



Общероссийский математический портал

А. В. Михалёв, М. А. Шаталова, Первичный радикал Ω -групп и Ω - l -групп, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 4, 1405–1413

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

21 марта 2025 г., 16:58:14



Первичный радикал Ω -групп и Ω - l -групп

А. В. МИХАЛЁВ*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

М. А. ШАТАЛОВА

Московская государственная академия
приборостроения и информатики

УДК 512.577+512.552.12+512.555+512.544.37+512.545.4

Ключевые слова: первичный радикал, кольцо, l -кольцо, группа, l -группа, Ω -группа, Ω - l -группа.

Аннотация

Предложено единое описание первичных радикалов колец, групп, l -групп и l -колец в рамках Ω -групп.

Abstract

A. V. Mikhalev, M. A. Shatalova, Prime radical of Ω -groups and Ω - l -groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 4, p. 1405–1413.

Unification of the prime radicals in rings, groups, l -rings and l -groups in the frame of Ω -groups is under consideration.

Первичный радикал колец (см., например, [4]) и групп (см. К. К. Шукин [12]) был распространен авторами на l -кольца (см. [5]) и на l -группы (см. [6]). Отметим, что истоки рассмотрения первичного радикала в l -кольцах восходят к статье Биркгофа и Пирса [13] (см. также [2]). Во всех этих случаях можно обнаружить некоторое единство методов при имеющихся отличиях полученных поэлементных описаний первичного радикала. Цель данной статьи — дать единое описание всех этих четырех радикалов в рамках Ω -групп, а также включить в эту схему первичный радикал модулей и l -модулей. В этой связи отметим цикл работ Ю. М. Рябухина [7–9] по радикалам Ω -групп, а также статьи [14–17], в которых Байес и Гербер привели ряд характеристик Ω -первичного радикала Ω -групп.

§ 1. Ω - l -группы

Пусть G — Ω -группа (см. [3]), т. е. (возможно, некоммутативная) аддитивная группа G с системой мультиоператоров Ω . Если к тому же G является

*Исследования первого автора были частично поддержаны грантом Австралийского совета по науке (ARC-grant, 1996) и грантом РФФИ.

l -группой (см. [2, 10]), то Ω -группу G назовем Ω - l -группой. Под Ω -идеалом (Ω - l -идеалом) в G понимается (см. [3, 18]) подмножество I группы G , такое что

- 1) I — нормальная подгруппа группы G (I — l -идеал l -группы G соответственно);
- 2) $x_1 \dots x_{i-1}(a + x_i)x_{i+1} \dots x_n \omega - x_1 \dots x_n \omega \in I$ для всех $x_1, \dots, x_n \in G$, $a \in I$, $\omega \in \Omega$.

При этом (см. [14–16]) Ω -идеал (Ω - l -идеал) P в G называется Ω -первичным (Ω - l -первичным), если для всех $\omega \in \Omega$ и Ω -идеалов (Ω - l -идеалов) $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq \subseteq G$ из включения $I_1 I_2 \dots I_n \omega \subseteq P$ следует, что $I_i \subseteq P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$. Для подмножества $M \subseteq G$ через M^G (M_l^G) обозначается идеал (l -идеал), порожденный подмножеством M .

Лемма 1.1 ([14, теорема 23]). Для идеала P Ω -группы G эквивалентны следующие условия:

- (а) P — Ω -первичный идеал;
- (б) для всех $\omega \in \Omega$ и Ω -идеалов $I_1, \dots, I_n \subseteq G$, таких что $I_1 I_2 \dots I_n \omega \subseteq P$, следует, что $I_i \subseteq P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (с) для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}^G \dots \{a_n\}^G \omega^G \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (д) для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}^G \dots \{a_n\}^G \omega \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (е) для всех $\omega \in \Omega$ и $I_1, I_2, \dots, I_n \triangleleft G$, таких что $I_i \supseteq P$, $1 \leq i \leq n$, следует, что $I_1 I_2 \dots I_n \omega \not\subseteq P$.

Аналогичное утверждение справедливо для l -идеала P Ω - l -группы G .

Лемма 1.2. Для l -идеала P Ω - l -группы G эквивалентны следующие условия:

- (а) P — Ω - l -первичный идеал;
- (б) для всех $\omega \in \Omega$ и l -идеалов I_1, I_2, \dots, I_n из G , таких что $I_1 I_2 \dots I_n \omega_l^G \subseteq P$, следует, что $I_i \subseteq P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (с) для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}_l^G \dots \{a_n\}_l^G \omega^G \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (д) для всех $\omega \in \Omega$ и $a_1, \dots, a_n \in G$, таких что $\{a_1\}_l^G \dots \{a_n\}_l^G \omega \subseteq P$, следует, что $a_i \in P$ для некоторого $1 \leq i \leq n$;
- (е) для всех $\omega \in \Omega$ и l -идеалов I_1, I_2, \dots, I_n , таких что $I_i \supseteq P$, $1 \leq i \leq n$, следует, что $I_1 I_2 \dots I_n \omega \not\subseteq P$.

Определение 1.3. (а) Положим $\Omega\text{-rad}(G) = \bigcap P_\alpha$ (Ω - $l\text{-rad}(G) = \bigcap P_\alpha$), где P_α пробегает все Ω -первичные (Ω - l -первичные) идеалы в G ;

(б) в Ω -группе (в Ω - l -группе) G подмножество $M \subseteq G$ называется Ω - t -системой (Ω - l - t -системой), если для любой операции $\omega \in \Omega$ и любых элементов $a_1, \dots, a_n \in M$ существуют $a'_i \in \{a_i\}^G$ ($a'_i \in \{a_i\}_l^G$), такие что $a'_1 \dots a'_n \omega \in M$.

Замечание 1.4. Идеал P (l -идеал P) Ω -группы G (Ω - l -группы G) является первичным (l -первичным) в том и только в том случае, когда $G \setminus P$ является Ω - m -системой (Ω - l - m -системой).

Теорема 1.5. Пусть G — Ω -группа (Ω - l -группа), I — Ω -идеал (Ω - l -идеал) в G , M — Ω - m -система (Ω - l - m -система), такая что $I \cap M = \emptyset$.

Тогда

1) множество \mathcal{P} Ω -идеалов (Ω - l -идеалов) J , таких что $I \subseteq J$ и $J \cap M = \emptyset$, индуктивно (при этом максимальные элементы в \mathcal{P} — это Ω -первичные (Ω - l -первичные) идеалы, содержащие I);

2) множество \mathcal{M} таких Ω - m -систем (Ω - l - m -систем) M' , что $M \subseteq M'$ и $M' \cap I = \emptyset$, индуктивно (при этом максимальные элементы в \mathcal{M} — это дополнения в G к минимальным Ω -первичным (Ω - l -первичным) идеалам).

Доказательство проводится по стандартной схеме (см. [1, гл. I], [4, § 2], [14, 2.18]).

Следствие 1.6. Каждый Ω -первичный (Ω - l -первичный) идеал в G содержит минимальный Ω -первичный (Ω - l -первичный) идеал; радикал Ω -rad(G) (Ω - l -rad(G)) совпадает с пересечением всех минимальных Ω -первичных (минимальных Ω - l -первичных) идеалов в G .

Каждому элементу $a \in G$, где G — Ω -группа (Ω - l -группа), $\Omega = \{\omega_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, поставим в соответствие подмножество $M_a \subseteq G$ ($M_a^l \subseteq G$), получаемое следующим образом: $M_a = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, где $A_0 = a$, $A_i = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{i,\lambda}$, $A_{i,\lambda} = \{a_{i,j_1 \dots j_n} = a'_{i-1,j_1} \dots a'_{i-1,j_n} \omega_\lambda\}$ при $i \geq 1$, где ω_λ — n -арная операция, $a'_{i,j_k} \in \{a_{i,j_k}\}^G$ ($a'_{i,j_k} \in \{a_{i,j_k}\}_l^G$), $a_{i,j_1}, \dots, a_{i,j_n}$ — всевозможные наборы по n элементов из A_i .

Лемма 1.7. Для всякого элемента $a \in G$ множество M_a является Ω - m -системой (Ω - l - m -системой).

Доказательство. Пусть $\omega_\lambda \in \Omega$ — n -арная операция и $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in M_a$ (соответственно $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in M_a^l$), где $a_{i_k} \in A_{i_k}$. Будем считать, что $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$. Покажем, что для каждого a_{i_k} найдется элемент в A_{i_n} , принадлежащий $\{a_{i_k}\}^G$ (соответственно принадлежащий $\{a_{i_k}\}_l^G$), $k = 1, \dots, n$. Действительно, если $a_i \in A_i$, то по построению подмножества M_a существует элемент $a_{i+1} \in A_{i+1}$, такой что $a_{i+1} = a'_{i,j_1} \dots a'_{i,j_n} \omega_\lambda$, где $a'_{i,j_k} \in \{a_i\}^G$ ($a'_{i,j_k} \in \{a_i\}_l^G$), и следовательно, $a_{i+1} \in \{a_i\}^G$ ($a_{i+1} \in \{a_i\}_l^G$), $a_{i+1} \in A_{i+1}$. Рассуждая аналогично, получаем, что существуют элементы $b_{i_n}^{(1)}, b_{i_n}^{(2)}, \dots, b_{i_n}^{(n)}$, где $b_{i_n}^{(k)} \in A_{i_n}$ и $b_{i_n}^{(k)} \in \{a_{i_k}\}^G$ ($b_{i_n}^{(k)} \in \{a_{i_k}\}_l^G$), $k = 1, \dots, n$. Но тогда найдется элемент $c = b'_1 \dots b'_n \omega_\lambda$, где $b'_k \in \{b_{i_n}^{(k)}\}^G \subseteq \{a_{i_k}\}^G$ ($b'_k \in \{b_{i_n}^{(k)}\}_l^G \subseteq \{a_{i_k}\}_l^G$), такой что $c \in A_{i_n+1}$. Отсюда вытекает, что M_a — Ω - m -система (M_a — Ω - l - m -система).

Определение 1.8. Множество M_a (соответственно M_a^l) назовем *стандартной Ω - m -системой* (Ω - l - m -системой), соответствующей элементу a .

Теорема 1.9. Пусть $a \in G$, где G — Ω -группа (Ω - l -группа). Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) $a \in \Omega\text{-rad}(G)$ ($a \in \Omega$ - l - $\text{rad}(G)$);
- 2) всякая Ω - m -система (Ω - m - l -система), содержащая a , содержит 0 ;
- 3) любая стандартная Ω - m -система (Ω - m - l -система) M_a , соответствующая элементу a , содержит 0 .

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) вытекает из [14, 3.2, 3.3]. Импликация 2) \Rightarrow 3) тривиальна.

3) \Rightarrow 1). Предположим, что $a \notin \Omega\text{-rad}(G)$ ($a \notin \Omega$ - l - $\text{rad}(G)$), т. е. существует первичный идеал P (l -первичный идеал P), такой что $a \notin P$. Тогда для любой операции $\omega \in \Omega$ найдутся элементы $a'_1, \dots, a'_n \in \{a\}^G$ ($a'_1, \dots, a'_n \in \{a\}_i^G$), такие что $a'_1 \dots a'_n \omega \in A_1$ и $a'_1 \dots a'_n \omega \notin P$. Таким образом, A_1 состоит из элементов, принадлежащих P . Аналогично строится A_k для любого натурального числа k . Таким образом, $M_a = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ не содержит 0 , так как имеет пустое пересечение с P .

Определение 1.10. Элемент a Ω -группы G (Ω - l -группы G), удовлетворяющий одному из эквивалентных условий теоремы 1.8, назовем *Ω -строго нильпотентным* или *Ω -строго энгелевым* (Ω - l -строго нильпотентным или Ω - l -строго энгелевым).

§ 2. Приложения

2.1. Ассоциативные кольца. Пусть R — ассоциативное кольцо, $\Omega = \{\omega\}$ состоит из одного близкого кольцевого умножения $a_1 a_2 \omega = a_1 a_2$, $\text{rad}(R)$ — первичный радикал кольца R (т. е. пересечение всех первичных идеалов). Для элемента $a \in R$ эквивалентны следующие условия:

- 1) $a \in \text{rad}(R)$;
- 1') a принадлежит пересечению всех минимальных первичных идеалов;
- 2) элемент $a \in R$ строго нильпотентен (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} \in a_i R a_i$, содержит нулевой элемент);
- 3) элемент $a \in R$ — ω -строго нильпотентен (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} = a'_i a'_i$, a'_i, a'_i принадлежат главному идеалу (a_i) , содержит нулевой элемент).

В дополнение к классической поэлементной характеристизации первичного радикала $\text{rad}(R)$ (1) \Leftrightarrow 2): см., например, [4]) мы привели условие 3) из теоремы 1.8, поскольку именно оно позволяет дать единообразную поэлементную характеристизацию Ω -радикала в различных алгебраических структурах.

2.2. l -кольца. Пусть R — l -кольцо (см. [2, 10]), $l\text{-rad}(R)$ — его l -первичный радикал (т. е. пересечение всех l -первичных идеалов (см. [5, 11])). Тогда для $a \in R$ эквивалентны следующие условия:

- 1) $a \in l\text{-rad}(R)$;
- 1') a принадлежит пересечению всех минимальных l -первичных идеалов;
- 2) $|a| \in \text{rad}(R)$, т. е. $|a|$ — строго нильпотентный элемент (см., например, [4]);
- 3) a — ω - l -строго нильпотентный элемент (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} = a'_{i_1} a'_{i_2}$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат l -идеалу $\{a_i\}_l^R$, порожденному элементом a_i , содержит 0);
- 4) a — l -строго нильпотентный элемент (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = |a|$, $a_{i+1} = x_i y_i$ или $a_{i+1} = x_i r y_i$, где $0 \leq x_i \leq a_i$, $0 \leq y_i \leq a_i$, $r \in R^+ = \{r \in R, r \geq 0\}$, содержит нулевой элемент).

Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 1') \Leftrightarrow 3) следует из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) была доказана в [5]. Покажем, что 3) \Leftrightarrow 4). Действительно, для последовательности из 4) следует, что $x_i, y_i \in \{a_i\}_l^R$. Таким образом, 3) \Rightarrow 4). Покажем теперь, что 4) \Rightarrow 3). Для последовательности из 3) получаем, что

- а) $|a'_{i_j}| \leq n_{k_j} + r_{k_j} |a_i| + |a_i| s_{k_j} + v_{k_j} |a_i| t_{k_j}$, где $n_{k_j} \in N$, $r_{k_j}, s_{k_j}, t_{k_j}, v_{k_j} \in R^+$, $j = 1, 2$,
- б) $a_{i+1} = a'_{i_1} a'_{i_2}$.

Из а) и б) вытекает, что последовательность 3) в силу 4) исчезает.

Замечание 2.3. Отметим, что кольцо, являющееся l -группой с одной Ω -операцией (кольцевым умножением) не обязательно будет l -кольцом, хотя является Ω - l -группой.

Пример. Пусть $R = \{(a, b)\}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Операции и порядок определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2); \\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= ((a_1 + b_1)(a_2 + b_2), (a_1 + b_1)(a_2 + b_2)); \\ (a_1, b_1) \geq 0 &\Leftrightarrow a_1 > 0 \text{ или } a_1 = 0, b_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда R — линейно упорядоченная аддитивная группа, ассоциативно-коммутативное кольцо, не являющееся l -кольцом, так как $(0, 1)(2, -5) = (-3, -3) < 0$, при этом R не имеет нетривиальных l -идеалов, так как любой l -идеал содержит наименьший положительный элемент $(0, 1)$ и, значит, содержит любой элемент. Таким образом, Ω - $l\text{-rad}(R) = \{0\}$, $\Omega\text{-rad}(R) = \{a, -a\}$.

Замечание 2.4. Отметим, что l -кольцо — это кольцо, являющееся l -группой и такое, что для всех $a, b \in R$ справедливо соотношение $(a \cup 0)(b \cup 0) \cup 0 = (a \cup 0)(b \cup 0)$.

2.5. Группы. Пусть G — группа, $\Omega = \{\omega\}$, где ω — операция коммутирования, т. е. $ab\omega = [a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Тогда $\text{rad}(G)$ — первичный радикал группы G (см. [12]), т. е. пересечение всех первичных нормальных подгрупп группы G . Тогда для $a \in G$ эквивалентны следующие условия:

- 1) $a \in \text{rad}(G)$;
 1') a принадлежит пересечению всех минимальных первичных нормальных подгрупп;
 2) элемент $a \in G$ строго энгелев (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [[b_i, a_i], a_i]$, $b_i \in G$, содержит единичный элемент);
 3) элемент $a \in G$ — ω -строго энгелев (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [a'_{i_1}, a'_{i_2}]$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат нормальной подгруппе $\{a_i\}^G$, порожденной элементом a_i , содержит единичный элемент).
 Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) доказана в [12], эквивалентности 1) \Leftrightarrow 1') \Leftrightarrow 3) следуют из теоремы 1.8 и следствия 1.7.

2.6. l -группы. Пусть G — l -группа, $l\text{-rad}(G)$ — ее l -первичный радикал (см. [6]), т. е. пересечение всех l -первичных идеалов. Тогда для $a \in G$ эквивалентны следующие условия:

- 1) $a \in l\text{-rad}(G)$;
 1') a принадлежит пересечению всех минимальных l -первичных l -идеалов;
 2) a — l -строго энгелев элемент (см. [6]), т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [b_i x_i b_i^{-1}, y_i]$, $b_i \in G$, $e \leq x_i \leq |a_i|$, $e \leq y_i \leq |a_i|$, содержит единичный элемент;
 3) a — l - ω -строго энгелев элемент (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = a$, $a_{i+1} = [a'_{i_1}, a'_{i_2}]$, a'_{i_1}, a'_{i_2} принадлежат l -идеалу $\{a_i\}_\omega^G$, порожденному элементом a_i , содержит единичный элемент);
 4) a — l -строго нильпотентный элемент (т. е. любая последовательность a_0, a_1, \dots , где $a_0 = |a|$, $a_{i+1} = [x_i, y_i]$ или $a_{i+1} = [x_i, [b_i, y_i]]$, $e \leq x_i \leq |a_i|$, $e \leq y_i \leq |a_i|$, $b_i \in G_+$, содержит единичный элемент).

Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 2) доказана в [6]. Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 1') \Leftrightarrow 3) следует из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Покажем, что 1) \Leftrightarrow 4). Сначала докажем, что 4) \Rightarrow 1). Допустим противное, пусть a удовлетворяет условию 4), но $a \notin l\text{-rad}(G)$. Следовательно, существует l -первичный l -идеал P , такой что $a \notin P$.

Как и в доказательстве теоремы 5 из [6], существуют $e \leq c \leq v|a|v^{-1}$, $e \leq d \leq t|a|t^{-1}$, $v, t \in G$, такие что $[c, d] \notin P$.

Пусть $e \leq x \leq v^{-1}cv$, $e \leq y \leq t^{-1}dt$. Тогда $c = vxv^{-1}$, $d = tyt^{-1}$ и $v xv^{-1} tyt^{-1} = [c, d] \notin P$. Если $[x, y] \notin P$, то положим $a_1 = [x, y] \notin P$. Если же $[x, y] = p \in P$, то для $b = v^{-1}t$ имеем $v x b y b^{-1} x^{-1} y^{-1} t^{-1} = [c, d] \notin P$. Тогда $[x, [b, y]] = x b y b^{-1} y^{-1} x^{-1} y b y^{-1} b^{-1} = x b y b^{-1} x^{-1} p b y^{-1} b^{-1} = v^{-1}[c, d]v \notin P$, и мы положим $a_1 = [x, [b, y]] \notin P$.

Повторяя эту процедуру, мы получаем противоречие с 4).

Эквивалентность 1) \Leftrightarrow 4) доказывается стандартным образом с использованием леммы Цорна.

2.7. R -модули. Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, N — унитарный левый R -модуль. Тогда N может быть рассмотрен как Ω -группа, где $\Omega = \{\omega_r, r \in R \mid a\omega_r = ra \forall a \in N\}$. В этом случае I — Ω -идеал тогда и только тогда, когда I — подмодуль в N . Поэтому $\{a\}_\Omega^N = Ra$.

Теорема 2.8. Для Ω -идеала P R -модуля N эквивалентны следующие условия:

- 1) из $rI \subseteq P$, где $r \in R$, I — идеал в N , следует, что $I \subseteq P$ (т. е. подмодуль N Ω -первичен);
- 2) из $sRa \subseteq P$, где $s \in R$, $a \in N$, следует, что $a \in P$;
- 3) из $a \notin P$ следует, что найдется элемент $s \in R$, такой что $sRa \not\subseteq P$.

Доказательство. Эквивалентность 2) \Leftrightarrow 3) очевидна. Покажем, что 1) \Rightarrow 2). Пусть $sRa \subseteq P$ для некоторого $s \in R$. Так как Ra — Ω -идеал в N , то из 1) следует, что $Ra \subseteq P$, и следовательно, $a \in P$, так как N — унитарный модуль. Обратно, пусть справедливо 2), $rI \subseteq P$, $a \in I$. Тогда $Ra \subseteq I$, и поэтому $rRa \subseteq P$. В силу 2) $a \in P$, т. е. $I \subseteq P$.

Для R -модуля N и $a \in N$ стандартная Ω - m -система M_a , как вытекает из ее конструкции, имеет следующий вид: $M_a = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, $A_0 = a$, $A_i = \bigcup_{r \in R} A_{i,r}$ при $i \geq 1$, где $A_{i,r} = \{rs_{i-1}a_{i-1} \mid s_i \text{ — некоторый элемент из } R, a_{i-1} \in A_{i-1}\}$.

Для $a \in N$ эквивалентны следующие условия:

- 1) $a \in \Omega\text{-rad}(N)$;
- 1') a принадлежит пересечению всех минимальных Ω -первичных идеалов R -модуля N ;
- 2) a — Ω -строго нильпотентный элемент, т. е. любое множество $M_a = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, где $A_0 = a$, $A_i = \bigcup_{r \in R} A_{i,r}$ при $i \geq 1$, $A_{i,r} = ra'_{i-1}$, $a'_{i-1} \in \{a_{i-1}\}^N$, содержит нулевой элемент;
- 3) для любой последовательности $\{s_n\} \subseteq R$ найдется такая последовательность $\{r_n\} \subseteq R$, что $\{a_i\}$, где $a_0 = a$, $a_i = r_{i-1}s_{i-1}a_{i-1}$ при $i \geq 1$, содержит нулевой элемент.

Эквивалентности 1) \Leftrightarrow 1') \Leftrightarrow 2) вытекают из теоремы 1.8 и следствия 1.7. Эквивалентность 2) \Leftrightarrow 3) — следствие конструкции M_a для R -модуля.

2.9. R - l -модули. Пусть N — унитарный левый R -модуль и, кроме того, R — l -кольцо с $1 \in R^+$, N — l -группа, при этом $ra \in R^+$ для любых $r \in R^+$, $a \in N^+$. Пусть $\Omega = \{\omega_r \mid r \in R^+\}$, где $a\omega_r = ra$ для $a \in N^+$. Ω - l -идеалы в N — это в точности подмодули модуля N , являющиеся одновременно l -идеалами l -группы N . Ясно, что $\{a\}_l^N = \{x \in N \mid |x| \leq r|a|, r \in R^+\}$.

Теорема 2.10. Для Ω - l -идеала P R - l -модуля N эквивалентны следующие условия:

- 1) P — Ω - l -первичный, т. е. из $rI \subseteq P$, где $r \in R^+$, I — l -идеал в N , следует, что $I \subseteq P$;
- 2) из $rR^+|a| \subseteq P$, где $r \in R^+$, $a \in N$, следует, что $a \in P$;
- 3) из $a \notin P$ следует, что найдется такой элемент $r \in R^+$, что $rR^+|a| \not\subseteq P$.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть $rR^+|a| \subseteq P$ для некоторого $r \in R^+$. Если $x \in \{a\}_l^N$, то $|x| \leq s|a|$ для некоторого $s \in R^+$. Поэтому $|rx| \leq r|x| \leq rs|a| \in P$. Таким образом, $r\{a\}_l^N \subseteq P$, и в силу 1) $a \in P$.

2) \Rightarrow 1). Пусть $rI \subseteq P$, где $r \in R^+$, $a \in I$. Тогда $r\{a\}_i^N \subseteq P$, т. е. $rx \in P$ для любого элемента $x \in \{a\}_i^N$. Так как все элементы вида $s|a| \in \{a\}_i^N$ при $s \in R^+$, то $rR^+|a| \subseteq P$ и по 2) $a \in P$. Таким образом, $I \subseteq P$. Очевидно, что 2) \Leftrightarrow 3).

Для элемента $a \in N$, где N — R - l -модуль, эквивалентны следующие условия:

1) $a \in \Omega$ - l - $\text{rad}(N)$;

1') a принадлежит пересечению всех минимальных Ω - l -первичных l -идеалов R - l -модуля N ;

2) a — Ω - l -строго нильпотентный элемент, т. е. любая стандартная Ω - l - m -система M_a содержит нулевой элемент;

3) для любой последовательности $\{s_n\} \subseteq R^+$ найдется последовательность $\{r_n\} \subseteq R^+$, такая что $\{a_i\}$, где $a_0 = |a|$, $a_i = r_{i-1}s_{i-1}a_{i-1}$ для $i \geq 1$, содержит нулевой элемент.

Эквивалентности 1) \Leftrightarrow 1') \Leftrightarrow 2) вытекают из теоремы 1.8 и следствия 1.7.

Покажем 2) \Leftrightarrow 3). Так как $M_a = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, $A_0 = a$ и $A_i = \bigcup_{r \in R^+} A_{i,r}$, где $A_{i,r} = \{ra'_{i-1} \mid r \in R^+, a'_{i-1} \in \{a_{i-1}\}_i^N\}$, то для последовательности $\{a_i\}$ из 3) r_i можно всегда подобрать так, чтобы $0 \in \{a_i\}$. Обратно, если выполнено 3), то так как $|a'_{i-1}| \leq s_{i-1}|a_{i-1}|$ для любого a'_{i-1} , где $s_{i-1} \in R^+$, $a_{i-1} \in A_{i-1}$, то $|r_i a'_{i-1}| \leq r_i s_{i-1} |a_{i-1}|$, откуда и вытекает, что множество M_a содержит нулевой элемент.

Литература

- [1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.
- [2] Биркгоф Г. Теория решеток. — М.: 1984.
- [3] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: ФМ, 1962.
- [4] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1978.
- [5] Михалев А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно-упорядоченных колец // Сборник работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178–184.
- [6] Михалев А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно-упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. — 1990. — № 2. — С. 84–86.
- [7] Рябухин Ю. М. Радикалы Ω -групп. Общая теория // Матем. исслед. — 1968. — Т. 3, вып. 2. — С. 123–160.
- [8] Рябухин Ю. М. Идеально наследственные радикалы // Матем. исслед. — 1968. — Т. 3, вып. 4. — С. 108–135.
- [9] Рябухин Ю. М. Специальные и квазиспециальные радикалы // Матем. исслед. — 1969. — Т. 4, вып. 1. — С. 110–131.
- [10] Фукс Л. Частично-упорядоченные алгебраические системы // М.: Мир, 1968.

- [11] Шаталова М. А. К теории радикалов в структурно-упорядоченных кольцах // Матем. заметки. — 1968. — Т. 4, № 6. — С. 639–648.
- [12] Шукин К. К. PI-разрешимый радикал группы // Матем. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021–1031.
- [13] Birkhoff G., Pierce R. S. Lattice-ordered rings // An. Acad. Brasil. Ci. — 1956. — V. 28. — P. 41–69.
- [14] Buys A., Gerber G. K. The prime radical for Ω -groups // Commun. Algebra. — 1982. — V. 10. — P. 1089–1099.
- [15] Buys A., Gerber G. K. Prime and k -prime ideals in Ω -groups // Questions Math. — 1985. — V. 8, No. 1. — P. 15–32.
- [16] Buys A., Gerber G. K. Nil and s -prime Ω -groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1985. — V. 38. — P. 222–229.
- [17] Buys A. Radicals of Ω -groups // Contr. to General Algebra, 4. Radical theory and applications. — Wien, 1987. — P. 23–36.
- [18] Higgins C. J. Groups with multiple operators // Proc. London Math. Soc. — 1956. — V. 6. — P. 366–416.

Статья поступила в редакцию в декабре 1996 г.