Ю. Е. Егоров, А. И. Комеч, Об аттракторах и асимптотике решений в нелинейной задаче Ламба,
*Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, номер 5, 80–88

https://www.mathnet.ru/vmumm2059

Автор приносит благодарность А. А. Ильюшину, Р. А. Васину и П. А. Моссаковскому за полезное обсуждение представленных экспериментальных методик.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М., 1963.
2. Муравлев А. В. Построение материальных функций некоторых двухзвенных процессов в экспериментах с толстой трубкой. Деп. в ВИНИТИ 23.01.89, № 540 В-89. М., 1989.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. М., 1948.
4. Nadai A. Plasticity. N. Y., 1931.
5. Муравлев А. В. Об определении свойств упругопластических материалов при сложном нагружении из экспериментов на толстостенных трубчатых образцах//Некоторые задачи о поведении вязких и упругопластических конструкций. М., 1989. 67—73.
6. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении//Упругость и неупругость. Вып. 1. М., 1971. 59—126.

Поступила в редакцию
31.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 5

УДК 517.94

**Ю. Е. Егоров, А. И. Комеч**

## ОБ АТТРАКТОРАХ И АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ЛАМБА

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение решений системы

$$\mu \ddot{u}(x,\ t) = Tu''(x,\ t),\ \ x \in R\setminus 0,\ \ t \in R, \tag{1}$$

$$m\ddot{y}(t) = F(y(t)) + T[u'(0+,\ t) - u'(0-,\ t)],$$

$$m \geqslant 0,\ \ y(t) \equiv u(0\pm,\ t), \tag{2}$$

$\mu, T>0$. Точкой обозначается (обобщенная) производная по $t$, штрихом — по $x$. Система (1), (2) описывает взаимодействие одномерного осциллятора массы $m$ и однородной бесконечной струны с натяжением $T$ и постоянной линейной плотностью $\mu$.

Формально систему (1), (2) можно записать в виде нелинейного волнового уравнения

$$(1 + m\delta(x))\,\ddot{u}(x,\ t) = u''(x,\ t) + \delta(x)\,F(u(x,\ t)).$$

Асимптотическое поведение решений гиперболических уравнений с диссипацией в ограниченной области при $t \to \infty$ достаточно хорошо изучено (см., например, книгу А. В. Бабина, М. И. Вишика [1] и библиографию к ней).

Асимптотика решений нелинейных волновых уравнений во всем пространстве без диссипации исследовалась в [2—7]. В работе Ламба [7] система (1), (2) рассматривалась в линейном случае, когда $F(y) = -ky$. В [2—7] доказывалась локальная сходимость решений к нулевому решению при $t \to \infty$.

В [8—10] изучалась сходимость решений системы типа (1), (2) при $t \to \infty$ к аттрактору, состоящему из стационарных состояний. При этом аттрактор может быть бесконечным в отличие от работ [2—7]. Для некоторого специального класса начальных данных было доказано, что решение существует, единственно и стремится при $t\to+\infty$ к одному из стационарных решений равномерно на каждом компакте. Аналогичная асимптотика имеет место и при $t\to-\infty$.

В данной работе мы обобщаем этот результат на все решения конечной энергии. При этом на потенциал силового поля $F$, действующего на осциллятор, налагается дополнительное условие невырожденности. Это один из основных результатов работы. Второй основной результат — доказательство необходимости введенного условия невырожденности потенциала для стабилизации всех решений конечной энергии. А именно, если это условие нарушено, в работе строятся примеры решений конечной энергии, которые не сходятся при $t\to\pm\infty$ ни к какому стационарному решению.

**1. Постановка задачи.** Предполагается, что силовое поле $F$ — локально липшицева функция, следовательно, его потенциал $V(y)=-\int F(y)dy\in C^1(R)$. Кроме того, потенциал предполагается ограниченным снизу: существует константа $V_0\in R$, для которой

$$V(y)\geqslant V_0 \text{ при любом } y\in R. \tag{3}$$

Введем класс функций $\mathcal{E}$, в котором будем искать решение системы (1), (2).

Определение 1. Функция $u(x,t)\in\mathcal{E}$, если: 1) $u\in C(R^2)$ и 2) $\dot u,\ u'\in L^2_{\mathrm{loc}}(R^2)$.

Задача Коши состоит в отыскании решений $u\in\mathcal{E}$ для системы (1), (2), удовлетворяющих заданным начальным условиям. Эти условия различаются в случаях $m>0$ и $m=0$:

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \dot u|_{t=0}=u_1(x),\ \dot y(0)=y_1, \tag{4}$$

если $m>0$, и

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \dot u|_{t=0}=u_1(x), \tag{5}$$

если $m=0$.

Укажем, как понимаются уравнение (2) и условия (4), (5) для решений $u\in\mathcal{E}$ уравнения (1). Как известно, для $u\in D'(R^2)$ уравнение (1) эквивалентно разложению

$$u(x,\ t)=f_\pm(x-at)+g_\pm(x+at),\ \pm x>0, \tag{6}$$

где $a=\sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, а $f_\pm,\ g_\pm\in D'(R)$. Дифференцируя, получим

$$\dot u(x,\ t)=-af'_\pm(x-at)+ag'_\pm(x+at),$$
$$u'(x,\ t)=f'_\pm(x-at)+g'_\pm(x+at). \tag{7}$$

Исходя из этих соотношений, определим правую часть (2) и условия (4) и (5) следующим образом.

Определение 2. Для функций вида (6) полагаем в уравнении (2)

$$u'(0\pm,\ t)\equiv f'_\pm(-at)+g'_\pm(at). \tag{8}$$

Замечание 1. Из условия $u\in\mathcal{E}$ следует, что $f'_\pm,\ g'_\pm\in L^2_{\mathrm{loc}}(R)$. Поэтому при $m\neq0$ из (2) и (8) получаем $\ddot y(t)\in L^2_{\mathrm{loc}}(R)$, следовательно, $y(t)\in C^1(R)$.

Определение 3. Для решений $u \in \mathcal{E}$ системы (1), (2) при любом $t \in R$ функции $\dot{u}(\cdot, t)$, $u'(\cdot, t)$ определяются формулами (7).

Ввиду этого определения и замечания 1 начальные условия (4) и (5) имеют смысл.

**2. Разрешимость задачи Коши.** При $m>0$ рассматривается система (1), (2) с начальными условиями (4).

Введем фазовое пространство системы, для которого $\mathcal{E}$ будет соответствующим пространством траекторий.

Определение 4. Обозначим через $E$ совокупность троек $(u_0(\cdot), u_1(\cdot), y_1)$, где: 1) $u_0'(\cdot) \in L^2(R)$; 2) $u_1(\cdot) \in L^2(R)$; 3) $y_1 \in R$.

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(R)$. Пространство $E$ является банаховым с нормой

$$\|(u_0(\cdot),\ u_1(\cdot),\ y_1)\|_E = |u_0(0)| + \|u_0'\| + \|u_1\| + |y_1|.$$

Предложение 1. *Пусть* $m>0$. *Тогда*:

1) *для любых начальных условий* $(u_0(\cdot), u_1(\cdot), y_1) \in E$ *существует единственное решение* $u(x, t) \in \mathcal{E}$ *задачи* (1), (2), (4);

2) *при любом* $t \in R$ *отображение* $S_t: (u_0(\cdot), u_1(\cdot), y_1) \to (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t), \dot{y}(t))$ *непрерывно из* $E$ *в* $E$;

3) *для решений* $u \in \mathcal{E}$ *системы* (1), (2) *справедлив закон сохранения энергии*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mu \frac{(\dot{u}(x,\ t))^2}{2} + T \frac{(u'(x,\ t))^2}{2}\right] dx + m \frac{\dot{y}^2(t)}{2} +$$
$$+ V(y(t)) \equiv \text{const},\quad t \in R. \tag{9}$$

В случае $m=0$ задания начальной скорости в точке $x=0$ не требуется, поэтому фазовое пространство будет другим.

Определение 5. Через $E_0$ обозначим множество пар $(u_0(\cdot), u_1(\cdot))$, где $u_0'(\cdot)$, $u_1(\cdot) \in L^2(R)$.

С нормой $\|(u_0(\cdot),\ u_1(\cdot))\|_{E_0} = |u_0(0)| + \|u_0'(\cdot)\| + \|u_1(\cdot)\|$ пространство $E_0$ становится банаховым.

Предложение 2. *Пусть* $m=0$, $(u_0(\cdot), u_1(\cdot)) \in E_0$. *Тогда*:

1) *существует единственное решение* $u \in \mathcal{E}$ *задачи* (1), (2), (5);

2) $S_t^0$: $(u_0(\cdot), u_1(\cdot)) \to (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t))$ — *непрерывное отображение из* $E_0$ *в* $E_0$ *для любого* $t \in R$;

3) *для решений* $u \in \mathcal{E}$ *системы* (1), (2) *выполняется закон сохранения энергии* (9).

Предложения, подобные 1 и 2, были доказаны в [10] для решений $u(x, t)$, постоянных при $|x| > \text{const} + a|t|$. Для этого система (1), (2) с помощью разложения (6) сводилась к уравнению

$$m\ddot{y}(t) = F(y(t)) + 2T\left[h(t) - \frac{1}{a}\dot{y}(t)\right], \tag{10}$$

где $h(t) \equiv g'_+(at) - f'_-(-at) \in L^2(R_+)$, а функции $f_-$ и $g_+$ находились при $z>0$ по формулам Даламбера

$$f_-(-z) = \frac{u_0(-z)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-z}^{0} u_1(\xi)\, d\xi,\quad g_+(z) = \frac{u_0(z)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{0}^{z} u_1(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Доказательство предложений 1 и 2 в нашем случае почти дословно совпадает с доказательством аналогичных теорем в работе [10]. Отличие состоит в выводе следующей априорной оценки.

Лемма 1. *При $m=0$ всякое непрерывное решение уравнения* (10) *ограничено функцией* $\mathrm{const}\cdot(t^{1/2}+1)$.

Утверждение леммы следует из конечности интеграла диссипации:

$$\int_0^{+\infty} \dot{y}^2(\xi)\,d\xi = J < +\infty. \tag{12}$$

Это важное соотношение мы докажем для всех $m \geqslant 0$.

Обозначим через $E(t) = m\frac{\dot{y}^2(t)}{2} + V(y(t))$ полную энергию осциллятора. Поскольку $V \in C^1$, функция $V(y(t))$ абсолютно непрерывна. При $m>0$ это вытекает из замечания 1, при $m=0$ — это следствие уравнения (10). Поэтому, умножая (10) на $\dot{y}(t)$ и интегрируя от $\tau$ до $t$, получим

$$E(t) = E(\tau) - \frac{2T}{a}\int_\tau^t \dot{y}^2(\xi)\,d\xi + 2T\int_\tau^t \dot{y}(\xi)\,h(\xi)\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant E(\tau) - \frac{2T}{a}\int_\tau^t \dot{y}^2(\xi)\,d\xi + 2T\left(\frac{1}{2a}\int_\tau^t \dot{y}^2(\xi)\,d\xi + \frac{a}{2}\int_\tau^t h^2(\xi)\,d\xi\right). \tag{13}$$

Отсюда согласно условию (3) на потенциал при $\tau=0$ имеем

$$\int_0^t \dot{y}^2(\xi)\,d\xi \leqslant \frac{a}{T}\left[E(0) + aT\int_0^{+\infty} h^2(\xi)\,d\xi - V_0\right],$$

что и дает нам (12).

Лемма 1 обеспечивает существование глобального решения системы (1), (2) в случае $m=0$. Из нее следует также п. 2 предложения 2.

**3. Стационарные решения. Теорема о стабилизации.** Найдем стационарные решения $u(x,t) \equiv u(x) \in \mathcal{E}$ системы (1), (2). Из (1) имеем

$$0 = u''(x) \Rightarrow u(x) = a_\pm x + b_\pm, \quad \pm x > 0.$$

Ввиду конечности энергии $u'(x) = a_\pm \in L^2(R_\pm)$, поэтому $a_\pm = 0$, а из условия непрерывности функции $u(x)$ в нуле вытекает, что $b_+ = b_- = b$. Следовательно, все стационарные решения постоянны. Но тогда из (2) получаем

$$F(b) = 0. \tag{14}$$

Обратно, всякая функция $u(x,t) \equiv b$, если $b$ удовлетворяет условию (14), является стационарным решением системы (1), (2).

Таким образом, $u(x)$ — стационарное решение системы (1), (2) тогда и только тогда, когда $u(x) \equiv b \in S$, где $S$ — множество нулей функции $F$.

Потребуем, чтобы потенциальная энергия удовлетворяла дополнительному условию

$$V(y) \to +\infty \text{ при } |y| \to \infty. \tag{15}$$

Замечание 2. Так как $V(\cdot) \in C^1(R)$ и выполнено (15), то множество $S$ непусто.

Замечание 3. Из закона сохранения энергии (9) следует, что функция $V(y(t))$ ограничена сверху для всех $t \in R$. Ввиду (15) это означает, что $y(t)$ — ограниченная функция.

Нам понадобится

Определение 6. Потенциал $V(y)$ называется невырожденным, если $F(y) \not\equiv 0$ ни на каком непустом интервале $b_1 < y < b_2$, и вырожденным в противном случае.

Основной результат этой работы состоит в доказательстве того, что множество стационарных решений является точечным аттрактором [1] системы (1), (2), но не в топологии пространства $E$, а в более слабой топологии равномерной сходимости на компактах.

Теорема 1. *Пусть невырожденный потенциал $V(y)$ удовлетворяет (15) и $u(x,t)$ — решение системы (1), (2) класса $\mathcal{E}$. Тогда существуют числа $b_\pm \in S$, для которых при любом $r>0$*

$$u(x,\ t) \to b_\pm \text{ равномерно для } |x|<r \text{ при } t \to \pm\infty.$$

Доказательство. Докажем теорему для случая $t \to +\infty$. Случай $t \to -\infty$ рассматривается аналогично.

Волны $f_\pm$ и $g_\pm$, входящие в разложение Даламбера (6), при $z>0$ связаны согласно (2) соотношениями

$$f_+(-z) = y\left(\frac{z}{a}\right) - g_+(z),\quad g_-(z) = y\left(\frac{z}{a}\right) - f_-(-z). \tag{16}$$

При $x \in [0,\ r)$ и $t > r/a$, пользуясь (6), (11) и (16), получим

$$u(x,\ t) = f_+(x-at) + g_+(x+at) = y\left(t - \frac{x}{a}\right) -$$

$$- g_+(at-x) + g_+(at+x) = y\left(t - \frac{x}{a}\right) +$$

$$+ \frac{u_0(at+x) - u_0(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{at+x} u_1(\xi)\, d\xi =$$

$$= y\left(t - \frac{x}{a}\right) + o(1) \text{ при } t \to +\infty,$$

так как $u_0'$, $u_1 \in L^2(R)$. Аналогично при $-r < x < 0$, $t \to +\infty$ имеем

$$u(x,\ t) = y\left(t + \frac{x}{a}\right) + o(1).$$

Эти две формулы объединим в одну:

$$u(x,\ t) = y\left(t - \frac{|x|}{a}\right) + o(1) \text{ при } t \to +\infty \tag{17}$$

равномерно по $x \in [-r,\ r]$. Утверждение теоремы вытекает теперь из следующей леммы.

Лемма 2. *Если потенциал $V$ невырожден, то существует такое число $b_+ \in S$, что*

$$y(t) \to b_+ \text{ при } t \to +\infty. \tag{18}$$

*При этом если $m>0$, то*

$$\dot{y}(t) \to 0,\ t \to +\infty. \tag{19}$$

Доказательство. Докажем (18). Пусть $m=0$. Тогда из (13) получаем

$$|V(y(t))-V(y(\tau))|=2T\left|-\frac{1}{a}\int_{\tau}^{t}\dot{y}^2(\xi)\,d\xi+\int_{\tau}^{t}h(\xi)\,\dot{y}(\xi)\,d\xi\right|\to 0$$

при $\tau, t\to+\infty$, поскольку $\dot{y}(\cdot), h(\cdot)\in L^2(R_+)$. Таким образом, $V(y(t))$ имеет предел при $t\to+\infty$, а согласно условию невырожденности потенциала это означает существование предела у функции $y(t)$.

Рассмотрим теперь случай $m>0$. Предположим, что при $t\to+\infty$ функция $y(t)$ не стремится ни к какому предельному значению. Тогда по замечанию 3 найдутся интервал $(b^-, b^+)$ и последовательность моментов $t_k^\pm \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$, такие, что $y(t_k^\pm)=b^\pm$, $k=1, 2, 3\ldots$ Мы можем считать, что $t_k^-<t_k^+<t_{k+1}^-$ и $y(t)\in(b^-, b^+)$ при $t\in[t_k^-, t_k^+]$ для всех $k$. Обозначим $\beta=(b^-, b^+)$, $\Delta_k=[t_k^-, t_k^+]$. Пусть $b$ — произвольная точка интервала $\beta$. Тогда существует последовательность моментов времени $\{t_k(b)\in\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $y(t_k)=b$. Из (13) при $i<j$ получаем

$$\left|\frac{m\dot{y}^2(t_i)}{2}-\frac{m\dot{y}^2(t_j)}{2}\right|=\left|-\frac{2T}{a}\int_{t_i}^{t_j}\dot{y}^2(\xi)\,d\xi+2T\int_{t_i}^{t_j}\dot{y}(\xi)\,h(\xi)\,d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2T}{a}\int_{t_i^-}^{t_j^+}\dot{y}^2(\xi)\,d\xi+2T\int_{t_i^-}^{t_j^+}|\dot{y}(\xi)\,h(\xi)|\,d\xi\to 0,\ i,\ j\to\infty. \tag{20}$$

Поэтому последовательность $\dot{y}^2(t_k(b))$ имеет при $k\to+\infty$ предел, который мы обозначим $A(b)$. Очевидно, значение $A(b)$ неотрицательно и не зависит от выбора последовательности $t_k(b)$.

Предложение 3. *Для всех $b\in\beta$ выполняется* $A(b)=0$.

Доказательство. Предположим, что, напротив, существует точка $b_0\in\beta$, для которой $A(b_0)=A_0>0$. Тогда в точке $b_0$ функция $A:\beta\to R$ непрерывна. Чтобы показать это, возьмем произвольное число $\varepsilon\in(0, A_0)$ и найдем окрестность $U$ точки $b_0$, для которой $|A(b)-A_0|<$ $<\varepsilon$ как только $b\in U$. Из (20) следует, что начиная с некоторого номера $k_0$ для каждой точки $b$ интервала $\beta$ выполняется неравенство

$$|\dot{y}^2(t_k(b))-A(b)|<\frac{\varepsilon}{4},\quad k\geqslant k_0, \tag{21}$$

справедливое и для точки $b_0$. Поскольку $\varepsilon<A_0=A(b_0)$, при $k=k_0$ имеем $|\dot{y}(t_{k_0}(b_0))|>0$. Это с учетом замечания 1 позволяет нам выбрать окрестность $W$ точки $t_{k_0}(b_0)$, в которой функция $y(t)$ строго монотонна и, кроме того,

$$|\dot{y}^2(t)-\dot{y}^2(t_{k_0}(b_0))|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

Функция $y(t)$ отображает интервал $W$ на окрестность точки $b_0$, которая и есть искомая окрестность $U$. Действительно, для любой точки $b\in U$ мы можем взять $t^{(b)}\in W$ и тогда в силу (21) и (22), где полагаем $k=k_0$ и $t=t_{k_0}(b)$, получим $|A(b)-A_0|<\varepsilon$.

Из доказанной непрерывности функции $A$ в точке $b_0$ следует, что в некотором интервале $\beta_0\ni b_0$ выполняются неравенства $\frac{A_0}{2}<A(b)<$

$< 2A_0$, $b \in \beta_0$. Учитывая (21), отсюда имеем

$$\frac{A_0}{4} < \dot{y}^2(t_k(b)) < 4A_0, \tag{23}$$

если $k \geqslant k_0$ и $b \in \beta_0$.

Теперь для каждого $k \geqslant k_0$ мы можем найти такой интервал $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k$ временно́й оси, для которого выполняется условие (23), причем $y(\tilde{\Delta}_k) \supset \beta_0$. Например, в качестве $\tilde{\Delta}_k$ можно взять интервалы монотонности функции $y(t)$, содержащие $t_k(b_0)$. Из правого неравенства (23) получим оценку длины интервалов $\tilde{\Delta}_k$:

$$|\tilde{\Delta}_k| > \frac{|\beta_0|}{2\sqrt{A_0}}.$$

Отсюда из левого неравенства (23) находим

$$\int_0^{+\infty} \dot{y}^2(\xi)\,d\xi \geqslant \sum_{k=k_0}^{n} \int_{\tilde{\Delta}k} \dot{y}^2(\xi)\,d\xi > \sum_{k=k_0}^{n} |\tilde{\Delta}_k| \frac{A_0}{4} > \frac{(n-k_0)\,|\beta_0|\sqrt{A_0}}{8}$$

для всех $n \geqslant k_0$, что противоречит конечности интеграла диссипации (12). Предложение доказано.

Для произвольной точки $b \in \beta$ и соответствующей последовательности $t_k(b) \in \Delta_k$ соотношение (13) запишется в следующем виде:

$$m\,\frac{\dot{y}^2(t_k(b))}{2} + V(b) = E(0) - \frac{2T}{a} \int_0^{t_k(b)} \dot{y}^2(\xi)\,d\xi + 2T \int_0^{t_k(b)} h(\xi)\,\dot{y}(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Из предложения 3 вытекает, что $\dot{y}(t_k(b)) \to 0$ при $k \to \infty$. Переходя в (24) к пределу при $k \to \infty$ и учитывая (12), получим

$$V(b) = E(0) - \frac{2T}{a} J + 2T \int_0^{+\infty} h(\xi)\,\dot{y}(\xi)\,d\xi$$

для каждой точки $b \in \beta$. Но это противоречит невырожденности потенциала $V(y)$. Таким образом, при $t \to +\infty$ функция $y(t)$ стремится к какому-то значению $b$, т. е. утверждение (18) доказано.

Докажем (19). Из (13) получаем

$$m\,\frac{\dot{y}^2(t)}{2} \to E(0) - \frac{2T}{a} J + 2T \int_0^{+\infty} h(\xi)\,\dot{y}(\xi)\,d\xi - V(b)$$

при $t \to +\infty$. Но тогда $\dot{y}(t)$ имеет предел при $t \to +\infty$. Однако ввиду доказанного утверждения (18) этот предел может быть равен только нулю.

Нам осталось показать, что $F(b) = 0$. Для этого проинтегрируем (10) от 0 до $t$:

$$m(\dot{y}(t) - y_1) = \int_0^t F(y(\xi))\,d\xi + 2T \int_0^t h(\xi)\,d\xi - \frac{1}{a}(y(t) - y(0)),$$

где $y_1$ — начальное значение $\dot{y}$ из (4). Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to +\infty$ и учитывая доказанные соотношения (18) и (19), получаем

$$\left| \int_0^{+\infty} F(y(\xi))\, d\xi \right| < +\infty.$$

Следовательно, $F(b) = \lim_{t\to+\infty} F(y(t)) = 0$. Доказательство леммы 2, а с ней и основной **теоремы** закончено.

Замечание 4. Условие роста потенциала на бесконечности использовалось нами лишь при доказательстве стабилизации в случае $m>0$. При $m=0$ теорема 1 остается справедливой, если вместо (15) потребовать, чтобы функция $V(y)$ не имела конечного предела при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$.

**4. Отсутствие стабилизации в случае вырожденного потенциала.** Покажем, что требование невырожденности потенциальной энергии $V$ внешнего силового поля является необходимым для стабилизации всех решений системы (1), (2).

Теорема 2. *Пусть $V$ — произвольный вырожденный потенциал. Тогда существует решение $u(x,t) \in \mathcal{E}$ системы* (1), (2), *которое в каждой фиксированной точке $x$ не имеет предела при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Пусть функция $V$ постоянна на интервале $(b_1, b_2)$. Так как значение решения $u(x,t)$ в точке $x$ выражается через значение $y(t)=u(0,t)$ по формуле (17), достаточно доказать отсутствие предела в точке $x=0$. Это мы сделаем, опираясь на следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $F(z)\equiv 0$ на некотором непустом интервале $z \in (b_1, b_2)$. Тогда найдется такая функция $h \in L^2(R_+)$, что решение $y(t)$ уравнения* (10), *удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=b_1$, $\dot y(0)=0$, не имеет предела при $t \to +\infty$.*

Доказательство леммы. Разобьем полупрямую $t \geqslant 0$ на отрезки $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_k = \sum_{i=0}^{k} i^2$, $k=0, 1, 2, \ldots,$ и определим функцию $v(t)$ следующим образом:

$$v(t_k)=0, \quad v\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) = (-1)^k \frac{2(b_2-b_1)}{(k+1)^2}, \quad k=0, 1, 2, \ldots,$$

а на отрезках $\left[t_k, \frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right]$ и $\left[\frac{t_k+t_{k+1}}{2}, t_{k+1}\right]$ функция $v(t)$ линейна.

Функция $v(t)$ обладает следующими свойствами:

*а*) $\int_{\Delta_k} v(t)\, dt = (-1)^k (b_2-b_1)$;

*б*) $v(\cdot) \in L^2(R_+)$;

*в*) $\dot v(\cdot) \in L^2(R_+)$.

Действительно, прямое вычисление дает $\int_{\Delta_k} v^2(t)\, dt = \frac{4(b_2-b_1)^2}{3(k+1)^2}$ и $\int_{\Delta_k} \dot v^2(t)\, dt = \frac{16(b_2-b_1)^2}{(k+1)^6}$, откуда получаем свойства *б* и *в*.

Покажем теперь, что функция

$$y(t)=b_1+\int_0^t v(\xi)\,d\xi \tag{25}$$

при $t\geqslant 0$ является решением уравнения (10) при некоторой $h\in L^2(R_+)$.

Из свойства *а* следует, что $y(t)\in[b_1, b_2]$ для всех $t\geqslant 0$, поэтому $F(y(t))\equiv 0$, $t\geqslant 0$. Подставляя (25) в (10), найдем, что при $h(t)=$ $=\frac{m}{2T}\dot{v}(t)+\frac{1}{a}v(t)$ функция $y(t)$ удовлетворяет (10). Из свойств *б* и *в* получаем, что $h\in L^2(R_+)$. При этом решение $y(t)$ совершает колебания между значениями $b_1$ и $b_2$, не стремясь при $t\to+\infty$ ни к какому пределу. Это вытекает из свойства *а*. Лемма доказана.

Положим теперь

$$u_0(x)=b_1+\int_0^x u_0'(\xi)\,d\xi,\ u_1(x)\equiv 0,\ y_1=0, \tag{26}$$

где $u_0'(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 2h\left(\frac{x}{a}\right), & x>0,\end{cases}$ а функция $h$ построена в лемме 3. Тройка начальных условий $(u_0(\cdot), u_1(\cdot), y_1)$ принадлежит $E$ (в случае $m=$ $=0$ имеем $(u_0(\cdot), u_1(\cdot))\in E_0$). Пусть $u(x,t)$ — решение системы (1), (2), удовлетворяющее этим начальным условиям. Тогда, как следует из (11) и (26), $y(t)\equiv u(0,t)$ удовлетворяет уравнению (10) с построенной в лемме 3 функцией $h$. Кроме того, при $t=0$ получаем $y(0)=u_0(0)=$ $=b_1$ и $\dot{y}(0)=0$. Следовательно, по лемме 3 функция $y(t)$ не имеет предела при $t\to+\infty$. Теорема доказана.

Замечание 5. Можно показать, что построенное в теореме 2 решение $u(x,t)$ в каждой фиксированной точке не имеет предела и при $t\to-\infty$.

Работа выполнена при частичной поддержке Франко-Русского центра им. А. М. Ляпунова при МГУ и РФФИ (грант № 96—01—00527).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М., 1989.
2. Segal I. Dispersion for nonlinear relativistic wave equations//Ann. sci. Ecole norm. super. 1968. N 1. 459—497.
3. Strauss W. A. Decay and asymptotics for $\Box u=F(u)$//J. Funct. Anal. 1968. N 2. 409—457.
4. Morawetz C. S., Strauss W. A. Decay and scattering of solutions of a nonlinear relativistic wave equation//Communs Pure and Appl. Math. 1972. N 25. 1—31.
5. Hörmander L. On the fully nonlinear Cauchy problem with small data//Microlocal analysis and nonlinear waves (Minneapolis, MN, 1988—1989). IMA Vol. Math. Appl. N. Y., 1991. **30.** 51—81.
6. Klainerman S. Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations//Arch. Ration Mech. and Anal. 1982. N 78, 73—98.
7. Lamb H. On a peculiarity of the wave-system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium//Proc. London Math. Soc. 1900. **32.** 208—211.
8. Комеч А. И. О стабилизации взаимодействия струны с осциллятором//Успехи матем. наук. 1991. **46,** № 6. 166—167.
9. Комеч А. И. О стабилизации взаимодействия струны с нелинейным осциллятором//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1991. № 6. 35—41.
10. Komech A. I. On the stabilization of string-oscillators interaction//Russ. J. Math. Phys. 1995. 3, N 2. 227—248.


Поступила в редакцию
16.10.95