

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

D. A. Bredikhin, On varieties of partially ordered semigroups with operations of cylindrification,
Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 2009, Volume 9, Issue 3, 3–7

<https://www.mathnet.ru/eng/isu52>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.84

April 20, 2025, 00:39:06





МАТЕМАТИКА

УДК 519.4

О МНОГООБРАЗИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП С ОПЕРАЦИЯМИ ЦИЛИНДРОФИКАЦИИ

Д.А. Бредихин

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: bredikhin@mail.ru

В работе находится конечный базис тождеств многообразий упорядоченных алгебр, порожденных упорядоченными полугруппами бинарных отношений с операциями цилиндрификации.

Ключевые слова: многообразия, алгебры отношений, полугруппы, операции цилиндрификации.

On Varieties of Partially Ordered Semigroups with Operations of Cylindrification

D.A. Bredikhin

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: bredikhin@mail.ru

The finite basis of identities of the varieties of the ordered algebras generated by partially ordered semigroups of binary relations with cylindrifications operations is found in this paper.

Key words: varieties, algebras of relations, semigroups, operations of cylindrification.

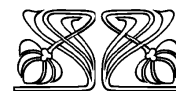
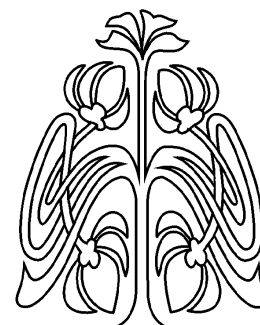
В творческом наследии В.В. Вагнера большое место занимают исследования, посвященные теории бинарных отношений [1]. Множество бинарных отношений Φ , замкнутое относительно некоторой совокупности Ω операций над ними, образует алгебру (Φ, Ω) , называемую алгеброй отношений. Всякая такая алгебра может быть рассмотрена как упорядоченная отношением теоретико-множественного включения \subset . Основы абстрактно-алгебраического подхода к изучению алгебр отношений были заложены в работах А. Тарского [2]. Одной из основных проблем в теории алгебр отношений традиционно является изучение их свойств, выраженных на языке тождеств [2–9].

Для заданного множества Ω операций над бинарными отношениями обозначим через $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$) класс алгебр (упорядоченных алгебр) отношений с операциями из Ω . Пусть $Var\{\Omega\}$ ($Var\{\Omega, \subset\}$) — многообразие, порожденное классом $R\{\Omega\}$ ($R\{\Omega, \subset\}$).

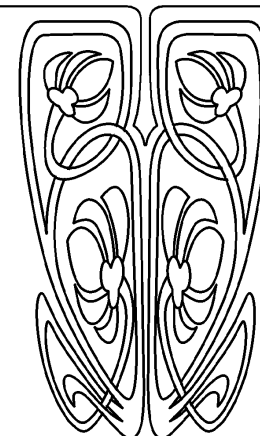
Нами будут рассмотрены операции умножения отношений \circ , объединения \cup и играющие важную роль в алгебраической логике [3] операции цилиндрификации ∇_1 и ∇_2 . Для всякого бинарного отношения $\rho \subset X \times X$ положим $\nabla_1(\rho) = pr_1\rho \times X$, $\nabla_2(\rho) = X \times pr_2\rho$, где $pr_1\rho = \{x : (\exists y)(x, y) \in \rho\}$ и $pr_2\rho = \{y : (\exists x)(x, y) \in \rho\}$ — первая и вторая проекции отношения ρ соответственно.

В работе [9] был найден конечный базис тождеств для многообразий $Var\{\circ, \nabla_1\}$ и $Var\{\circ, \nabla_2\}$. Соответствующие результаты формулируются в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим тождествам:



НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ





- 1) $(xy)z = x(yz)$, 2) $(x^*)^* = x^*$, 3) $(x^*)^2 = x^*$, 4) $(xy)^* = xy^*$,
 5) $xy^*x^* = xy^*$, 6) $x^*y^*z^* = x^*z^*y^*$, 7) $x^*y^*zy = x^*zy$.

Теорема 2. Алгебра $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)–3) и тождествам

- 4') $(xy)^* = x^*y$ (4'), 5') $x^*y^*x = y^*x$, 6') $x^*y^*z^* = y^*x^*z^*$, 7') $xyx^*z^* = xyz^*$.

Под упорядоченной алгеброй мы понимаем алгебру с заданным на ней отношением порядка \leq , согласованным с операциями этой алгебры. Основными результатами работы являются следующие теоремы, в которых находятся базисы тождеств многообразий $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ и $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$.

Теорема 3. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_1, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)–7) и тождествам

- 8) $x \leq x^*$, 9) $x \leq x^*x$, 10) $x^*y \leq x^*$.

Теорема 4. Упорядоченная алгебра $(A, \cdot, *, \leq)$ типа $(2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \nabla_2, \subset\}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам 1)–3), 4')–7'), 8) и тождествам

- 9') $x \leq xx^*$, 10') $xy^* \leq y^*$.

Следствие 1. Алгебра $(A, \cdot, +, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \nabla\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +)$ — полурешетка, выполняются тождества 1)–7) и тождества

- 11) $x + x^* = x^*$, 12) $x + x^*x = x^*x$, 13) $x^*y + x^* = x^*$,
 14) $(x + y)z = xz + yz$, 15) $x(y + z) = xy + xz$, 16) $(x + y)^* = x^* + y^*$.

Следствие 2. Алгебра $(A, \cdot, +, *)$ типа $(2, 2, 1)$ принадлежит многообразию $Var\{\circ, \cup, \nabla_2\}$ тогда и только тогда, когда $(A, +)$ — полурешетка, выполняются тождества 1)–3), 4')–7'), 11), 14)–16) и тождества

- 12') $x + xx^* = xx^*$, 13') $xy^* + y^* = y^*$.

Докажем теорему 3 (теорема 4 доказывается аналогично).

Доказательство. Разобьем доказательство на ряд последовательных шагов.

Шаг 1. Доказательство теоремы основывается на результатах работ [5, 7]. Приведем ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем изложении.

Пусть $Rel(U)$ — множество всех бинарных отношений на U . Всякая формула $\varphi(z_0, z_1, r_1, \dots, r_m)$ логики предикатов первого порядка с равенством, содержащая m бинарных предикатных символов r_1, \dots, r_m и две свободные индивидуальные переменные z_0, z_1 , определяет m -арную операцию F_φ на $Rel(U)$:

$$F_\varphi(R_1, \dots, R_m) = \{(x, y) \in U \times U : \varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)\},$$

где $\varphi(x, y, R_1, \dots, R_m)$ означает, что формула φ выполняется, если z_0, z_1 интерпретируются как x, y и r_1, \dots, r_m интерпретируются как отношения R_1, \dots, R_m из $Rel(U)$.

Операция над бинарными отношениями называется *примитивно-позитивной* [10] (в другой терминологии — *диофантовой* [7]), если она может быть определена формулой, содержащей в своей записи лишь кванторы существования и операцию конъюнкции. Примитивно-позитивные операции могут быть описаны с помощью графов [10].

Обозначим через N множество всех натуральных чисел. Помеченным графом назовем пару $G = (V, E)$, где $V = V(G)$ — конечное множество, называемое множеством вершин, и $E = E(G) \subset V \times N \times V$ — тернарное отношение. Тройку $(u, k, v) \in E$ будем называть ребром графа, идущим из вершины u в вершину v , помеченным меткой k , и графически изображать следующим образом: $u \xrightarrow{k} v$.

Под двухполосником мы понимаем помеченный граф с парой выделенных вершин, т. е. систему вида $G = (V, E, in, out)$, где (V, E) — помеченный граф; $in = in(G)$ и $out = out(G)$ — две выделенные вершины (необязательно различные), называемые входом и выходом двухполосника соответственно.



Понятие изоморфизма помеченных графов и двухполюсников определяется естественным образом. В дальнейшем все графы будут рассматриваться с точностью до изоморфизма.

Пусть $F = F_\varphi$ — примитивно-положительная операция, задаваемая формулой φ . С этой операцией может быть ассоциирован граф $G = G(F) = G(\varphi)$, определяемый следующим образом: $V(G)$ — множество всех индексов индивидуальных переменных, входящих в формулу φ , $in(G) = 0$, $out(G) = 1$, $(i, k, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда атомарная формула $r_k(z_i, z_j)$ входит в φ ; если формула $z_i = z_j$ входит в φ , то вершины i и j отождествляются.

Заметим, что графы, соответствующие операции умножения отношений \circ и операциям цилиндрификации ∇_1, ∇_2 , задаются следующим образом:

$$in \cdot \xrightarrow{1} \cdot \xrightarrow{2} \cdot out, \quad in \cdot \xrightarrow{1} \cdot \cdot out, \quad in \cdot \cdot \xrightarrow{1} \cdot out.$$

Пусть $G = (V, E, in, out)$ и $G_k = (V_k, E_k, in_k, out_k)$ ($k = 1, \dots, m$) — двухполюсники с попарно непересекающимися множествами вершин. Назовем композицией этих двухполюсников новый двухполюсник $G(G_1, \dots, G_m)$, определяемый следующим образом [10]: возьмем двухполюсник G и заменим каждое его ребро $(u, k, v) \in E$ на двухполюсник G_k , отождествляя при этом вершину in_k с вершиной u и вершину out_k с вершиной v .

Рассмотрим множество примитивно-положительных операций над отношениями $\Omega = \{F_{\varphi_1}, \dots, F_{\varphi_n}\}$, и пусть $A = (A, f_1, \dots, f_n)$ — универсальная алгебра соответствующего типа. Положим $G_1 = G(\varphi_1), \dots, G_n = G(\varphi_n)$.

Для всякого терма p алгебры A определим следующим индуктивным образом двухполюсник $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$:

- 1) если $p = x_k$, то $G(p)$ представляет собой двухполюсник вида $in \cdot \xrightarrow{k} \cdot out$;
- 2) если $p = f_k(p_1, \dots, p_m)$, то $G(p)$ есть композиция $G_k(G(p_1), \dots, G(p_m))$.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1, in_1, out_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2, in_2, out_2)$ — двухполюсники. Отображение $f : V_2 \rightarrow V_1$ называется гомоморфизмом из G_2 в G_1 , если $f(in_2) = in_1$, $f(out_2) = out_1$ и $(f(u), k, f(v)) \in E_1$ для всякой тройки $(u, k, v) \in E_2$. Мы будем писать $G_1 \prec G_2$, если существует гомоморфизм из G_2 в G_1 .

Обозначим через $Eq\{\Omega, \subset\}$ эквациональную теорию класса $R\{\Omega, \subset\}$. Теперь мы готовы сформулировать основной результат из [5]:

Тожество $p \leq q$ принадлежит эквациональной теории $Eq\{\Omega, \subset\}$ тогда и только тогда, когда $G(p) \prec G(q)$.

Шаг 2. Обозначим через Σ эквациональную теорию алгебр, удовлетворяющих тождествам 1)–10), и пусть Ξ — множество всех термов алгебры $(A, \cdot, *)$ типа $(2, 1)$. Для всякого терма p_1 и p_2 из Ξ будем писать $p_1 \prec p_2$ ($p_1 \cong p_2$), если тождество $p_1 \leq p_2$ ($p_1 = p_2$) принадлежит Σ . В том случае, когда эквивалентность термов устанавливается с помощью тождества с номером k), будем использовать запись $p_1 \xrightarrow{k} p_2$ ($p_1 \cong^k p_2$).

Пусть Λ — множество слов над алфавитом $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, \odot — пустое слово, $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\odot\}$.

Лемма 1. *Для любого терма $p \in \Xi$ существуют такие $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tilde{\Lambda}$ ($n \geq 0$), что $p \cong (\alpha_1)^* \dots (\alpha_n)^* \alpha_0$.*

Доказательство леммы 1 содержится в работе [9].

Лемма 2. *Следующие тождества принадлежат Σ*

$$17) (\alpha\beta)^* \leq \alpha^*, \quad 18) \alpha^*(\beta\gamma)^* \leq \alpha^*\gamma^*.$$

Доказательство. Действительно, $(\alpha\beta)^* \xrightarrow{4} \alpha\beta^* \xrightarrow{8} \alpha^*\beta^* \xrightarrow{10} \alpha^*$ и $\alpha^*(\beta\gamma)^* \xrightarrow{4} \alpha^*\beta\gamma^* \xrightarrow{10} \alpha^*\gamma^*$. Лемма доказана.

Шаг 3. Согласно определению графы $G(p) = (V_p, E_p, in(p), out(p))$ для $p \in \Xi$ могут быть построены следующим образом.

Если $p = \alpha = \odot$, то положим по определению $V_p = V_\alpha = \{v_0\}$, $E_p = E_\alpha = \emptyset$, и $in(p) = in(\alpha) = out(p) = out(\alpha) = v_0$.



Пусть $p = \alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \in \Lambda$. Тогда $V_p = V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$, $E_p = E_\alpha = \{(v_{k-1}, i_k, v_k) : k \in [1, n]\}$, и $in(p) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha) = v_n$:

$$in(\alpha) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_n = out(\alpha).$$

Пусть $p = (\alpha)^*$. Тогда $V_p = V_{\alpha^*} = V_\alpha \cup \{v_{n+1}\}$, $E_p = E_{\alpha^*} = E_\alpha$, и $in(p) = in(\alpha^*) = in(\alpha) = v_0$, $out(p) = out(\alpha^*) = v_{n+1}$:

$$in(\alpha^*) = v_0 \cdot \xrightarrow{i_1} \cdot \xrightarrow{i_2} \cdot \dots \cdot \xrightarrow{i_n} \cdot v_{n+1} = out(\alpha^*).$$

Пусть $p = (\alpha_1)^*(\alpha_2)^*\dots(\alpha_n)^*\alpha_0$ и $n > 1$. Будем предполагать, что множества $V_{\alpha_1^*}, \dots, V_{\alpha_n^*}, V_{\alpha_0}$ попарно не пересекаются. Возьмем в качестве V_p объединение этих множеств, в котором отождествлены следующие вершины: $out(\alpha_1)$ и $in(\alpha_2)$, $out(\alpha_2)$ и $in(\alpha_3)$, \dots , $out(\alpha_n)$ и $in(\alpha_0)$. Положим $E_p = E_{\alpha_1} \cup \dots \cup E_{\alpha_n} \cup E_{\alpha_0}$, и $in(p) = in(\alpha_1)$, $out(p) = out(\alpha_0)$.

Лемма 3. Пусть $\alpha, \beta \in \tilde{\Lambda}$ и существует такое отображение f из V_β в V_α , что $(f(u), k, f(v)) \in E_\alpha$ для всякого $(u, k, v) \in E_\beta$. Тогда найдутся такие $\beta_1, \beta_2 \in \tilde{\Lambda}$, что $\alpha = \beta_1\beta_2$. При этом $\beta_1 = \odot$, если $f(in(\beta)) = in(\alpha)$, и $\beta_2 = \odot$, если $f(in(\beta)) = in(\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, $\beta = x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_m}$ и $V_\alpha = \{v_0, \dots, v_n\}$, $V_\beta = \{v'_0, \dots, v'_m\}$. Предположим, что $f(v'_0) = v_l$. Тогда $f(v'_k) = v_t$ и $x_{j_k} = x_{i_t}$, где $t = l + k$. Следовательно, достаточно положить $\beta_1 = x_{i_1}\dots x_{i_s}$ (или $\beta_1 = \odot$, если $l = 1$, т.е. $f(in(\beta)) = in(\alpha)$) и $\beta_2 = x_{i_w}\dots x_{i_n}$ (или $\beta_2 = \odot$, если $l + m = n$, т.е. $f(in(\beta)) = in(\alpha)$), где $s = l$ и $w = l + m + 1$. Лемма доказана.

Шаг 4. Легко проверить выполнимость тождеств 8)–10). Откуда следует, что $\Sigma \subset Eq\{\circ, \nabla_1\}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$.

Предположим, что тождество $p_1 \leq p_2$ принадлежит $Eq\{\circ, \nabla_1, \subset\}$. Тогда согласно сформулированному выше результату из работы [5] имеем $G(p_1) \prec G(p_2)$, т.е. существует гомоморфизм f из $G(p_2)$ в $G(p_1)$. Согласно лемме 1 можно предположить, что $p_1 = (\alpha_1)^*\dots(\alpha_n)^*\alpha_0$ и $p_2 = (\beta_1)^*\dots(\beta_m)^*\beta_0$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $m = n = 0$. Тогда согласно лемме 3 имеем $p_1 = \alpha_0 = \beta_0 = p_2$.

2. $n = 0$, $m > 0$ и $\beta_0 = \odot$. Тогда по лемме 3 имеем $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots, m$, откуда

$$p_1 = \alpha_0 \prec^8 \alpha_1^* \prec^3 \alpha_0^* \dots \alpha_0^* = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \prec^{17} \\ \prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^* \prec^{18} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^* = p_2.$$

3. $n = 0$, $m > 0$ и $\beta_0 \neq \odot$. Тогда по лемме 3 имеем $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$, $\alpha_0 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_0 = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots, m$, откуда

$$p_1 = \alpha_0 \prec^9 \alpha_1^*\alpha_0 \prec^3 \alpha_0^* \dots \alpha_0^*\alpha_0 = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^*\mu_0\beta_0 \prec^{17} \\ \prec \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^*\mu_0\beta_0 \prec^{18} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\mu_0\beta_0 \prec^{10} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^*\beta_0 = p_2.$$

4. $n > 0$, $m > 0$ и $\beta_0 = \odot$. Тогда, учитывая, что компонента связности графа $G(p_2)$ отображается в некоторую компоненту связности графа $G(p_1)$, по лемме 3 получаем $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$ и $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots, m$, где g — функция, отображающая множество $\{2, \dots, m\}$ во множество $\{0, \dots, n\}$. Следовательно,

$$p_1 = \alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \prec^3 \alpha_1^*\alpha_1^* \dots \alpha_n^*\alpha_0 \prec^{6,10} \alpha_1^*\alpha_{g(2)}^* \dots \alpha_{g(m)}^* = \\ = (\beta_1\lambda_1)^*(\mu_2\beta_2\lambda_2)^* \dots (\mu_m\beta_m\lambda_m)^* \prec^{17} \beta_1^*(\mu_2\beta_k)^* \dots (\mu_m\beta_m)^* \prec^{18} \beta_1^*\beta_2^* \dots \beta_m^* = p_2.$$

5. $n > 0$, $m > 0$ и $\beta_0 \neq \odot$. Так как $\beta_0 \neq \odot$, существует ребро в $G(p_2)$, входящее в вершину $out(p_2)$. Значит существует ребро в $G(p_1)$, входящее в вершину $f(out(p_2)) = out(p_1)$, откуда $\alpha_0 \neq \odot$. Далее, учитывая, что компонента связности графа $G(p_2)$ отображается в некоторую компоненту связности графа $G(p_1)$, по лемме 3 получаем $\alpha_1 = \beta_1\lambda_1$, $\alpha_0 = \mu_0\beta_0$ и $\alpha_{g(k)} = \mu_k\beta_k\lambda_k$ для $k = 2, \dots, m$,



где g — функция, отображающая множество $\{2, \dots, m\}$ во множество $\{0, \dots, n\}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \stackrel{3}{\prec} \alpha_1^* \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \stackrel{7}{\prec} \alpha_1^* \alpha_0^* \alpha_1^* \dots \alpha_n^* \alpha_0 \stackrel{6,10}{\prec} \\
 &\prec \alpha_1^* \alpha_{g(2)}^* \dots \alpha_{g(m)}^* \alpha_0 = (\beta_1 \lambda_1)^* (\mu_2 \beta_2 \lambda_2)^* \dots (\mu_m \beta_m \lambda_m)^* \mu_0 \beta_0 \stackrel{17}{\prec} \\
 &\prec \beta_1^* (\mu_2 \beta_k)^* \dots (\mu_m \beta_m)^* \mu_0 \beta_0 \stackrel{18}{\prec} \beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_m^* \mu_0 \beta_0 \stackrel{10}{\prec} \beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_m^* \beta_0 = p_2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, тождество $p_1 \leq p_2$ принадлежит Σ , т. е. $Eq\{\circ, \nabla_1\} \subset \Sigma$. Теорема доказана.

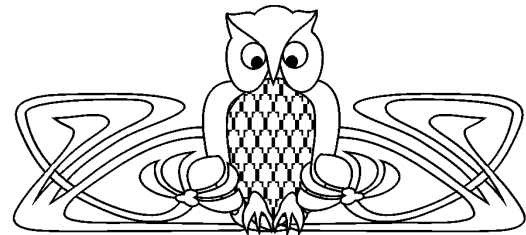
Следствия 1, 2 непосредственно вытекают из теорем 1, 2 и следствия 2 работы [5].

Библиографический список

1. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных преобразований // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов, 1965. Вып. 1. С. 3–197.
2. Tarski A. On the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1941. V. 6. P. 73–89.
3. Henkin L., Monk J.D., Tarski A. Cylindric Algebras. North-Holland, Amsterdam, 1971. 311 p.
4. Schein B.M. Relation algebras and function semigroups // Semigroup Forum. 1970. V. 1. P. 1–62.
5. Бредихин Д.А. Эквационная теория алгебр отношений с позитивными операциями // Изв. вузов. Математика. 1993. № 3. С. 23–30.
6. Andreka H., Bredikhin D.A. The equational theory of union-free algebras of relations // Alg. Univers. 1994. V. 33. P. 12–25.
7. Бредихин Д.А. О квазитожествах алгебр отношений с диофантовыми операциями // Сибирск. мат. журн. 1997. Т. 38. С. 29–41.
8. Бредихин Д.А. Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // Докл. АН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
9. Bredikhin D.A. On varieties of semi-groups of relations with operations of cylindrofication // Contributions to General Algebra. 2005. V. 16. P. 1–6.
10. Böner F, Pöschel F.R. Clones of operations on binary relations // Contributions to general algebras. 1991. V. 7. P. 50–70.

УДК 517.518

АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ



С.С. Волосивец

Саратовский государственный университет,
кафедра теории функций и приближений
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Устанавливаются двумерные аналоги известных условий Зигмунда и Саса для абсолютной сходимости рядов Фурье – Виленкина. Также доказывается, что двумерное условие Саса является неулучшаемым в определенном смысле.

Ключевые слова: абсолютная сходимость, ряды Фурье – Виленкина, модуль непрерывности, функции ограниченной p -флуктуации.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{P} = \{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, такая что $2 \leq p_j \leq N$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \quad (1)$$

Absolute Convergence of Single and Double Fourier Series on Multiplicative Systems

S.S. Volosivets

Saratov State University,
Chair of Theory of Functions and Approximations
E-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Two-dimensional analogs of famous Zygmund and Szasz tests for absolute convergence of Fourier – Vilenkin series are established. Also it is proved that two-dimensional Szasz test is the best possible in the certain sense.

Key words: absolute convergence, Fourier – Vilenkin series, modulus of continuity, functions of bounded p -fluctuation.