А. Р. Халиуллина, Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей, *Чебышевский сб.*, 2013, том 14, выпуск 3, 142–146

https://www.mathnet.ru/cheb300

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.579

# КОНГРУЭНЦИИ ПОЛИГОНОВ НАД ПОЛУГРУППАМИ ПРАВЫХ НУЛЕЙ

А. Р. Халиуллина (г. Москва)

**Аннотация**

Получено полное описание конгруэнций полигонов над полугруппами правых нулей.

Ключевые слова: полигон, конгруэнция, полугруппа правых нулей.

# CONGRUENCES OF ACTS OVER RIGHT ZERO SEMIGROUP

A. R. Khaliullina (Moscow)

**Abstract**

A complete description of the congruences of acts over right zero semigroup is obtained.

Keywords: act, congruence, right zero semigroup.

*Правый полигон* над полугруппой $S$ (или *правый $S$-полигон*; см. [1]) — это множество $X$, на котором задано действие полугруппы $S$, т.е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Двойственным образом определяется левый полигон. *Конгруэнцией (правого) полигона* $X$ над полугруппой $S$ называется такое отношение эквивалентности $\rho$ на $X$, что $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$ при всех $x, y \in X$, $s \in S$. Наименьшей конгруэнцией является отношение равенства $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Целью данной работы является описание в теоретико-множественных терминах всех конгруэнций правых полигонов над полугруппами правых нулей. Разумеется, двойственным образом получается описание левых конгруэнций над полугруппами левых нулей. Из полученного описания нельзя получить описание конгруэнций правых полигонов над полугруппами левых нулей (так как такие полигоны устроены совершенно иначе). Попутно мы получаем описание главных конгруэнций. Кроме того, мы приводим простые примеры отношений эквивалентности на рассматриваемых правых полигонах, которые заведомо будут являться конгруэнциями.

Так как в данной работе рассматриваться будут только правые полигоны, мы часто слово “правый” будем опускать и называть их просто *полигонами.* Копроизведением $\coprod_{i\in I} X_i$ семейства полигонов $\{X_i \,|\, i \in I\}$ над полугруппой $S$ назовём дизъюнктное объединение этих полигонов (если $X_i$ имеют между собой непустые пересечения, то возьмём их изоморфные попарно не пересекающиеся копии). Полигон $X$ называется *конеразложимым*, если он не разлагается в копроизведение других полигонов.

Теорема 1. *Всякий полигон является копроизведением конеразложимых полигонов.*

Доказательство. Пусть $X$ — полигон над полугруппой $S$. Обозначим через $\sigma$ наименьшее отношение эквивалентности на множестве $X$, содержащее все пары $(x, xs)$, где $x \in X$, $s \in S$. Множество $X$ разбивается на классы эквивалентности: $X = \bigcup\{X_i \,|\, i \in I\}$. Докажем, что каждое $X_i$ — подполигон. Если $x \in X_i$ и $s \in S$, то по определению $(x, xs) \in \sigma$, а значит $xs \in X_i$. Следовательно, $X = \coprod\{X_i \,|\, i \in I\}$. Осталось доказать, что каждое $X_i$ конеразложимо. Пусть $X_i = A \coprod B$, где $A, B$ — подполигоны. Возьмём элементы $a \in A$, $b \in B$. Так как $(a, b) \in \sigma$, то существуют элементы $a = u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k = b \in X_i$ такие, что пары $(u_j, u_{j+1})$ имеют вид $(x, xs)$ или $(xs, x)$. Мы имеем $u_1 \in A$, $u_k \in B$. Тогда найдётся такое $j$, что $u_j \in A$, $u_{j+1} \in B$. Мы имеем: $u_j = u_{j+1}s$ или $u_{j+1} = u_js$. Если $u_j = u_{j+1}s$, то $u_j \in Bs \subseteq B$, т.е. $u_j \in B$, что невозможно Если $u_{j+1} = u_js$, то мы получаем, что $u_{j+1} \in A$, что также невозможно. $\square$

Замечание. *Всякий полигон $X$ над полугруппой $S$ можно рассматривать как граф с множеством вершин $X$ и рёбрами $(x, xs)$, где $x \in X$, $s \in S$. Тогда разложение $X$ в копроизведение конеразложимых полигонов будет соответствовать разложению графа $X$ на компоненты связности.*

*Главной конгруэнцией* $\rho_{a,b}$ полигона $X$ над полугруппой $S$ называется конгруэнция, порождённая парой $(a, b)$, где $a, b \in X$ и $a \neq b$. Нетрудно видеть, что любая конгруэнция является точной верхней гранью некоторой совокупности главных конгруэнций: $\rho = \bigvee_\alpha \rho_{a_\alpha, b_\alpha}$. Таким образом, главные конгруэнции можно рассматривать как “строительный материал ”для построения всех конгруэнций.

Опишем главные конгруэнции произвольного правого полигона над полугруппой правых нулей. Строение таких полигонов было описано в [2], приведём формулировку теоремы.

Теорема 2. *([2], Corollary 10). Пусть $X$ и $S$ — непустые множества, $\sigma$ — отношение эквивалентности на $X$. Пусть для каждого $s \in S$ задано подмножество $Y_sX$, причём $|Y_s \cap x\sigma| = 1$ для всех $x \in X$, $s \in S$ (здесь $x\sigma$ обозначает $\sigma$-класс, содержащий элемент $x$). Положим $st = t$ для всех $s, t \in S$ и $xs = y$, где $y$ — единственный элемент множества $Y_s \cap x\sigma$, для $x \in X$, $s \in S$. Тогда $S$ будет полугруппой правых нулей, а $X$ — правым $S$-полигоном. Кроме того, всякий правый полигон над полугруппой правых нулей изоморфен полигону, построенному таким образом.*

Пусть $S$ — полугруппа правых нулей, $X$ — правый полигон над $S$. Пусть

$\sigma$ и $Y_s$ $(s \in S)$ имеют тот же смысл, что в предыдущей теореме. Единственный элемент множества $Y_s \cap xs$ обозначим через $x_s$. Пусть $K$, $K'$ — различные классы эквивалентности отношения $\sigma$ и $a_s$ — единственный элемент множества $Y_s \cap K$, $a'_s$ - единственный элемент из $Y_s \cap K'$. Обозначим через $\rho_{K,K'}$ наименьшее отношение эквивалентности на множестве $X$, содержащее все пары $(a_s, a'_s)$ при $s \in S$. По-другому $\rho_{K,K'}$ можно охарактеризовать на языке теории графов. Рассмотрим двудольный граф $\Gamma$, у которого множеством вершин является множество $K \cup K'$, а множество рёбер — это множество пар $(a_s, a'_s)$, $s \in S$. Классы эквивалентности отношения $\rho_{K,K'}$ — это в точности компоненты связности графа $\Gamma$.

Теорема 3. *Пусть $S$ — полугруппа правых нулей, $X$ — правый полигон над $S$ (его строение описано в теореме 2). Пусть $a, b \in X$ и $a \neq b$. Тогда*

$$\rho_{a,b} = \begin{cases} \{(a,b),(b,a)\} \cup \Delta_X, \textit{если } (a,b) \in \sigma, \\ \{(a,b),(b,a)\} \cup \rho_{K,K'} \cup \Delta_X, \textit{если } a \in K,\ b \in K' \textit{ и } K,\ K' \text{ —} \\ \hfill \textit{различные } \sigma\textit{-классы} \end{cases}$$

Доказательство. Если $(a, b) \in \sigma$, то $as = bs$ при всех $s \in S$, поэтому $\{(a,b),(b,a)\} \cup \triangle_X$ — конгруэнция. Ясно, что она является наименьшей конгруэнцией, содержащей пару $(a, b)$. Если же $(a,b) \notin \sigma$, то $a \in K$, $b \in K'$, где $K, K'$ — различные $\sigma$-классы. В этом случае $as = a_s$, $bs = a'_s$ при всех $s \in S$, а значит, $\rho_{K,K'}\rho_{a,b}$. Отсюда нетрудно вывести, что $\rho_{a,b} = \{(a,b),(b,a)\} \cup \rho_{K,K'} \cup \triangle_X$. $\square$

Теперь выясним строение произвольных конгруэнций полигона над полугруппой правых нулей.

Лемма 4. *Любое отношение эквивалентности на конеразложимом полигоне над полугруппой правых нулей является конгруэнцией.*

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что если $X$ — конеразложимый полигон над полугруппой правых нулей $S$, то $|Xs| = 1$ при всех $s \in S$. Следовательно, для любого отношения эквивалентности $\rho$ мы имеем: $as = bs$ при всех $a, b \in X$. Это значит, что $(a,b) \in \rho \Rightarrow (as, bs) \in \rho$. Таким образом, $\rho$ — конгруэнция. $\square$

Замечание. *Утверждение леммы 4 является частным случаем более общего утверждения. Если $A$ — произвольная универсальная алгебра, то равенство* $\mathrm{Con}A = \mathrm{Eq}A$ *решётки конгруэнций и решётки отношений эквивалентности имеет место тогда и только тогда, когда все операции алгебры $A$ являются константами или проекциями (см. [3], теорема 3.3). В нашем случае конеразложимого полигона над полугруппой правых нулей все операции — константы.*

Рассмотрим снова произвольный полигон $X$ над полугруппой правых нулей $S$. Ввиду леммы 1 имеем: $X = \coprod_{i \in I} X_i$, где $X_i$ — конеразложимые полигоны. Заметим, что $X_i$ — это в точности классы отношения $\sigma$, фигурирующего в теореме 2. Пусть $Y_s$ имеют тот же смысл, что в этой теореме. Единственный элемент множества $X_i \cap Y_s$ обозначим через $a_{is}$. Для любого подмножества $J \subseteq I$ пусть

$\rho_J$ — наименьшее отношение эквивалентности на множестве $\bigcup_{j\in J} X_j$, содержащее все пары $(a_{is}, a_{js})$, где $i, j \in J$, $s \in S$. Заметим, что отношение $\rho_J$ обобщает отношение $\rho_{K,K'}$, которое использовалось для построения главных конгруэнций.

Теорема 5. *Пусть $X$ — полигон над полугруппой правых нулей $S$, $X = \coprod_{i\in I} X_i$ — его разложение в копроизведение converазложимых полигонов. Пусть $Y_s$ ($s \in S$) и $\sigma$ имеют тот же смысл, что в теореме 2. Рассмотрим произвольное отношение эквивалентности $\tau$ на множестве $I$. Пусть $I = \bigcup\{J_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — разложение множества $I$ на классы отношения эквивалентности $\tau$. Для каждого $\alpha \in \Omega$ возьмём какое-либо отношение эквивалентности $\rho'_\alpha$ на множестве $\bigcup\{X_i \mid i \in J_\alpha\}$, удовлетворяющее условию $\rho'_\alpha \supseteq \rho_{J_\alpha}$. Тогда $\rho = \bigcup\{\rho'_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — конгруэнция полигона $X$. И обратно, каждая конгруэнция полигона $X$ имеет такой вид.*

Доказательство. Докажем, что $\rho = \bigcup\{\rho'_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ — конгруэнция. Очевидно, что $\rho$ — отношение эквивалентности. Пусть $(x, y) \in \rho$. Тогда $(x, y) \in \rho'_\alpha$ при некотором $\alpha \in \Omega$. Это означает, что $x \in X_i$, $y \in X_j$ и $(i, j) \in \tau$. Отсюда следует, что $(xs, ys) = (a_{is}, a_{js}) \in \rho_{J_\alpha} \subseteq \rho'_\alpha$. Таким образом, $\rho$ — конгруэнция.

Пусть теперь $\theta$ — произвольная конгруэнция полигона $X$. Рассмотрим отношение $\tau$ на множестве $I$, определённое следующим образом:

$$(i, j) \in \tau \Leftrightarrow \exists x \in X_i\ \exists y \in X_j\ (x, y) \in \theta.$$

Проверим, что $\tau$ — отношение эквивалентности на множестве $I$. Симметричность и рефлексивность этого отношения очевидны. Пусть $(i, j), (j, k) \in \tau$. Тогда $(x, y), (u, v) \in \theta$ для некоторых $x \in X_i$, $y, u \in X_j$, $v \in X_k$. Возьмём $s \in S$. Тогда $(xs, ys) \in \theta$. Но $xs = a_{is}$, $ys = a_{js}$, следовательно, $(a_{is}, a_{js}) \in \theta$. Аналогично получаем, что $(a_{js}, a_{ks}) \in \theta$. Следовательно, $(a_{is}, a_{ks}) \in \theta$, а значит, $(i, k) \in \tau$. Таким образом, $\tau$ — отношение эквивалентности.

Пусть $(x, y) \in \theta$. Тогда $(i, j) \in \tau$, т.е. $i, j \in J_\alpha$ при некотором $\alpha$. Таким образом, $(x, y) \in \bigcup\{X_i \mid i \in J_\alpha\} \times \bigcup\{X_i \mid i \in J_\alpha\}$. Осталось доказать, что $\rho_{J_\alpha} \subseteq \theta$ при любом $\alpha$. Для этого достаточно доказать, что $(a_{is}, a_{js}) \in \theta$ при $i, j \in J_\alpha$ и $s \in S$. Пусть $i, j \in J_\alpha$. Так как $\theta$ — конгруэнция, то $(xs, ys) \in \theta$. Но $xs = a_{is}$, $ys = a_{js}$. Таким образом, $(a_{is}, a_{js}) \in \theta$. $\square$

Сделаем теперь замечание о конгруэнциях полигонов над полугруппой правых нулей.

Следствие 6. *Если $X = \coprod_{i\in I} X_i$ — полигон над полугруппой правых нулей $S$, причём $X_i$ конеразложимы, и $\sigma = \bigcup_{i\in I} (X_i \times X_i)$, то:*

(1) *любое отношение эквивалентности $\rho \supseteq \sigma$ является конгруэнцией;*

(2) *любое отношение эквивалентности $\rho \subseteq \sigma$ также является конгруэнцией.*

Доказательство. (1) Пусть $\rho \supseteq \sigma$. Как и в теореме, положим

$$\tau = \{(i, j) \mid \exists x \in X_i, \exists y \in X_j (x, y) \in \rho\}.$$

Если $J_\alpha$ — $\tau$-класс, то все элементы множества $\bigcup\{X_i \mid i \in J_\alpha\}$ являются $\rho$-эквивалентными. Следовательно, $\rho'_\alpha \supseteq \rho_{J_\alpha}$ (обозначения см. в предыдущей теореме). Поэтому $\rho$ — конгруэнция.

(2) Так как $\rho \subseteq \tau$, то $\tau$ — отношение равенства на $I$. Значит, все $J_\alpha$ одноэлементны. Отсюда $\rho_{J_\alpha}$ — отношение равенства, а значит, $\rho'_\alpha \supseteq \rho_{J_\alpha}$. По теореме 5 получаем, что $\rho$ — конгруэнция. □

Предложение 7. *Пусть $X$ — правый полигон над полугруппой правых нулей $S$ и пусть множества $Y_s$ $(s \in S)$ имеют тот же смысл, что в теореме 2. Положим $Y = \cup\{Y_s \mid s \in S\}$. Очевидно, $Y$ — подполигон. Обозначим через $\rho_Y$ конгруэнцию Риса на $X$, соответствующую подполигону $Y$, т.е. $\rho_Y = (Y \times Y) \cup \triangle_X$. Если $\rho$ — отношение эквивалентности на $X$ такое, что $\rho\rho_Y$, то $\rho$ — конгруэнция.*

Доказательство. Пусть $(a, b) \in \rho$. Для любого $s \in S$ мы имеем $as, bs \in Y_s \subseteq Y$, поэтому $(as, bs) \in \rho_Y$, а значит, $(as, bs) \in \rho$. □

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kilp M., Knauer, U., Mikhalev A. V. Monoids, acts and cathegories. N. Y.; Berlin: W. de Gruyter, 2000.

2. Avdeyev A. Yu., Kozhuhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. 2000. Vol. 14, №4. P. 523—531.

3. Кожухов И. Б., Решетников А. В. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями // Фундам. и приклад. мат. 2010. Т. 16, вып. 3. С. 161—192.

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
Поступило 24.09.2013