УДК 518:517.949.12

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ ДЛЯ ПРЯМОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛИНОМА ЧЕБЫШЕВСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В. Т. ГАВРИЛЮК, Т. Ю. МАЗАНОВСКАЯ

(*Киев*)

В настоящей статье приводятся составленные авторами таблицы вспомогательных полиномов $G_\nu^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots, 10;\ \nu = 0, \ldots, n)$, которые дают возможность очень просто находить полином $P_n^0(x) \equiv P_n^0[f;\ x]$ наилучшего приближения произвольно заданной вещественной функции $f(x)$ на системе $n + 2$ точек уклонения полинома Чебышева $T_{n+1}(x)$, т. е.

$$\{x_i^{(n)}\} = \left\{\cos\frac{(n+1-i)\pi}{n+1}\right\}_{i=0}^{n+1} \in [-1,\ 1].$$

Выясняются также основные принципы вычислительного применения соответствующего метода построения $P_n^0[f;\ x]$.

Введение таких вспомогательных полиномов предложено в [1].

В вычислительной практике в качестве приближенного представления непрерывной функции $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ часто используется полином $S_n[f;\ x]$ — отрезок разложения функции $f(x)$ в ряд по полиномам Чебышева $T_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Известно (см. [2] — [4]), что полином

$$P_n^0[f;\ x] = \sum_{j=0}^{n} c_j^{(n)} x^{n-j}$$

наилучшего приближения на упомянутой системе $n + 2$ точек оказывается, вообще, существенно более точным*) инструментом равномерного приближения непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f(x)$, чем $S_n[f;\ x]$.

Представляя собой «довольно хорошее» равномерное приближение для многих функций, полином $P_n^0[f;\ x]$ вместе с тем может служить исходным приближением в процессе последовательных чебышевских интерполяций (см. [5], [6]) для построения с любой степенью точности полинома $\pi_n(x) \equiv \pi_n[f;\ x]$ наилучшего равномерного приближения непрерывной функции $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ (случай произвольного интервала $a \leqslant X \leqslant b$ сводится к $-1 \leqslant x \leqslant 1$ простым линейным преобразованием независимого переменного X).

Задача построения полинома $P_n^0(x) = P_n^0[f;\ x]$ для заданной функции $f(x)$ сводится (см. [5], § 3) к решению совместной системы $n + 2$ линейных уравнений с $n + 2$ неизвестными $\{c_j^{(n)}\}_{j=0}^{n}$, $\dot\rho$:

$$(-1)^i \upsilon\dot\rho + P_n^0(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, \ldots, n+1, \tag{1}$$

где $\upsilon = \pm 1$, $\dot\rho$ — величина наилучшего приближения функции $f(x)$ на множестве точек $\{x_i\}_{i=0}^{n+1} = \{x_i^{(n)}\}_{i=0}^{n+1}$.

Складывая попарно уравнения (1), мы исключим неизвестное $\upsilon\dot\rho$ и в результате получим систему $n + 1$ линейных уравнений с неизвестными $\{c_j^{(n)}\}_{j=0}^{n}$ вида

$$P_n^0(x_i) + P_n^0(x_{i+1}) = f(x_i) + f(x_{i+1}), \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

(Величина $\upsilon\dot\rho$ легко определима из любого из уравнений (1) после решения системы (2), но она может быть и независимо определена по указанной ниже формуле (10).)

*) Обоснованное общее сравнение здесь применимо лишь в условиях более или менее быстрой сходимости разложения $f(x)$ в ряд по системе $\{T_k(x)\}$ $(|A_{n+2}/A_{n+1}| < {}^1/_2$ при $f(x) = \Sigma_0^\infty A_k T_k(x))$.

Решение этой системы для больших n является трудоемким.

Можно избежать решения системы (2), если воспользоваться разложением полинома $P_n{}^0(x)$ в виде линейной комбинации по вспомогательным полиномам $G_\nu^{(n)}$, $\nu = 0, \ldots, n$ (той же степени n), удовлетворяющим условиям

$$G_\nu^{(n)}(x_i) + G_\nu^{(n)}(x_{i+1}) = \delta_{\nu i} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = \nu, \\ 0 & \text{при } i \neq \nu. \end{cases} \tag{3}$$

Имея такую систему полиномов

$$G_\nu^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} g_j^{(\nu,\, n)} x^{n-j}, \qquad \nu = 0, \ldots, n, \tag{4}$$

мы находим полином $P_n{}^0(x)$ следующим образом.

Пусть разложение $P_n{}^0(x)$ по системе $\{G_\nu^{(n)}(x)\}$ имеет вид

$$P_n{}^0(x) = \alpha_0 G_0^{(n)}(x) + \alpha_1 G_1^{(n)}(x) + \ldots + \alpha_n G_n^{(n)}(x), \tag{5}$$

где коэффициенты α_i $(i = 0, \ldots, n)$ пока еще не определены.

Подставляя это разложение в (2), будем иметь

$$\alpha_0 [G_0^{(n)}(x_i) + G_0^{(n)}(x_{i+1})] + \alpha_1 [G_1^{(n)}(x_i) + G_1^{(n)}(x_{i+1})] + \ldots \tag{6}$$

$$\ldots + \alpha_i [G_i{}^{(n)}(x_i) + G_i{}^{(n)}(x_{i+1})] + \ldots \alpha_n [G_n{}^{(n)}(x_i) + G_n{}^{(n)}(x_{i+1})] = f(x_i) + f(x_{i+1}),$$

$$i = 0, \ldots, n.$$

В силу (3) мы получим непосредственно

$$\alpha_i = f(x_i) + f(x_{i+1}), \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{7}$$

Подставляя (7) и (4) в (5) и выполняя приведение подобных членов, мы получаем

$$P_n{}^0(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^{(n)} x^{n-j}. \tag{8}$$

Полиномы $G_\nu^{(n)}(x)$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$ и каждом $\nu = 0, 1, \ldots, n$ определяются однозначно. Предположение неоднозначной определяемости какого-нибудь $G_\nu^{(n)}(x)$ легко приводится к противоречию: разность двух таких полиномов (удовлетворяющих условиям (3) при одних и тех же фиксированных значениях n и ν) представляла бы собой отличный от тождественного нуля полином формальной степени n с $n+1$ переменами знака (строгими или формальными) при переходах от x_i к x_{i+1} $(i = 0, \ldots, n)$ и, следовательно, имеющий не менее $n+1$ нулей, что невозможно. Искомые выражения $G_0^{(n)}(x), G_1^{(n)}(x), \ldots, G_n^{(n)}(x)$ при любом фиксированном $n \geqslant 1$ в явном виде выражаются через полиномы Чебышева I рода

$$T_{n+1}(x) = \cos\,(n+1)\arccos x = 2^n x^{n+1} + \ldots$$

и II рода

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx} T_{n+1}(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sin(\arccos x)} = 2^n x^n + \ldots = 2^n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) =$$

$$= 2^n \prod_{i=1}^{n} \left(x - \cos\frac{(n+1-i)\pi}{n+1} \right),$$

а именно *)

---

*) В [1] формулы явного аналитического представления полиномов $G_\nu^{(n)}(x)$ были приведены в виде, почти полностью искаженном.

$$G_0^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}[(x-1)U_n(x) - T_{n+1}(x)],$$

$$G_\nu^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{\nu+n+1}}{n+1}\left\{(x^2-1)U_n(x)\left[\frac{1}{2(x+1)} + \sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{x-x_i}\right] - \left(\nu+\frac{1}{2}\right)T_{n+1}(x)\right\} \tag{9}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$G_n^{(n)}(x) = \frac{1}{2n+2}[(x+1)U_n(x) - T_{n+1}(x)].$$

В том, что каждый из полиномов $G_0^{(n)}(x)$, $G_1^{(n)}(x), \ldots, G_n^{(n)}(x)$, определенный соответствующей из формул (9), удовлетворяет условиям (3), можно убедиться, подставляя в эту формулу по очереди значения $x_i = \cos\,[(n+1-i)\pi\,/\,(n+1]$ $(i = 0, \ldots, n+1)$ с учетом приведенных выше «тригонометрических» выражений полиномов $T_{n+1}(x)$ и $U_n(x)$. Так мы получим

$$G_0^{(n)}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{2n+1}{2n+2} & \text{для } i = 0, \\ \dfrac{(-1)^{i+1}}{2n+2} & \text{для } i > 0; \end{cases} \tag{9_0}$$

$$G_\nu^{(n)}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\nu+i}(n-\nu+1/2)}{n+1} & \text{для } i \leqslant \nu, \\ \dfrac{(-1)^{\nu+i+1}(\nu+1/2)}{n+1} & \text{для } i > \nu; \end{cases} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)\ (9_1 - 9_{n-1})$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$G_n^{(n)}(x_i) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+i}}{2n+2} & \text{для } i < n+1, \\ \dfrac{2n+1}{2n+2} & \text{для } i = n+1. \end{cases} \tag{9_n}$$

Отсюда выполнение условий (3) следует непосредственно.

Для практического использования полиномов $G_\nu^{(n)}(x)$ необходимы развернутые явные алгебраические выражения (4). В приведенных ниже таблицах даются вычисленные нами выражения этих полиномов для $n = 1, 2, \ldots, 10$ при $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Все коэффициенты $g_j^{(\nu, n)}$ и $x_i^{(n)}$ $(i = 0, \ldots, n+1)$ даны нами с 16 верными знаками.

Предлагаемые здесь таблицы вспомогательных полиномов $G_\nu^{(n)}(x)$ являются достаточными для многих случаев возможного практического использования этих полиномов.

Проверка при составлении таблиц производилась различными способами, но решающее значение имела проверка выполнения соотношений (3). При наличии коэффициентов с абсолютными значениями $|g_j^{(\nu,n)}| \gg 1$ значения $\{x_i^{(n)}\}$ для проверки брались с 17—18 дес. зн., причем отклонения в выполнении соотношений (3) не превышали одной или нескольких единиц 16-го десятичного разряда.

Применяя метод вспомогательных полиномов $G_\nu^{(n)}(x)$ к какому-нибудь конкретному случаю непрерывной функции $f(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, можно рекомендовать прежде всего вычислить значения всех $n+2$ «опорных ординат» $f(x_i) \equiv f(x_i^{(n)})$ и с их помощью подсчитать значение $\dot{\upsilon\rho}$ по простой формуле, действительной для рассматриваемого нами набора $\{x_i^{(n)}\}$ (см. [7], стр. 68):

$$\dot{\upsilon\rho} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{2}f(x_0) - f(x_1) + f(x_2) \mp \ldots + (-1)^n f(x_n) + \frac{1}{2}(-1)^{n+1} f(x_{n+1})\right] \tag{10}$$

Степень точности вычисляемых значений $f(x_i)$ $(i = 0, \ldots, n+1)$ должна соответствовать получению значения $\dot{\rho} = |\dot{\upsilon\rho}|$ по формуле (10) с н е с к о л ь к и м и з н ачащими цифрами (например, с тремя — четырьмя при $n \leqslant 6$ и с четырьмя — шестью при $6 < n \leqslant 10$). На основе этого критерия нетрудно будет сориентироваться в каждом конкретном случае, со сколькими десятичными знаками нужно взять соответствующие числовые данные из прилагаемых здесь таблиц. Сам искомый полином $P_n{}^0(x)$ согласно (5), (7), (4) выражается в виде

$$P_n{}^0(x) = \sum_{\nu=0}^{n} [f(x_\nu) + f(x_{\nu+1})]\, G_\nu^{(n)}(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu (g_0^{(\nu,n)} x^n + g_1^{(\nu,n)} x^{n-1} + \ldots + g_n^{(\nu,n)}). \quad (11)$$

Раскрытием скобок и приведением подобных завершится определение $P_n{}^0(x)$ в обычной форме (8). При больших значениях n это приведение подобных сопряжено с потерей некоторого числа старших разрядов значащих цифр, но аналогичное явление некоторой потери относительной точности в ходе вычислений не исключено и при иных способах решения задач эффективной аппроксимации.

Остановимся отдельно на часто встречающихся на практике случаях нечетной или четной $f(x)$. При этом полином наилучшего приближения фиксированной формальной степени на любом симметрическом относительно $x = 0$ точечном множестве сам оказывается (см. [5], § 6; [6]), соответственно, нечетным или четным. В этих случаях следование указанному только что плану действий приведет к $\dot{\rho} = 0$ (см. [6]), т. е. фактически к л а г р а н ж е в с к о м у интерполированию функции $f(x)$ (с одним избыточным симметричным узлом), явно мало обещающему с точки зрения критерия равномерного приближения. Небольшое изменение указанного плана действий дает возможность в этих случаях достичь повышенной эффективности метода в смысле его упрощения. Именно, предполагая фактическую степень n искомого аппроксимирующего полинома нечетной или четной (соответственно нечетности или четности $f(x)$), достаточно ф о р м а л ь н о повысить на единицу степень искомого полинома, заменяя n на $n' = n + 1$ (что, очевидно, не повлияет на фактическую степень искомого полинома, поскольку окажется $c_0^{(n')} = 0$), и провести определение полинома $P_{n'}{}^0(x) \equiv P_{n'}{}^0[f;\ x]$ с помощью тех же таблиц (но при $n' = n + 1$ взамен фактически требуемого n) по следующей упрощенной формуле:

$$P_{n'}{}^0(x) = 2 \sum_{\nu > {}^1\!/_2 n'} \alpha_\nu [G_\nu^{(n')}(x)] = 2 \sum_{\nu > {}^1\!/_2 n'} [f(x_\nu^{(n')}) + f(x_{\nu+1}^{(n')})]\, [G_\nu^{(n')}(x)], \quad (12)$$

где $[G_\nu^{(n')}(x)]$ обозначает *«соответственно симметризованную часть»* полинома $G_\nu^{(n')}(x)$, а именно:

$$[G_\nu^{(n')}(x)] = \frac{1}{2}\, \{G_\nu^{(n')}(x) + (-1)^{n'-1} G_\nu^{(n')}(-x)\} = g_1^{(\nu,n')} x^{n'-1} + g_3^{(\nu,n')} x^{n'-3} + \ldots, \quad (13)$$

а суммирование распространяется лишь на значения ν, соответствующие н е о т р и ц а т е л ь н ы м $x_\nu^{(n')}$ *).

П р и м е р 1. $f(x) = \cos(\pi x / 4)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 8$, $n' = 8 + 1 = 9$.

При полном использовании 16-значных выражений абсцисс в таблице с заголовком «$n = 9$» имеем

$f(x_0) = f(x_{10}) = 0.7071067811865475$, ..., $f(x_4) = f(x_6) = 0.9706923064054259$; $f(x_5) = 1$, что при подстановке в (10) (с заменой n на $n' = 9$) дает

$$v\dot{\rho} = -0.0^{10}473996.$$

Далее, согласно (7), имеем $\left(\text{опуская ненужные } \nu \leqslant \frac{1}{2} n'\right)$.

$$\alpha_5 = 1.9706923064054259;\quad \alpha_6 = 1.8660130934193518;$$

$$\alpha_7 = 1.7001548741587475;\quad \alpha_8 = 1.5385930845114148;$$

$$\alpha_9 = 1.4408657785531407.$$

*) Возможность обойтись здесь суммированием лишь по значениям $\nu > {}^1\!/_2 n'$ (с удвоением полученного результата) легко усматривается из структуры самих таблиц.

При подстановке в (12) это дает

$$P_9^0(x) = 0.0^5 35298113275x^8 - 0.0^3 32593861433340x^6 + 0.0158543252461950x^4 -$$
$$- 0.30842501351618420x^2 + 0.9^{10}526005.$$

При заключительном исследовании на экстремум отклонения $\Delta(x) = f(x) - P_9^0(x)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ использованные абсциссы $x_i = x_i^{(9)}$ служили исходными приближениями для применения ньютоновых поправок. В качестве экстремальных отклонений (опуская, с учетом симметрии, отрицательные абсциссы) найдены

$$\Delta(0) = 0.0^{10}473995; \qquad \Delta(0.3088860018653365) = -0.0^{10}473997;$$
$$\Delta(0.5876051066042349) = 0.0^{10}473997 = -\Delta(0.8088862832888150);$$
$$\Delta(0.9510140654843715) = 0.0^{10}473996; \qquad \Delta(1) = -0.0^{10}473995.$$

Таким образом,

$$\max_{x \in [-1,1]} |(\Delta x)| \equiv L[P_9^0] = 0{,}0^{10}473997,$$

и согласно критерию оценки Валле — Пуссена (см. [5], § 2), обозначая через ρ величину наилучшего приближения функции $f(x)$ полиномом степени $n \leqslant 8$ (или также $n \leqslant 9$), имеем

$$L - \rho < 0.0^{10}473997 - 0.0^{10}473995 = 2 \cdot 10^{-16} < \frac{1}{230}\,‰ \text{ величины } \rho. \tag{14}$$

Сравним этот результат с соответствующей оценкой из [4], стр. 54, для равномерного приближения с помощью отрезка $S_8[f;\ x]$ разложения $f(x) = \cos\,(\pi x/4)$ в ряд по $\{T_k(x)\}_0^\infty$:

$$L[S_8] - \rho < 0.0^{10}47453 - 0.0^{10}47346 = 107 \cdot 10^{-15} \approx 2\frac{1}{4}\,‰ \text{ величины } \rho, \tag{14$'$}$$

что в сопоставлении с (14) иллюстрирует общую сравнительную характеристику методов $P_n^0[f;\ x]$ и $S_n[f;\ x]$, приведенную в начале статьи.

Пример 2. $f(x) = e^x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $n = 5$.

В данном случае мы используем из таблицы с заголовком «$n = 5$» значения $x_i^{(5)}$ $(i = 0, \ldots, 6)$ и коэффициентов полиномов $G_\nu^{(5)}(x)$ с 9 дес. зн. При этом имеем

$$f(x_0) = 0.367879441,\ f(x_1) = 0.420620025,\ f(x_2) = 0.606530660,\ f(x_3) = 1,$$
$$f(x_4) = 1.648721271,\ f(x_5) = 2.377442676,\ f(x_6) = 2.718281829,\ \upsilon\dot{\rho} = 0.000044978.$$

Согласно (7) получаем

$$\alpha_0 = 0.788499466,\ \alpha_1 = 1.027150685,\ \alpha_2 = 1.606530660,\ \alpha_3 = 2.648721271,$$
$$\alpha_4 = 4.026163947,\ \alpha_5 = 5.095724505.$$

Имеем

$$P_5^0(x) = 0.008737990x^5 + 0.043795517x^4 + 0.166424957x^3 + 0.499195163x^2 +$$
$$+ 1.000038247x + 1.000044978.$$

Исследование на экстремум отклонения $\Delta(x) = e^x - P_5^0(x)$ дало:

$$\Delta(-1) = 0.000044977,\ \Delta(-0.860444433) = -0.000045074,\ \Delta(-0.482867634) = 0.000045296,$$
$$\Delta(0.023574906) = 0.000045390,\ \Delta(0.518278045) = 0.000045352,$$
$$\Delta(0.872274560) = -0.000045111,\ \Delta(1) = 0.000044977.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\max_{x \in [-1,1]} |\Delta(x)| = L[P_5^0] = 0.000045390, \\ &L - \rho < 0.000045390 - 0.000044977 = 413 \cdot 10^{-9} < 9.2‰ \text{ величина } \rho, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Таблица полиномов $G_\nu^{(n)}(x)$ $(n=1,2,\ldots,\ 10;\ \nu=0,1,\ldots,n)$

$$n=1$$

$$x_0^{(1)}=-1,\ x_1^{(1)}=0\ x_2^{(1)}=1$$

$G_0^{(1)}(x)=-0.5\,x+0.25$

$G_1^{(1)}(x)=\quad 0.5\,x+0.25$

$$n=2$$

$$x_0^{(2)}=-1,\ x_1^{(2)}=-0.5,\ x_2^{(2)}=0.5,\ x_3^{(2)}=1$$

$G_0^{(2)}(x)=\quad 0.6666666666666667\,x^2-0.3333333333333333\,x-0.1666666666666667$

$G_1^{(2)}(x)=-1.3333333333333333\,x^2+\ 0.8333333333333333$

$G_2^{(2)}(x)=\quad 0.6666666666666667\,x^2+0.3333333333333333\,x-0.1666666666666667$

$$n=3$$

$$x_0^{(3)}=-1,\ x_1^{(3)}=-0.7071067811865475,\ x_2^{(3)}=0,\ x_3^{(3)}=0.7071067811865475,\ x_4^{(3)}=1$$

$G_0^{(3)}(x)=-x^3+0.5x^2+0.5\,x-0.125$

$G_1^{(3)}(x)=\quad 2.4142135623730950\,x^3-0.5\,x^2-1.9142135623730950\,x+0.375$

$G_2^{(3)}(x)=-2.4142135623730950\,x^3-0.5\,x^2+1.9142135623730950\,x+0.375$

$G_3^{(3)}(x)=x^3+0.5\,x^2-0.5\,x-0.125$

$$n=4$$

$$x_0^{(4)}=-1,\ x_1^{(4)}=-0.8090169943749475,\ x_2^{(4)}=-0.3090169943749475,\ x_3^{(4)}=0.3090169943749475,\ x_4^{(4)}=0.8090169943749475,\ x_5^{(4)}=1$$

$G_0^{(4)}(x)=\quad 1.6\,x^4-0.8\,x^3-1.2\,x^2+0.4\,x+0.1$

$G_1^{(4)}(x)=-4.1888543819998318\,x^4+1.2944271909999159\,x^3+4.0360679774997897\,x^2-1.0944271909999159\,x-0.3472135954999579$

$G_2^{(4)}(x)=\quad 5.1777087639996636\,x^4-5.6721359549995794\,x^2+0.9944271909999159$

$G_3^{(4)}(x)=-4.1888543819998318\,x^4-1.2944271909999159\,x^3+4.0360679774997897\,x^2+1.0944271909999159\,x-0.3472135954999579$

$G_4^{(4)}(x)=\quad 1.6x^4+0.8\,x^3-1.2\,x^2-0.4\,x+0.1$

$$n = 5$$

$$x_0^{(5)} = -1,\quad x_1^{(5)} = -0.8660254037844388,\quad x_2^{(5)} = -0.5,\quad x_3^{(5)} = 0,\quad x_4^{(5)} = 0.5,\quad x_5^{(5)} = 0.8660254037844388,\quad x_6^{(5)} = 1$$

$$G_0^{(5)}(x) = -2.6666666666666667\, x^5 + 1.3333333333333333\, x^4 + 2.6666666666666667\, x^3 - x^2 - 0.5\, x + 0.0833333333333333$$

$$G_1^{(5)}(x) = 7.2854688201836735\, x^5 - 2.6666666666666666\, x^4 - 8.4401693585629250\, x^3 + 2.6666666666666667 x^2 + 1.6547005383792517\, x - 0.25$$

$$G_2^{(5)}(x) = -9.9521354868503400\, x^5 + 1.3333333333333333\, x^4 + 13.1068360252295920\, x^3 - 1.6666666666666667\, x^2 - 3.6547005383792520\, x + 0.4166666666666667$$

$$G_3^{(5)}(x) = 9.9521354868503400\, x^5 + 1.3333333333333333\, x^4 - 13.1068360252295920\, x^3 - 1.6666666666666667\, x^2 + 3.6547005383792520\, x + 0.4166666666666667$$

$$G_4^{(5)}(x) = -7.2854688201836735\, x^5 - 2.6666666666666666\, x^4 + 8.4401693585629250\, x^3 + 2.6666666666666667\, x^2 - 1.6547005383792517\, x - 0.25$$

$$G_5^{(5)}(x) = 2.6666666666666667\, x^5 + 1.3333333333333333\, x^4 - 2.6666666666666667\, x^3 - x^2 + 0.5\, x + 0.0833333333333333$$

$$n = 6$$

$$x_{0,7}^{(6)} = \mp 1,\quad x_{1,6}^{(6)} = \mp 0.9009688679024190,\quad x_{2,5}^{(6)} = \mp 0.6234898018587332,\quad x_{3,4}^{(6)} = \mp 0.2225209339563139$$

$$G_0^{(6)}(x) = 4.5714285714285714\, x^6 - 2.2857142857142857\, x^5 - 5.7142857142857143\, x^4 + 2.2857142857142857\, x^3 + 1.7142857142857143\, x^2 - 0.4285714285714286\, x - 0.0714285714285685$$

$$G_1^{(6)}(x) = -12.8088582208221166\, x^6 + 5.1359533799256369\, x^5 + 17.5618109107616054\, x^4 - 6.1028227922856925\, x^3 - 5.4829407276787326\, x^2 + 1.2525836980743413\, x + 0.2299880377392481$$

$$G_2^{(6)}(x) = 18.5093364092448201\, x^6 - 4.1187148246967673\, x^5 - 28.1718856057440411\, x^4 + 5.8609533044237979\, x^3 + 10.6216623016112842\, x^2 - 1.8850956225841735\, x - 0.4591131051120603$$

$$G_3^{(6)}(x) = -20.5438135197025498\, x^6 + 32.6487208185363000\, x^4 - 13.7060145764365318\, x^2 + 1.1011072776027614$$

$$G_4^{(6)}(x) = 18.5093364092448201\, x^6 + 4.1187148246967673\, x^5 - 28.1718856057440411\, x^4 - 5.8609533044237979\, x^3 + 10.6216623016112842\, x^2 + 1.8850956225841735\, x - 0.4591131051120603$$

$$G_5^{(6)}(x) = -12.8088582208221166\, x^6 - 5.1359533799256369\, x^5 + 17.5618109107616054\, x^4 + 6.1028227922856925\, x^3 - 5.4829407276787326\, x^2 - 1.2525836980743413\, x + 0.2299880377392481$$

$$G_6^{(6)}(x) = 4.5714285714285714\, x^6 + 2.2857142857142857\, x^5 - 5.7142857142857143\, x^4 - 2.2857142857142857\, x^3 + 1.7142857142857143\, x^2 + 0.4285714285714286\, x - 0.0714285714285685$$

$$n = 7$$

$$x_{0,8}^{(7)} = \mp 1,\quad x_{1,7}^{(7)} = \mp 0.9238795325112867,\quad x_{2,6}^{(7)} = \mp 0.7071067811865475,\quad x_{3,5}^{(7)} = \mp 0.3826834323650898,\quad x_4^{(7)} = 0$$

$$G_0^{(7)}(x) = -8\, x^7 + 4\, x^6 + 12\, x^5 - 5\, x^4 - 5x^3 + 1.5\, x^2 + 0.5\, x - 0.0625$$

$$G_1^{(7)}(x) = \quad 22.7820725201805900\,x^7 - 9.6568542494923797\,x^6 - 36.3378931808556701\,x^5 + 13.4852813742385695\,x^4 + 15.6382128609674770\,x^3 -$$
$$- 4.3284271247461898\,x^2 - 1.5823922002923939\,x + 0.1875$$
$$G_2^{(7)}(x) = - 34.0957810191653480\,x^7 + 9.6568542494923797\,x^6 + 58.9653101788251905 x^5 - 15.4852813742385695\,x^4 - 28.3661349223253316\,x^3 +$$
$$+ 6.3284271247461898\,x^2 + 2.9966057626654891\,x - 0.3125$$
$$G_3^{(7)}(x) = \quad 40.2187159370067846\,x^7 - 4\,x^6 - 73.3759644150928517\,x^5 + 7\,x^4 + 39.2669301705043093\,x^3 - 3.5\,x^2 - 5.6097316924182422\,x + 0.4375$$
$$G_4^{(7)}(x) = - 40.2187159370067846\,x^7 - 4\,x^6 + 73.3759644150928517\,x^5 + 7\,x^4 - 39.2669801705043093\,x^3 - 3.5\,x^2 + 5.6097316924182422\,x + 0.4375$$
$$G_5^{(7)}(x) = \quad 34.0957810191653480\,x^7 + 9.6568542494923797\,x^6 - 58.9653101788251905\,x^5 - 15.4852813742385695\,x^4 + 28.3661349223253316\,x^3 +$$
$$+ 6.3284271247461898\,x^2 - 2.9966057626654891\,x - 0.3125$$
$$G_6^{(7)}(x) = - 22.7820725201805900\,x^7 - 9.6568542494923797\,x^6 + 36.3378931808556701\,x^5 + 13.4852813742385695\,x^4 - 15.6382128609674770\,x^3 -$$
$$- 4.3284271247461898\,x^2 + 1.5823922002923939\,x + 0.1875$$
$$G_7^{(7)}(x) = \quad 8\,x^7 + 4\,x^6 - 12\,x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 1.5\,x^2 - 0.5\,x - 0.0625$$

$$n = 8$$

$$x_{0,9}^{(8)} = \mp 1, \quad x_{1,8}^{(8)} = \mp 0.9396926207859084, \quad x_{2,7}^{(8)} = \mp 0.7660444431189780, \quad x_{3,6}^{(8)} = \mp 0.5, \quad x_{4,5}^{(8)} = \mp 0.1736481776669304$$
$$G_0^{(8)}(x) = \quad 14.2222222222222222\,x^8 - 7.1111111111111111\,x^7 - 24.8888888888888889\,x^6 + 10.6666666666666667\,x^5 + 13.3333333333333333\,x^4 -$$
$$- 4.4444444444444444\,x^3 - 2.2222222222222222\,x^2 + 0.4444444444444444\,x + 0.0555555555555556$$
$$G_1^{(8)}(x) = - 40.9512567690213950 x^8 + 18.0059654132476879\,x^7 + 74.7914024269316791\,x^6 - 29.1152459525899235\,x^5 - 41.1025853120910897\,x^4 +$$
$$+ 12.7612278358498140\,x^3 + 6.9362371844559070\,x^2 - 1.3186139631742451\,x - 0.1737975302751013$$
$$G_2^{(8)}(x) = \quad 62.7409653732945472\,x^8 - 20.4756283845106980\,x^7 - 121.9263751910335389\,x^6 + 36.7782854706500875\,x^5 + 72.0024897415909137\,x^4 -$$
$$- 18.6541501391978737\,x^3 - 12.6359227084972778\,x^2 + 2.1292708308362620\,x + 0.3188427846453545$$
$$G_3^{(8)}(x) = - 76.9631875955167695\,x^8 + 13.3645172733995869\,x^7 + 157.4819307465890945\,x^6 - 26.1116188039834208\,x^5 - 101.3358230749242483\,x^4 +$$
$$+ 15.5430390280867626\,x^3 + 20.8581449307195007\,x^2 - 2.6848263863918176\,x - 0.5410650068675768$$
$$G_4^{(8)}(x) + 81.9025135380427902\,x^8 - 170.9161381871966916\,x^6 + 114.2051706241821820\,x^4 - 25.8724743689118154\,x^2 + 1.1809283938835360$$
$$G_5^{(8)}(x) = - 76.9631875955167695\,x^8 - 13.3645172733995869\,x^7 + 157.4819307465890945\,x^6 + 26.1116188039834208\,x^5 - 101.3358230749242483\,x^4 -$$
$$- 15.5430390280867626\,x^3 + 20.8581449307195007\,x^2 + 2.6848263863918176\,x - 0.5410650068675768$$
$$G_6^{(8)}(x) = \quad 62.7409653732945472\,x^8 + 20.4756283845106980\,x^7 - 121.9263751910335389\,x^6 - 36.7782854706500875\,x^5 + 72.0024897415909137\,x^4 +$$
$$+ 18.6541501391978737\,x^3 - 12.6359227084972778\,x^2 - 2.1292708308362620\,x + 0.3188427846453545$$
$$G_7^{(8)}(x) = - 40.9512567690213950\,x^8 - 18.0059654132476879\,x^7 + 74.7914024269316791\,x^6 + 29.1152459525899235\,x^5 - 41.1025853120910897\,x^4 -$$
$$- 12.7612278358498140\,x^3 + 6.9362371844559070\,x^2 + 1.3186139631742451\,x - 0.1737975302751013$$

$$G_8^{(8)}(x) = 14.2222222222222222\,x^8 + 7.1111111111111111\,x^7 - 24.8888888888388889\,x^6 - 10.6666666666666667\,x^5 + 13.3333333333333333\,x^4 + \\ + 4.4444444444444444\,x^3 - 2.2222222222222222\,x^2 - 0.4444444444444444\,x + 0.0555555555555556$$

$$\boldsymbol{n = 9}$$

$$x_{0,10}^{(9)} = \mp 1,\ x_{1,9}^{(9)} = \mp 0.9510565162951536,\quad x_{2,8}^{(9)} = \mp 0.8090169943749474,\quad x_{3,7}^{(9)} = \mp 0.5877852522924731,\ x_{4,6}^{(9)} = \mp 0.3090169943749474,\quad x_5^{(9)} = 0$$

$$G_0^{(9)}(x) = -25.6\,x^9 + 12.8\,x^8 + 51.2\,x^7 - 22.4\,x^6 - 33.6\,x^5 + 12x^4 + 8\,x^3 - 2\,x^2 - 0.5\,x + 0.05$$

$$G_1^{(9)}(x) = 74.2940936343118629\,x^9 - 33.5108350559986539\,x^8 - 153.2380594478580355\,x^7 + 61.8439613479976444\,x^6 + 102.6048933565493705\,x^5 - \\ - 34.4275534829989064\,x^4 - 24.7123897672419652\,x^3 + 5.8944271909999159\,x^2 + 1.5514622242382672\,x - 0.15$$

$$G_2^{(9)}(x) = -115.7157637463091708\,x^9 + 41.4216701119973078\,x^8 + 250.3922347278513054\,x^7 - 82.8433402239946157\,x^6 - 176.2259423445441500\,x^5 + \\ + 50.7882332579968032\,x^4 + 43.8370015647400724\,x^3 - 9.3665631459994953\,x^2 - 2.7875302017380569\,x + 0.25$$

$$G_3^{(9)}(x) = 145.8103686636837951\,x^9 - 33.5108350559986539\,x^8 - 330.2786192005221756\,x^7 + 72.1993788759969713\,x^6 + 248.3142541076252684\,x^5 - \\ - 49.9606797749978968\,x^4 - 67.8348353892290246\,x^3 + 11.4721359549995795\,x^2 + 4.4888318184421368\,x - 0.35$$

$$G_4^{(9)}(x) = -161.6320387756811030\,x^9 + 12.8\,x^8 + 376.2327944805154455\,x^7 - 28.8\,x^6 - 296.3353030956195480\,x^5 + 21.6\,x^4 + 88.9594471867271319\,x^3 - \\ - 6.0\,x^2 - 7.7248997959419264\,x + 0.45$$

$$G_5^{(9)}(x) = 161.6320387756811030\,x^9 + 12.8\,x^8 - 376.2327944805154455\,x^7 - 28.8\,x^6 + 296.3353030956195480\,x^5 + 21.6\,x^4 - 83.9594471867271319\,x^3 - \\ - 6.0\,x^2 + 7.7248997959419264\,x + 0.45$$

$$G_6^{(9)}(x) = -145.8103686636837951\,x^9 - 33.5108350559986539\,x^8 + 330.2786192005221756\,x^7 + 72.1993788759969713\,x^6 - 248.3142541076252684\,x^5 - \\ - 49.9606797749978968\,x^4 + 67.8348353892290246\,x^3 + 11.4721359549995795\,x^2 - 4.4888318184421368\,x - 0.35$$

$$G_7^{(9)}(x) = 115.7157637463091708\,x^9 + 41.4216701119973078\,x^8 - 250.3922347278513054\,x^7 - 82.8433402239946157\,x^6 + 176.2259423445441500\,x^5 + \\ + 50.7882332579968032\,x^4 - 43.8370015647400724\,x^3 - 9.3665631459994953\,x^2 + 2.7875302017380569\,x + 0.25$$

$$G_8^{(9)}(x) = -74.2940936343118629\,x^9 - 33.5108350559986539\,x^8 + 153.2380594478580355\,x^7 + 61.8439613479976444\,x^6 - 102.6048933565498705\,x^5 - \\ - 34.4275534829989064\,x^4 + 24.7123897672419652\,x^3 + 5.8944271909999159\,x^2 - 1.5514622242382672\,x - 0.15$$

$$G_9^{(9)}(x) = 25.6\,x^9 + 12.8\,x^8 - 51.2\,x^7 - 22.4\,x^6 + 33.6\,x^5 + 12\,x^4 - 8\,x^3 - 2\,x^2 + 0.5\,x + 0.05$$

$$\boldsymbol{n = 10}$$

$$x_{0,11}^{(10)} = \mp 1,\ x_{1,10}^{(10)} = \mp 0.9594929736144974,\quad x_{2,9}^{(10)} = \mp 0.8412535328311812,\quad x_{3,8}^{(10)} = \mp 0.6548607339452851,\quad x_{4,7}^{(10)} = \mp 0.4154150130018864, \\ x_{5,6}^{(10)} = \mp 0.1423148382732852$$

$$G_0^{(10)}(x) = 46.5454545454545455\,x^{10} - 23.2727272727272727\,x^9 - 104.7272727272727273\,x^8 + 46.5454545454545455\,x^7 + 81.4545454545454545\,x^6 - \\ - 30.5454545454545455\,x^5 - 25.4545454545454545\,x^4 + 7.2727272727272727\,x^3 + 2.7272727272727273\,x^2 - 0.4545454545454545\,x - \\ - 0.0454545454545455$$

$$G_1^{(10)}(x) = -135.8655277255677587\,x^{10} + 62.4292553463240722\,x^9 + 312.7870604148291228\,x^8 - 129.8137225597526631\,x^7 - 247.1894286150889487\,x^6 + 87.7487286026338969\,x^5 + 78.0316189737611127\,x^4 - 21.3564235239911889\,x^3 - 8.4039246039541106\,x^2 + 1.3557984984222466\,x + 0.1402015560205825$$

$$G_2^{(10)}(x) = 214.1785838727613527\,x^{10} - 81.7649359515027883\,x^9 - 511.8817552008095598\,x^8 + 180.9392015527680905\,x^7 + 419.5408431993107642\,x^6 - 130.9217831918802455\,x^5 - 135.9325299545364748\,x^4 + 33.7021330770758305\,x^3 + 14.8431234837376166\,x^2 - 2.2273427591881599\,x - 0.2482654004636990$$

$$G_3^{(10)}(x) = -275.1401649236678901\,x^{10} + 75.1408271155098807\,x^9 + 683.8639718648743012\,x^8 - 177.1999358192981999\,x^7 - 589.6338697461182711\,x^6 + 140.4908455771156486\,x^5 + 203.0105289396449264\,x^4 - 41.2652443604086746\,x^3 - 22.9875535567301049\,x^2 + 3.0153556688995270\,x + 0.3870874219970385$$

$$G_4^{(10)}(x) = 313.8115261340253159\,x^{10} - 44.6600365900566111\,x^9 - 802.8723931857961682\,x^8 + 110.2742143460265695\,x^7 + 723.7820749930313449\,x^6 - 94.3998421857599517\,x^5 - 268.6839051689462217\,x^4 + 32.1833144369452865\,x^3 + 35.0686238540055977\,x^2 - 3.4885590980643841\,x - 0.6059266263198686$$

$$G_5^{(10)}(x) = -327.0597438060111306\,x^{10} + 845.6607776683500626\,x^8 - 775.9083305713606876\,x^6 + 293.0576653292442238\,x^4 - 42.4950838086634522\,x^2 + 1.2447151884409842$$

$$G_6^{(10)}(x) = 313.8115261340253159\,x^{10} + 44.6600365900566111\,x^9 - 802.8723931857961682\,x^8 - 110.2742143460265695\,x^7 + 723.7820749930313449\,x^6 + 94.3998421857599517\,x^5 - 268.6839051689462217\,x^4 - 32.1833144369452865\,x^3 + 35.0686238540055977\,x^2 + 3.4885590980643841\,x - 0.6059266263198686$$

$$G_7^{(10)}(x) = -275.1401649236678901\,x^{10} - 75.1408271155098807\,x^9 + 683.8639718648743012\,x^8 + 177.1999358192981999\,x^7 - 589.6338697461182711\,x^6 - 140.4908455771156486\,x^5 + 203.0105289396449264\,x^4 + 41.2652443604086746\,x^3 - 22.9875535567301049\,x^2 - 3.0153556688995270\,x + 0.3870874219970385$$

$$G_8^{(10)}(x) = 214.1785838727613527\,x^{10} + 81.7649359515027883\,x^9 - 511.8817552008095598\,x^8 - 180.9392015527680905\,x^7 + 419.5408431993107642\,x^6 + 130.9217831918802455\,x^5 - 135.9325299545364748\,x^4 - 33.7021330770758305\,x^3 + 14.8431234837376166\,x^2 + 2.2273427591881599\,x - 0.2482654004636990$$

$$G_9^{(10)}(x) = -135.8655277255677587\,x^{10} - 62.4292553463240722\,x^9 + 312.7870604148291228\,x^8 + 129.8137225597526631\,x^7 - 247.1894286150889487\,x^6 - 87.7487286026338969\,x^5 + 78.0316189737611127\,x^4 + 21.3564235239911889\,x^3 - 8.4039246039541106\,x^2 - 1.3557984984222466\,x + 0.1402015560205825$$

$$G_{10}^{(10)}(x) = 46.5454545454545455\,x^{10} + 23.2727272727272727\,x^9 - 104.7272727272727273\,x^8 - 46.5454545454545455\,x^7 + 81.4545454545454545\,x^6 + 30.5454545454545455\,x^5 - 25.4545454545454545\,x^4 - 7.2727272727272727\,x^3 + 2.7272727272727273\,x^2 + 0.4545454545454545\,x - 0.0454545454545455$$

Построив, с целью сравнения, для той же функции $f(x) = e^x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ отрезок $S_5[f;\ x]$ разложения по $\{T_k(x)\}$, мы для отклонения $\Delta(x) = e^x - S_5[e^x;\ x]$ находим

$$L[S_5] = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\Delta(x)| = \Delta(1) = 0.0^4 48386$$

с оценкой на основе «валле-пуссеновского альтернанса» (см. [6]):

$$[S_5] - \rho < L - 0.0^4 41968 = 0.0^5 6418 > 132\ ^0/_{00} \text{ величины } \rho$$

$$(0.0^4 41968 = \Delta(-1)). \tag{15'}$$

Поступила в редакцию
3.07.1965

Цитированная литература

1. G. Meinardus. Über Tschebyscheffsche Approximationen. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1962, 9, № 4, 329—351.
2. G. Hornecker. Détermination approchée, à précision numérique élevée, du polynome de meilleure approximation, d'ordre n, au sens de Tchebicheff, d'une fonction bornée continue, sur un segment fini. C. r. Acad. sci. Paris, 1958, 246, 43—46.
3. R. Zurmühl. Zur angenäherten ganzrationalen Tschebyscheff-Approximation mit Hilfe trigonometrischer Interpolation. Numer. Math., 1964, 6, 1—5.
4. Е. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк. Несколько замечаний о рационально-полиномиальных чебышевских приближениях функций в сопоставлении с отрезками разложений по полиномам Чебышева. Укр. матем. ж., 1963, 15, № 1, 46—56.
5. Е. Я. Ремез. Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Киев, Изд-во АН УССР, 1957.
6. Е. Я. Ремез. О методе последовательных чебышевских интерполяций и о различных вариантах его реализации. Укр. матем. ж., 1960, 12, № 2, 170—180.
7. С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений. Т. I. М., Изд-во АН СССР, 1952.

УДК 518:517.949.12

О ЧИСЛЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ

Т. Ф. ДОЛГОПОЛОВА, В. К. ИВАНОВ

(Свердловск)

1. В настоящее время имеется довольно много работ, посвященных численному дифференцированию (см., например, [1] — [5]). В них обычно функция $f(x)$, которую необходимо продифференцировать, заменяется приближающим полиномом $p(x)$ и оценивается ошибка $|f'(x) - p'(x)|$. Этот прием может дать удовлетворительные результаты лишь при точном задании $f(x)$. Между тем часто вместо функции $f(x)$ мы знаем лишь ее приближение $f_\delta(x)$ с некоторой погрешностью. Подобное положение возникает во многих задачах, связанных с обработкой результатов наблюдений. В качестве одного из примеров можно указать на задачу нахождения теплоемкости $c_p(t)$ газа в зависимости от температуры t. Экспериментально находят теплосодержание

$$q(t) = \int_{t_0}^{t} c_p(\tau)\, d\tau,$$

а теплоемкость определяют путем численного дифференцирования $c_p(t) = q'(t)$.

Но численное дифференцирование, в отличие от численного интегрирования, принадлежит к некорректным задачам. Всегда можно указать такие случаи, когда при сколь угодно малом отклонении $f_\delta(x)$ от $f(x)$ их производные отличаются друг