А. Л. Вольберг, J. William Helton. “Operator Theory, Analytic Functions, Matrices, and Electrical Engineering”. CBMS Regional Conf. Series in Math. N 68. American Math. Society, 1987. 134 p.; Bruce A. Francis “A Course in H^∞ Control Theory”. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 88. Springer, 1987. 156 p., *Алгебра и анализ*, 1991, том 3, выпуск 3, 216–222

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 3

РЕЦЕНЗИИ

J. William Helton. Operator Theory, Analytic Functions, Matrices, and Electrical Engineering. CBMS Regional Conf. Series in Math. N 68. American Math. Society, 1987. 134 p.

Bruce A. Francis. A Course in H^∞ Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 88. Springer, 1987. 156 p.

All this time the Guard was looking at her, first through a telescope, then through a microscope ...

Lewis Carroll. "Through the Looking-glass".

Операторы, действующие в гильбертовом пространстве симплектического типа относительно фиксированной (линейной) инволюции $J : H \to H$, $J^2 = I$ обозначают терминами с префиксом J. Скажем, операторы с $T^*JT = TJT^* = J$, или $T^*J = JT$, или $T^*JT - J \leqslant \mathbb{O}$ называют соответственно J-унитарными, J-самосопряженными и J-сжимающими. Возникнув изначально в довольно специфических задачах теории упругости, впоследствии такие операторы были обнаружены (и оказались полезными) в самых разнообразных разделах математики — от теории рассеяния до задач интерполяции и проблем моментов. Настоящий бум, однако, начался, когда была открыта и исследована связь операторнозначных аналитических функций $z \mapsto F(z)$, принимающих J-сжимающие (или J-диссипативные) значения, с теорией электрических цепей.

С тех пор J-теория (так для краткости будем называть теорию J-сжимающих аналитических матриц-функций) время от времени начинает привлекать повышенное внимание чистых аналитиков. Причины отчасти, возможно, таковы. J-теория, будучи очень тесно связана с теорией гильбертовых пространств функций с воспроизводящим ядром (эта связь сжато, но систематически изложена, например, в книге Г.Дыма [1]), позволяет получать замечательные функциональные тождества. С другой стороны, будучи включенной в теорию Крейна–Лангера пространств с индефинитной метрикой, она дает возможность использовать все преимущества геометрического подхода.

Естественно предположить, что некоторые трудные задачи о гильбертовых пространствах аналитических функций могут быть решены за счет нахождения нетривиальных тождеств (сокращений) перед тем, как начинать делать оценки. Этот взгляд вызван к жизни во многом работами де Бранжа. Примерами таких задач могут служить задача Берса–Лаврентьева о гармонической в верхнем полупространстве функции исчезающей вместе с градиентом на части границы, или задача Мергеляна–Бреннана о существовании ограниченного функционала значения в точке для замыкания полиномов $H^2(\mu)$. Правда, обе эти задачи уже решены (первая — Т.Вольфом, вторая — Дж.Томсоном), но в обоих случаях доказательства чрезвычайно трудны.

Обе рецензируемые книги очень тесно связаны с J-теорией. Книга Фрэнсиса использует ее, скорее, технически. У Хелтона эта связь пронизывает все изложение, так как он использует геометрический подход к теории электрических цепей.

Обе книги посвящены одной задаче: как стабилизировать данную электрическую цепь?

На связь между J-теорией и теорией цепей первым обратил внимание М. С. Лившиц [2]. Это стимулировало интерес к J-теории, которая сама по себе появилась в работе В. П. Потапова [3] в 1955 г. J-теория дала возможность решить задачу синтеза цепи по любой передаточной матрице [4] (и даже двумя способами: с помощью варианта теоремы Дарлингтона [4,5]). В дальнейшем „чистая“ J-теория и ее применения к задачам интерполяции с минимальной нормой развивались И. В. Ковалишиной, Д. З. Аровым, В. Э. Кацнельсоном [6,7,8].

Теперь пришла пора применения геометрических идей, характерных для J-теории к следующей по важности задаче теории цепей — задаче стабилизации. Связь усмотреть легко. Если рассмотреть электрическую цепь G как оператор умножения на рациональную матрицу-функцию M в пространстве Харди H^2_{4n} в правой полуплоскости (M называется переходной матрицей-функцией — это представление преобразования вход — выход в частотной области), то закон сохранения энергии можно записать в виде

$$M^*(is)J_0M(is) - J_0 \geqslant 0, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

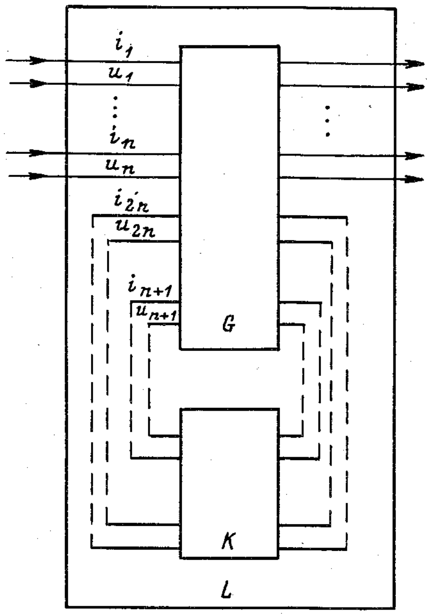
Здесь $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, а разбиение на блоки соответствует разбиению входных полюсов на токи $i_1(t), \ldots, i_{2n}(t)$ и напряжения $u_1(t), \ldots, u_{2n}(t)$. M действует на столбцы $(\hat{i}_1(\lambda), \ldots, \hat{i}_{2n}(\lambda), \ldots, \hat{u}_{2n}(\lambda))^T$. Если взять цепь K с $2n$ входами и $2n$ выходами и замкнуть на цепь G как на рисунке, то получится новая цепь L, причем ее переходная матрица l будет дробно-линейным преобразованием переходной матрицы k цепи K.

Удобно представлять $2n \times 2n$ цепи как подпространства вида $S_\omega = \left\{ \begin{pmatrix} \omega(\lambda)f(\lambda) \\ f(\lambda) \end{pmatrix}, f \in H^2_{2n} \right\}$, где ω — переходная матрица цепи.

Пусть U — унитарный оператор в H^2_{4n}, заменяющий координаты по следующему правилу U: $\begin{pmatrix} \text{токи} \\ \text{напряжения} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{выход} \\ \text{вход} \end{pmatrix}$. И пусть $J = UJ_0U^*$. Тогда $S_l = UMU^*S_K$. Отображение UMU^* можно рассматривать как дробно-линейное преобразование матрицы-функции k в матрицу-функцию l. Задача стабилизации цепи G с помощью цепи K сводится к нахождению l без полюсов в правой полуплоскости. Или, что то же самое, к исследованию максимальных отрицательных подпространств в $\mathcal{M} = UMU^*H^2_{4n} \cap H^2_{4n}$. Отрицательность подпространства S означает, что $(Js, s) \leqslant 0$ для всех $s \in S$. Так, например, существование рациональной матрицы функции l без полюсов в правой полуплоскости и такой, что $\|l(is)\|_\infty \leqslant 1$, равносильно тому, что в $\mathcal{M}$ имеется максимальное отрицательное подпространство. Если же его нет, то вычисление наименьшего числа полюсов у l равносильно вычислению отрицательной сигнатуры пространства $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}' \stackrel{\text{def}}{=} \{m' \in H^2_{4n} : (Jm, m') = 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}\}.$$

В таком виде задача стабилизации укладывается в общую схему решения интерполяционных задач, предложенную в гл.5 и 6 книги Хелтона. Подход Фрэнсиса, который восходит к работам Зэймса, по существу аналитичен (а не геометричен). Факторизация Винера–Хопфа для матрицы-функции M используется для а) нахождения условий, необходимых и достаточных для стабилизируемости G; б) параметризации схем K, стабилизирующих G. Однако главной темой книги



является даже не сама стабилизация, а алгоритм выбора стабилизирующей цепи K такой, что норма переходной матрицы l результирующей схемы L минимальна. Нахождение таких K называется стандартной задачей и , оказывается, может быть сведено к матричной задаче Нехари:

$$\inf_{Q \in H^\infty} \|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty. \tag{1}$$

Здесь T_1,T_2,T_3, заданные H^∞-матрицы-функции; требуется найти infimum и описать H^∞ матрицы-функции Q, доставляющие его. Это сведение к задаче Нехари естественно, но не тривиально — ведь l есть дробно-линейное, а не линейное преобразование k.

Наконец, решение задачи Нехари (вернее, „почти" решение, так как для случая $\inf_Q \|T_1 - T_2 Q T_3\| < 1$ описываются Q такие, что $\|T_1 - T_2 Q T_3\| = 1$) использует J-теорию, а именно J-спектральную факторизацию матриц-функций (вариант внешне-внутренней факторизации Берлинга–Потапова–Надя). Таким образом, и в этом подходе существо дела оказывается в некоторой задаче (Нехари) интерполяции с минимальной нормой. Так как задача Нехари хорошо изучена, эту редукцию можно считать достоинством книги Фрэнсиса.

Надо заметить, что обе книги хорошо дополняют друг друга. Книга Фрэнсиса аккуратно и детально решает одну задачу: как найти контроллер K, стабилизирующий с минимальной H^∞-нормой данную цепь. И кратко касается задачи робастной стабилизации: как найти контроллер K, оптимальный для наихудшей цепи из данного семейства, т.е. контроллер, выдерживающий некоторые возмущения цепи G. Книга Хелтона — это запись десяти лекций, прочитанных на конференции в Линкольне, Небраска. Конференция собрала математиков и инженеров, и курс Хелтона представляет собой очень сжатое изложение самых разных математических задач теории управления. При этом неизбежно (из-за краткости) теория управления иногда пропадает, хотя подходы к ней всегда отмечаются. По существу чтение книги Хелтона хорошо было бы дополнить чтением работ других участников конференции, применявших геометрические идеи книги к задачам теории управления.

Задача оптимизации электрической схемы, если часть схемы жестко задана, приводит немедленно к следующей математической постановке. Пусть A обозначает диск алгебру, $A_N \stackrel{\text{def}}{=} A \times \cdots \times A \quad N$ раз. Пусть задана целевая функция $\Gamma : \partial\mathbb{D} \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}_+$. Требуется найти

$$\gamma_A = \inf_{f\in A_N} \sup_Q \Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})), \tag{2}$$

а также указать условия на Γ, гарантирующие существование (единственность) экстремальной функции $f, f \in A_N$, для которой $\gamma_A = \sup\Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta}))$, Кроме того, хорошо бы иметь способ узнавать решение. Это может дать критерий остановки при компьютерном поиске решения.

Эта задача совершенно нетривиальна уже в случае $N = 1$ и для простейшей целевой функции

$$\Gamma(e^{i\theta}, z) \stackrel{\text{def}}{=} |G(e^{i\theta}) - z|,$$

где функция G непрерывна на окружности $\partial\mathbb{D}$. Хорошо известно, что в этом случае

$$\gamma_A = \gamma_{H^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{f\in H^\infty} \sup_Q \Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})). \tag{3}$$

Тест оптимальности также хорошо известен благодаря работе Адаляна–Арова–Крейна [9]: если $h \in A$ и h — оптимальная функция, то

$$|G(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta})| = \text{const}, \tag{4}$$
$$\operatorname{wind}(G - h) < 0. \tag{5}$$

Однако насколько нам известно, нет описания G таких, что оптимальная функция $f \in H^\infty$ лежит в A (т.е. нет описания G, для которых inf в (2) можно заменить на min). Если G достаточно гладка, то это так (Карлесон–Якобс [10]). Признак оптимальности (4), (5) был обобщен Хелтоном (см. гл. II книги) на широкий класс функций Γ:

$$\begin{matrix} f \in A \\ f \text{ оптимальна} \end{matrix} \implies \begin{cases} \Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})) = \text{const}, \\ \operatorname{wind} \frac{\partial}{\partial z}\Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})) > 0. \end{cases}$$

Однако вопрос существования решения для общих Γ не прост. Более того, немедленно усматривается его связь со следующей задачей, которую (следуя

Дж.Вермеру) можно назвать основной задачей о полиномиально-выпуклых оболочках:

$$\text{пусть } S \text{ — компакт в } \mathbb{C},\ \pi(S) = \partial\mathbb{D},$$
$$\pi \text{ — проекция на первую координату,}$$
$$\pi(pchS) \cap \mathbb{D} \neq \varnothing \text{ описать } \pi^{-1}(\mathbb{D}) \cap pch(S).$$

Здесь $pchS = \{\lambda \in \mathbb{C}^2 : |p(\lambda)| \leqslant \max\limits_S |p|\}$ для любого полинома p.

Наилучшим описанием является представление $\mathrm{pch}(S)$ как объединения графиков $\{\xi, f(\xi) : \xi \in \mathbb{D}\}$ глобальных аналитических сечений f компакта S. Напомним, что (глобальным аналитическим) сечением называется функция f из H^∞ такая, что $(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})) \in S$ для п.в. $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$. Не всегда $\mathrm{pch}(S)$ заметается аналитическими сечениями. Не всегда даже вообще можно выбрать одно глобальное сечение. Александер и Вермер [11] очень изящно показали, что сечение существует, если слои $\pi^{-1}(e^{i\theta}) \cap S$ выпуклы. Поразительное по неожиданности применение этого результата к теореме о короне можно найти в работе Берндтсона и Рэнсфорда [12]. Теперь вернемся к нашей целевой функции Γ и задаче

$$\gamma_{H^\infty} = \inf_{f \in H_N^\infty} \sup_Q \Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})) \tag{6}$$

(которая легче задачи для γ_A). Обозначив

$$S_r \stackrel{\text{def}}{=} \{(e^{i\theta}, z) : \Gamma(e^{i\theta}, z) \leqslant r\gamma_{H^\infty}\}, \quad r \geqslant 1; \quad S \stackrel{\text{def}}{=} S_1,$$

мы видим, что по самому смыслу определения компактов

$$\pi(\mathrm{pch}(S_r)) \cap \mathbb{D} \neq \varnothing, r > 1,$$

в частности, $(0, z_r) \in \mathrm{pch}(S_r)$, $r > 1$. Отсюда ясно, что $(0, z) \in \mathrm{pch}(S)$, где $z = \lim\limits_{r \to 1} z_r$. Использование теоремы Александера–Вермера позволяет заключить, что найдется функция $f \in H^\infty$ такая, что

$$\Gamma(e^{i\theta}, f(e^{i\theta})) \leqslant \gamma_{H^\infty}, e^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

если все слои $S_{e^{i\theta}}(\gamma_{H^\infty}) = \{z : (e^{i\theta}, z) \in S\}$ выпуклы.

В задачах оптимизации целевая функция очень часто устроена так, что эти слои выпуклы (и даже являются кругами). В предыдущем рассуждении мы использовали не всю возможную информацию. Общая задача об описании $\mathrm{pch}(S)$ выглядит труднее, чем решение (6), так как (6) сводится к нахождению сечений S в том специальном случае, когда $S = \bigcap\limits_{r>1} S_r$, $S_r \downarrow$, и сечения S_r уже построены. И действительно, задачу (6) можно решить не в предположении выпуклости слоев, а в предположении полиномиальной выпуклости слоев $S_{e^{i\theta}}(c) = \{z : \Gamma(e^{i\theta}, z) \leqslant c\}$. Ведь в этом случае сечения f_r компакта S_r тривиально подчинены условию

$$\mathrm{cl}(f_r; e^{i\theta}) \subset \mathrm{pch}(S_{e^{i\theta}}(r\gamma_{H^\infty})) = S_{e^{i\theta}}(r\gamma_{H^\infty}), \text{ для п.в. } e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D},$$

и потому

$$\mathrm{cl}(f; e^{i\theta}) \subset S_{e^{i\theta}}(\gamma_{H^\infty}),$$

где $f = \lim\limits_{r \to 1} f_r$. И тем самым f есть сечение $S(\equiv$ решение задачи (6)).

Это рассуждение и следующий удивительный вывод из него принадлежат Маршаллу (см. [13]). Вывод заключается в том, что для существования решения (6) для $N = 1$ достаточно требовать односвязность слоев $S_{e^{i\theta}}(\gamma_{H^\infty})$. Выпуклость не нужна!

Как уже было сказано, для общего компакта S, висящего над $\partial\mathbb{D}$ в $\mathbb{C}^2$, задача о возможности выбора глобального сечения S кажется более трудной, чем задача выбора функции $f \in H^\infty$, доставляющей минимум в (6). Хочется думать, что для первой задачи нужно что-то вроде выпуклости слоев S, $S_{e^{i\theta}} = \pi^{-1}(e^{i\theta}) \cap S$, а для второй, мы видели, достаточно их односвязности. Паразительным образом это не так. Задачи равносильны. Следующее усиление теоремы Александера–Вермера можно найти в работе Маршалла и Хелтона [13]:

пусть S — компакт в $\mathbb{C}^2$, $\pi(S) = \partial\mathbb{D}$ и дополнение $S_{e^{i\theta}}$ в $\mathbb{C}$ связно для п.в. $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$; тогда pch(S) имеет глобальное сечение (и есть объединение своих глобальных сечений) тогда и только тогда, когда

$$\pi(\mathrm{pch}(S)) \cap \mathbb{D} \neq \varnothing.$$

Хочется напомнить, что этот замечательный результат может быть (почти серьезно) рассмотрен как вклад теории электрических цепей в чистый анализ.

Теперь кратко опишем содержание книг по главам.

Первые две главы книги Хелтона содержат объяснение, почему для решения инженерных задач надо изучать инвариантные подпространства сдвига (подробнее об этом см. [14]) и свойства аналитических матриц-функций (подробнее о связи аналитических матриц-функций с теорией систем, а также об их свойствах см., например, [15]). Пространства с индефинитной метрикой в применении к электрическим целям появляются в гл.3. К сожалению, изложение здесь наиболее беглое. Скорее дано понять, чем объяснено, что инженерные задачи могут быть рассмотрены как задачи интерполяции с минимальной нормой (см. по этому поводу также Танненбаума [16,17]). Единый подход к задачам интерполяции, к задаче о короне, к поднятию коммутанта и факторизации Винера–Хопфа изложен в гл.5–7. Этот подход основан на теореме о представлении пары (M, M^*) подпространств L^2_N, $M \cap M^* = \mathbb{O}$, из которых M является I-инвариантным, а M^* I-$*$-инвариантным. Эти главы очень легко читать, они прекрасно и подробно написаны. Гл.8–10 посвящены проблемам оценок различных характеристик матриц (не матриц-функций). Проблемы эти вызваны инженерной задачей узкополостной стабилизации (когда мы минимизируем целевую функцию в(6) не сразу для всех частот, а только для некоторых). Напомним, что все проблемы для матриц-функций относились к широкополостной стабилизации. Гл.11 посвящена признакам оптимальности в задачах (1) и (5).

В книге Фрэнсиса гл.1–3 опять же вводные. В них сформулирована задача нахождения оптимального контроллера, стабилизирующего заданную цепь.

В гл.4 дано необходимое и достаточное условие стабилизируемости и дана параметризация контроллеров. Здесь же задача об оптимальном контроллере сведена к задаче (1). В гл.5 речь идет об интерпретации оператора Ганкеля в терминах теории систем — оператор Ганкеля представлен как произведение операторов наблюдаемости и контролируемости. Такой подход позволяет численно решать задачу Нехари. О сбалансированной реализации системы речь не идет. В гл.6 решается скалярная задача (1), а в гл.8 — матричная. Этому предшествует глава о факторизации (различных вариантах внешне-внутренней факторизации) матриц-функций. Используется подход теории систем, из книги [18].

В гл.9 излагается подход к задаче оптимизации на части частот, а не на всей полосе.

Книга Фрэнсиса — очень ясная и добротно написанная. Хотя она плотно заполнена формулами, но это, странным образом, не мешает, а помогает чнению. Она может служить совершенно готовым конспектом спецкурса для студентов. Чем она, кстати говоря, и является. Но она значительно уступает по богатству материала книге Хелтона. Выбрать из книги Хелтона материал для спецкурса — увлекательная задача, которая, правда, облегчается замечаниями самого автора о том, как это можно было бы сделать. Вместе эти книги представляют собой замечательное введение в предмет — H^∞-теорию управления.

Список литературы

[1] Dym H., *J-contractive matrix functions, reproducing Rernel Hilbert spaces and interpolation*, American Math. Society 71 (1989), CBMS Regional Conf. Series in Math..

[2] Лившиц М. С., *Операторы, колебания, волны. Открытые системы*, Физматгиз, М., 1966.

[3] Потапов В. П., *Мультипликативная структура J-сжимающих матриц-функций*, Тр. Моск. мат. об-ва **4** (1955), 125–236.

[4] Ефимов А. В., Потапов В. П., *J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей*, Успехи мат. наук **28**, вып. 1 (1973), 69–140.

[5] Darlington S., *Synthesis of reactance 4-pdes which produce prescribed insertion loss characteristics including special applications to filter design*, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. **18** (1939), 257–353.

[6] Ковалишина И. В., *Аналитическая теория для класса интерполяционных задач*, Изв.АН СССР **47**, вып. 3 (1983).

[7] Аров Д. З., *Метод Дарлингтона для диссипативных систем*, ДАН СССР **201** (1971), 559–562.

[8] Кацнельсон В. Э., *Методы J-теории в непрерывных задачах анализа I*, ВИНИТИ, М., 1982.

[9] Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г., *Бесконечные матрицы Ганкеля и обобщенные задачи Каратеодори–Фейера и М.Рисса*, Функцион.анализ и его прил. **2** (1968), 1–19.

[10] Carleson L., Jacobs S., *Best approximation by analytic functions*, Ark. Math. **10** (1972), 219–229.

[11] Alexander H., Wermer J., *Polynomial hulls with complex fibers*, Math. Ann. **271** (1985), 99–109.

[12] Berndtsson B., Ransford T. J., *Analytic multifunctions, the $\bar\partial$-equation, and a proof of the Corona theorem*, Pacific J. of Math. **124** no. 1 (1986), 57–72.

[13] Helton J. W., Marshall D. E., *Frequency domain design and analytic selections*, Indiana Univ. Math. J. **39** no. 1 (1990).

[14] Fuhrmann P. A., *Linear systems and operators in Hilbert space*, McGrow-Hill, New York, 1981.

[15] Rodman L., *An introdiction to operator polynomials, OT: Advances and Applications*, vol. 38, Birkhäuser, Basel ets., 1989.

[16] Tannenbaum A., *Modified Nevanlinna–Pick interpolation of linear plants with uncertainty in the gain factor*, Int.J.Control **36** (1982), 331–336.

[17] Tannenbaum A., *Invariance and system theory: algebraic and geometric aspects*, Lecture Notes in Math., vol. 845, Springer-Verlag, Berlin etc., 1981.

[18] Bart H., Golberg I., Kaashoek M. A.,, *Minimal factorization of matrix and operator functions, OT: Advances and Applications*, vol. 1, Birkhäuser, Basel etc., 1979.

А. Л. Вольберг