



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Cotsiolis, A. P. Oskolkov, On the limit behaviour and the attractor for the equations of motion of Oldroyd fluids, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 152, 67–71

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

January 14, 2025, 20:26:52



О ПРЕДЕЛЬНЫХ РЕЖИМАХ И АТТРАКТОРЕ ДЛЯ
УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ ОЛДРОЙТА

И. О.А.Ладженская предложила в [1] брать в качестве основного объекта изучения теории турбулентности для эволюционных систем с диссипацией, и в том числе для систем, описывающих течения вязких несжимаемых жидкостей, аттрактор системы $\mathcal{M} = \bigcap_{t \geq 0} V_t(H_0)$, где V_t - эволюционный оператор задачи, H_0 - фазовое пространство. В [1] она подробно изучила свойства \mathcal{M} для двумерной системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \nu \Delta v + \text{grad} p = f(x), \quad \text{div} v = 0, \quad x \in \Omega \in E^2, \quad v|_{\partial \Omega} = 0, \quad t \geq 0, \quad (I)$$

в частности, доказала компактность \mathcal{M} , изучила свойства динамической системы, порожденной задачей (I), и доказала "конечность динамики V_t " задачи (I) на \mathcal{M} . В [2] на основе установленных в [1] свойств эволюционного оператора V_t задачи (I) О.А.Ладженская доказала конечность хаусдорфовой размерности аттрактора \mathcal{M} .

О.А.Ладженская указала в [2], что доказанные в [1], [2] для задачи (I) результаты справедливы и для многих других задач диссипативного типа, к числу которых относятся определенные классы абстрактных нелинейных параболических уравнений, например, предложенные О.А.Ладженской модификации трехмерных уравнений Навье-Стокса [3], [4]. В настоящей заметке указывается еще один пример такого уравнения, которое порождается двумерной начально-краевой задачей для уравнения движения жидкостей Олдройта.

2. Жидкостью Олдройта называется линейная вязкоупругая жидкость, определяющее уравнение которой имеет вид [5]:

$$\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\nu D + 2\kappa \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \lambda, \nu, \kappa > 0, \quad \nu - \kappa \lambda^{-1} > 0. \quad (2)$$

А.П.Осколков показал [6], что движение жидкости Олдройта может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_k \frac{\partial v}{\partial x_k} - \mu \Delta v - \alpha u + \text{grad} p = f, \quad v = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \lambda^{-1} u, \quad \text{div} v = 0, \quad (3)$$

$$\mu = \kappa \lambda^{-1}, \quad \alpha = \lambda (\nu - \kappa \lambda^{-1})^{-1}.$$

Систему (3) будем решать в ограниченной области $\Omega \in E^2$ при $f \equiv f(x)$ и начально-краевых условиях

$$v|_{t=0} = v_0(x), \quad u|_{t=0} = 0, \quad x \in \Omega; \quad v|_{\partial Q_T} = u|_{\partial Q_T} = 0. \quad (4)$$

Обозначим через P ортопроектор из $L_2(\Omega)$ на $J(\Omega)$ и положим $P\Delta = \tilde{\Delta}$, $P(v_x v_{x_k}) \equiv A(v)$, $\vec{\Phi} = \{v, u\}$, $\vec{F} = \{f, 0\}$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\mu \tilde{\Delta} + A & -\tilde{\Delta} \\ -\alpha^{-1} & \lambda^{-1} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тогда система (3) запишется в виде операторного уравнения

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \Lambda \vec{\Phi} = \vec{F}(x), \quad (6)$$

которое решается в $Q_\infty = \Omega \times (0, \infty)$ при начально-краевых условиях

$$\vec{\Phi}|_{t=0} = \{v_0(x), 0\}, \quad \vec{\Phi}|_{\partial Q_\infty} = 0. \quad (7)$$

Положим $E_0(\Omega) = J(\Omega) \times H(\Omega)$, $\|\vec{\Phi}\|_{E_0}^2 = [\|v\|_{2,\Omega}^2 + \alpha \|u_x\|_{2,\Omega}^2]$. Из энергетического равенства

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{\Phi}\|_{E_0}^2 + \mu \|v_x\|_{2,\Omega}^2 + \alpha \lambda^{-1} \|u_x\|_{2,\Omega}^2 = (f, v)_{2,\Omega}, \quad t \geq 0 \quad (8)$$

для любого решения задачи (6), (7) следует оценка (ср. [2]):

$$\|\vec{\Phi}\|_{E_0} \leq R_0 = (\mu \lambda_1)^{-1} \|f\|_{2,\Omega}, \quad (9)$$

где λ_1 - первое собственное число спектральной задачи

$$-\Delta \psi + \nabla q = \lambda \psi, \quad \text{div } \psi = 0, \quad x \in \Omega; \quad \psi|_{\partial \Omega} = 0. \quad (10)$$

3. Возьмем в качестве фазового пространства задачи (6), (7) пространство $E_0(\Omega)$. На нем, как показал А.П.Осколков [6], определена полугруппа ограниченных непрерывных операторов V_t , $t \geq 0$, однозначно определяющих слабое решение (решение в смысле Э.Хопфа [4]) $\vec{\Phi}(\cdot, t) \equiv \vec{\Phi}(t)$ задачи (6), (7) по его значению при $t=0$: $\vec{\Phi}(t) \equiv V_t(\vec{\Phi}(0))$. Аттрактором задачи (6), (7) называется множество $\mathcal{M} \equiv \bigcap_{t \geq 0} V_t(K_{R_0})$, где $K_{R_0} = \{\vec{\Phi} : \vec{\Phi} \in E_0(\Omega), \|\vec{\Phi}\|_{E_0} \leq R_0\}$. В [6] - [8] доказано, что \mathcal{M} является компактом в $E_0(\Omega)$, лежащим в K_{R_0} , и что нормы его элементов $\vec{\Psi}(\cdot) = \{w(\cdot), s(\cdot)\}$ в пространствах $E_\ell(\Omega) \equiv (W_2^\ell(\Omega) \cap H(\Omega)) \times (W_2^{\ell+1}(\Omega) \cap H(\Omega))$, $\ell \geq 1$, равномерно ограни-

чены числами C_0 , если только $f(x) \in W_2^{l-1}(\Omega) \cap \dot{J}(\Omega)$, а $\partial\Omega \in C^{l+1}$. В 8 доказано, далее, что на множестве \mathcal{M} полугруппа $V_t, t \geq 0$, продолжается до группы $V_t, -\infty < t < \infty$, ограниченных непрерывных операторов (эта группа $V_t, -\infty < t < \infty$, в совокупности с \mathcal{M} и есть динамическая система, порождаемая задачей (6), (7)), и что множество \mathcal{M} состоит из тех и только тех элементов ψ из $K_{R_0} \in E_0(\Omega)$, для которых задача (6), (7) имеет решение $\vec{\Phi}(t)$ при $\forall t \in (-\infty, \infty)$, равное $\vec{\Psi}$ при $t=0$.

Пусть ξ^n - n -мерное подпространство пространства $\dot{J}(\Omega)$, натянутое на первые n собственных функций спектральной задачи (10), P_n - ортопроектор из $\dot{J}(\Omega)$ на ξ^n , $Q_n = I \ominus P_n$. Пусть, далее $\Phi(t) \equiv \vec{\Phi}(t) - \vec{\tilde{\Phi}}(t) \equiv \{w, \tilde{w}\}$ - разность двух произвольных решений $\vec{\Phi} \equiv \{v, u\}$ и $\vec{\tilde{\Phi}} \equiv \{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ задачи (6), (7) из $\mathcal{M}, -\infty < t < \infty$, $\vec{\Phi}''(t) \equiv \vec{\Phi}''(t) - \vec{\tilde{\Phi}}''(t) \equiv \{w'', \tilde{w}''\} \equiv \{Q_n w, Q_n \tilde{w}\}$. Для $\vec{\Phi}(t)$ и $\vec{\tilde{\Phi}}(t)$ справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (1.7) и (1.8) из [2]:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{\Phi}\|_{E_0}^2 + \mu \|w_x\|_{2,\Omega}^2 + \alpha \lambda^{-1} \|\hat{w}_x\|_{2,\Omega}^2 = \int w_k \tilde{v} w_{x_k} dx, \quad (II)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{\Phi}''\|_{E_0}^2 + \mu \|w''_x\|_{2,\Omega}^2 + \alpha \lambda^{-1} \|\hat{w}''_x\|_{2,\Omega}^2 = \int (\tilde{v}_k w + w_k \tilde{v}) w''_{x_k} dx. \quad (I2)$$

Повторяя почти дословно рассуждения, с помощью которых О.А. Ладженская доказывает в [1], [2] "конечномерность динамики V_t на \mathcal{M} " и конечность хаусдорфовой размерности \mathcal{M} для задачи (1), мы доказываем с помощью соотношений (II), (I2) и ограниченности аттрактора \mathcal{M} в пространствах $E_\ell(\Omega), \ell \geq 1$ следующие результаты для задачи (6), (7).

ТЕОРЕМА 1. Если для двух решений $\vec{\Phi}(t) \equiv \{v, u\}$ и $\vec{\tilde{\Phi}}(t) \equiv \{\tilde{v}, \tilde{u}\}$ из \mathcal{M} задачи (6), (7) при достаточно большом $n \equiv n(\mu, \Omega, \tilde{v})$ (см. [1], § 3) $P_n v(t) = P_n \tilde{v}(t)$ и $P_n u(t) = P_n \tilde{u}(t), -\infty < t < \infty$, то $\vec{\Phi}(t) \equiv \vec{\tilde{\Phi}}(t), -\infty < t < \infty$.

Эта теорема доказывает "конечномерность динамики V_t задачи (6), (7) на \mathcal{M} ".

ТЕОРЕМА 2. Для $\forall \vec{\Psi}, \vec{\tilde{\Psi}} \in \mathcal{M}$ и $\forall t \in (-\infty, \infty)$ справедливы неравенства:

$$\|V_t(\vec{\Psi}) - V_t(\vec{\tilde{\Psi}})\|_{E_0} \leq \ell \|\vec{\Psi} - \vec{\tilde{\Psi}}\|_{E_0}, \quad \ell \equiv \ell(\mu, t), \quad (I3)$$

$$\|Q_n V_t(\vec{\Psi}) - Q_n V_t(\vec{\tilde{\Psi}})\|_{E_0} \leq \delta \|\vec{\Psi} - \vec{\tilde{\Psi}}\|_{E_0}, \quad 0 < \delta \equiv \delta(\mu, n, t) < 1, \quad n = n(\mu, \Omega, t) \gg 1, \quad (I4)$$

из которых следует конечность хаусдорфовой размерности d аттрактора \mathcal{M} и оценка ([2], теорема 1.1): $d \leq n \ln \left(\frac{2\gamma^2 \ell^2}{1-\delta^2} \right) \ln^{-1} \left(\frac{2}{1+\delta^2} \right)$.

Отметим, что при доказательстве теорем 1 и 2 и особенно при построении в [8] динамической системы $(M; V_t, -\infty < t < \infty)$ формулировка начально-краевой задачи (3), (4) в операторной форме (6), (7) оказывается очень удобной.

Авторы выражают благодарность О.А.Ладыженской за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. Ладыженская О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 6. Зап. научн.семина.ЛОМИ, 1972, т.27, с.91-114.
2. Ладыженская О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1982, т.115, с.137-155.
3. Ладыженская О.А. О предельных режимах для модифицированных уравнений Навье-Стокса в трехмерном пространстве. - В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 11. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1979, т.84, с.131-146.
4. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязких несжимаемых жидкостей, 2-ое изд. М., 1970.
5. Олдройт Дж.Г. Неньютоновские течения жидкостей и твердых тел. - В сб.: Ревология, теория и приложения. М., 1962, с.262-310.
6. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореферат докт.дисс., Л., 1983, 32 с.
7. Котсиолис А.А., Осколков А.П. О разрешимости основной начально-краевой задачи для уравнений движения жидкостей Олдройта на $(0, \infty)$ и поведении ее решений при $t \rightarrow +\infty$. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 6. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1986, т.150, с.112-117.
8. Котсиолис А.А., Осколков А.П. О динамической системе, порождаемой уравнениями движения жидкостей Олдройта. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VIII. Зап.научн.семина.ЛОМИ, 1986, т.155, с.119-125.

Cotsiolis A.A., Oskolkov A.P. On the limit behaviour and the attractor for the equations of motion of Oldroyd fluids.

The attractor \mathcal{M} for the two-dimensional initial-value problem for the equations of motion of Oldroyd fluids is constructed. It is proved that the Hausdorff dimension of \mathcal{M} is finite, and the corresponding dynamical problem on \mathcal{M} is finite dimensional.