

N	$10^4 S_i$				$10^4 S_{ij}$					$10^4 S_{ijk}$		D
	1	2	3	4	12	13	14	23	24	123	124	
2^{10}	4263	4275	48	70	1444	21	-	-	1	-	20	0.7776
2^{14}	4225	4226	43	43	1408	14	14	15	14	4	4	
∞	4221	4221	42	42	1407	14	14	14	14	5	5	

Вариант (1.4)

N	$10^4 S_i$				$10^4 S_{ij}$			D
	1	2	3	4	12	13	14	
2^{10}	9673	96	95	98	34	26	30	0.3446
2^{14}	9620	96	96	96	32	32	32	0.3466
∞	9614	96	96	96	32	32	32	0.3467

Можно ли в этом примере игнорировать ("заморозить" [1]) несущественные переменные? Вообще говоря, ответ на этот вопрос зависит от конкретных условий задачи. Однако вспомогательная количественная информация может быть получена путем оценки групповых ПЧ. В варианте (1.2): $S(1,2,3)=0.996$, $S^{tot}(1,2,3)=1-S_4=0.998$. В варианте (1.3): $S(1,2)=0.985$, $S^{tot}(1,2)=0.989$. Наконец, в варианте (1.4): $S(1)=0.961$, $S^{tot}(1)=0.971$. При таких значениях показателей чувствительности во многих практических задачах "заморозить" несущественные переменные можно.

Пример 2: случай восьми переменных, $n=8$

Мы рассмотрели три варианта задачи:

- (2.1) $a_1 = 0$, $a_2 = \dots = a_8 = 3$;
 (2.2) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \dots = a_8 = 3$;
 (2.3) $a_1 = \dots = a_6 = 3$; $a_7 = a_8 = 0$.

В Табл. 2 приведены все сосчитанные ПЧ первого и второго порядков для варианта (2.1), а также их точные значения. Из таблицы ясно, что x_1 является единственной ведущей переменной. Однако $S(1)=0.62$, $S^{tot}(1)=0.72$, и оба эти значения далеки от 1. Так что роль второстепенных переменных x_2, \dots, x_8 достаточно велика (более 30%).

В Табл. 3 приведены аналогичные результаты для варианта (2.2). Здесь также сразу видно, что x_1 и x_2 играют главную роль. Групповые ПЧ, соответствующие этим двум переменным, равны

$$S(1,2)=S_1+S_2+S_{12}=0.77, \quad S^{tot}(1,2)=0.87,$$

так что роль второстепенных переменных x_3, \dots, x_8 заметно меньше, чем в варианте (2.1).

Обратимся теперь к варианту (2.3), который теоретически идентичен варианту (2.2): изменена нумерация переменных. Вариант (2.3) был включен в программу эксперимента по методическим причинам. Дело в том, что используемые нами в расчетах многомерные ЛП₇-последовательности [23] не симметричны: проекции на плоскость (x_1, x_2) распределены несколько лучше, чем проекции на плоскость (x_7, x_8) . Можно заметить, что сходимость главных показателей в Табл. 4, которая соответствует варианту (2.3), несколько хуже, чем в Табл. 3; и прочерков в Табл. 4 больше. Однако на основные выводы это не влияет.

Таблица 4. Пример 2, $n=8$. Вариант (2.3).
Результаты расчета и точные значения

N	$10^3 S_i$								D						
	1	2	3	4	5	6	7	8							
2^{12}	20	21	20	20	20	20	338	332	0.995						
∞	21	21	21	21	21	21	329	329	1.012						
N	$10^3 S_{i,j}$														
	17	18	27	28	37	38	47	48	57	58	67	68	78		
	2^{12}	7	8	7	7	4	10	4	11	5	10	7	7	105	
∞	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	110		
N	$10^4 S_{i,j}$														
	12	13	14	15	16	23	24	25	26	34	35	36	45	46	56
	2^{12}	1	2	3	3	-	6	7	-	-	-	7	-	5	3
∞	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Об оценке погрешностей

В методах квази-Монте-Карло обычно рекомендуется следить за установлением результатов при удвоении количества испытаний N . Для сравнения рекомендуется также оценивать вероятные ошибки r_N соответствующего метода Монте-Карло [25].

В наших экспериментах r_N оценивались по выборкам, хотя для функции (3) это может быть сделано и аналитически. В самом деле, в наших примерах дисперсия случайной величины

$$\eta(i_1, \dots, i_s) = f(y, z)f(y, \tilde{z}) - 1$$

равна

$$D\eta(i_1, \dots, i_s) = (1+D)^2 C_{i_1} \dots C_{i_s} - [1 + D(i_1, \dots, i_s)]^2,$$

где величины C_i легко вычисляются:

$$C_i = (1+D_i)^{-2} \int_0^1 \varphi_i^4(x) dx.$$

Табл. 5 иллюстрирует скорость сходимости некоторых групповых ПЧ при росте N . Мы приводим значения, полученные при расчете "худшего" варианта (2.3). В графе δ_N помещены абсолютные ошибки сосчитанных значений $S(i_1, \dots, i_s)$, а в графе r_N - вероятные ошибки метода Монте-Карло:

$$r_N = 0.6745 [D\eta(i_1, \dots, i_s)/N]^{1/2} D^{-1}.$$

Легко видеть, что во всех случаях $\delta_N \ll r_N$.

Таблица 5. Сходимость результатов при увеличении количества испытаний N .
 (Пример 2, $n=8$. Вариант (2.3); все величины умножены на 10^3).
 δ_N — абсолютная погрешность, r_N — вероятная ошибка.

N	s_8	δ_N	r_N	s_5	δ_N	r_N	$s(7,8)$	δ_N	r_N	$s(2,7)$	δ_N	r_N
2^9	347	18	69	22	1	54	822	53	93	382	25	72
2^{10}	338	9	49	23	2	38	795	26	66	377	20	51
2^{11}	332	3	35	18	3	27	782	13	46	368	11	36
2^{12}	332	3	24	20	1	19	777	8	33	366	9	25
2^{13}	328	1	17	21	0	14	772	3	23	362	5	18
∞	329			21			769			357		

Замечания

Представление (1) построено в [27] с помощью разложения $f(x)$ в кратный ряд Фурье-Хаара. Однако там же (стр.133) указано, что можно использовать любую ортогональную систему, включающую функцию, равную постоянной. В [28] представление (1) использовано для анализа структуры $f(x)$ и получена формула (2). Общая теорема о представлении (1) доказана в [1].

В [29] для оценки влияния x_i , взаимодействия x_i с x_j и взаимодействий высоких порядков предлагается использовать условные средние исследуемой функции $\mu_i(x_i)$, $\mu_{ij}(x_i, x_j), \dots$ (стр.418), которые совпадают с $f_i(x_i)$, $f_{ij}(x_i, x_j), \dots$ в разложении (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.М. Соболев Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // Матем. моделирование, 1990, т. 2, № 1, с. 112-118.
2. R.I. Cukier, C.M. Fortuin, K.E. Schuler, A.G. Petschek, J.K. Schaibly. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. I. Theory // J. Chemical Phys., 1973, v. 59, № 8, p. 3873-3878.
3. R.I. Cukier, H.B. Levine, K.E. Schuler. Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems // J. Comput. Phys., 1978, v. 26, № 1, p. 1-42.
4. J.K. Schaibly, K.E. Schuler. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. II, Applications // J. Chemical Phys., 1973, v. 59, № 8, p. 3879-3888.
5. G.J. McRae, J.W. Tilden, J.H. Seinfeld. Global sensitivity analysis - a computational implementation of the Fourier amplitude sensitivity test (FAST) // Computers Chem. Eng., 1982, v. 6, p. 15-25.
6. D. Liepman, G. Stephanopoulos. Development and global sensitivity analysis of a closed ecosystem model // Ecological Modelling, 1985, v. 30, p. 13-47.
7. В.И. Абрамов, А.П. Карташев, А.С. Рошаль. Об одном методе нелинейного анализа чувствительности математических моделей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1986, т. 26, № 3, с. 469-474.
8. S.C. Hora, R.L. Iman. A Comparison of Maximum (Bounding and Bayesian) Monte Carlo for fault tree uncertainty analysis: Report Sandia Nat. Labor., 1989, SAND 85-2839.
9. R.L. Iman, S.C. Hora. A robust measure of uncertainty importance for use in fault tree system analysis // Risk Analysis, 1990, v. 10, № 3, P. 401-406.
10. T. Ishigami, T. Homma. An importance quantification technique in uncertainty analysis: Report Japan Atomic Energy Res. Inst., 1989, JAERI-M 89-111.

11. *T. Ishigami, T. Homma*. An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models: Proc. First Internat. Sympos. on Uncertainty Modelling and Analysis, Univ. Maryland, USA, 1990, p. 398-403.
12. *A. Saltelli, T.H. Andres, T. Homma*. Sensitivity analysis of model output: An investigation of new techniques // Computational Statistics and Data Analysis, 1993, v. 15, p. 211-238.
13. *A. Saltelli, J. Hjorth*. Uncertainty and sensitivity analysis of dimethylsulphide (DMS) oxidation kinetics // J. Atmospheric Chemistry, 1994 (to appear).
14. *T. Homma, A. Saltelli*. Importance measures in global sensitivity analysis of model output // Computational Statistics and Data Analysis, 1994 (to appear).
15. *T. Homma, A. Saltelli, T.H. Andres*. A new measure of importance in global sensitivity analysis of model output: Proc. 6th Internat. Conf. on Physics Computing, Lugano, Switzerland, 1994, p. 511-514.
16. *J.C. Helton*. Uncertainty and sensitivity analysis techniques for use in performance assessment for radioactive waste disposal // Reliability Engng and System Safety, 1993, v. 42, p. 327-367.
17. *D.G. Cacuci*. Sensitivity theory for nonlinear systems, Parts I and II // J. Math. Phys., 1981, v. 22, № 12, p. 2794-2802, 2803-2812.
18. *J.-T. Hwang, E.P. Dougherty, S. Rabitz, H. Rabitz*. The Green's function method of sensitivity analysis in chemical kinetics // J. Chemical Phys., 1978, v. 69, № 11, p. 5180-5191.
19. *I.M. Sobol'*. Quasi-Monte Carlo Methods // Progress in Nuclear Energy, 1990, Vol. 24, N 1-3, P. 55-61.
20. *И.М. Соболев*. О распределении точек в кубе и приближенном вычислении интегралов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1967, т. 7, № 4, с. 784-802.
21. *И.М. Соболев*. Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1976, т. 16, № 5, с. 1332-1337.
22. *P. Bratley, B.L. Fox*. Implementing Sobol's quasirandom sequence generator // ACM Trans. on Math. Software, 1988, v. 14, № 1, p. 88-100.
23. *I.M. Sobol', V.I. Turchaninov, Yu.L. Levitan, B.V. Shukhman*. Quasirandom Sequence Generators, - Moscow, Keldysh Inst. of Applied Maths, 1992, 24 pp.
24. *B. Shukhman*. Generation of quasi-random (LP_r) vectors for parallel computation // Computer Phys. Communs, 1994, v. 78, p. 279-286.
25. *I.M. Sobol'*, A Primer for the Monte Carlo Method, - Boca Raton-London- Tokyo: CRC Press, 1994, 107 pp.
26. *P.J. Davis, P. Rabinovitz*. Methods of Numerical Integration, - N.Y.: Academic Press, 1984.
27. *И.М. Соболев*. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, - М.: Наука, 1969.
28. *В. Шальтянис, А. Варнайте*. Вопросы структуры многоэкстремальных задач оптимизации // Теория оптимальных решений, Вильнюс, Вып. 2, 1976, с. 67-77.
29. *J. Sacks, W.J. Welch, T.J. Mitchell, H.P. Wynn*. Design and analysis of computer experiments // Statistical Science, 1989, v. 4, № 4, p. 409-435.

Поступила в редакцию
09.08.94.