V. V. Kolyan, On the theory of curves in a composition space, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1968, Number 3, 43–55

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 513.733

В. В. Колян

К ТЕОРИИ КРИВЫХ ПРОСТРАНСТВА КОМПОЗИЦИИ

В работе рассматривается пространство кругов E_3, отображающееся с помощью стереографической проекции на пространство прямых неевклидова пространства S_4 с абсолютом Q_3. Задавая прямую S_4 точками $\boldsymbol{u}$ и $\bar{\boldsymbol{u}}$ ее пересечения с абсолютом Q_3, пространство прямых S_4 можно представить пространством автокомпозиции гиперквадрики $Q_3 \subset S_4$ [1]. Исходя из этого, все результаты, полученные для пространства автокомпозиции Q_3, можно распространить на пространство кругов E_3.

Исследуются также основные дифференциальные уравнения пространства автокомпозиции $Q_3 \subset S_4$ и выводятся условия их интегрируемости. Приводится естественное оснащение линейчатой поверхности S_4 и деривационные формулы, выраженные через инварианты пространства автокомпозиции Q_3.

§ 1. Основные дифференциальные уравнения пространства автокомпозиции $Q_3 \subset S_4$ и условия их интегрируемости

Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\bar{\boldsymbol{u}}$ — точки пересечения прямой с абсолютом, которые могут быть действительными различными, сливающимися или комплексно-сопряженными. Эти точки удовлетворяют уравнению абсолюта, т. е. $\boldsymbol{u}^2 = 0$, $\bar{\boldsymbol{u}}^2 = 0$. Обозначим $\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}} = e^{\theta}$. Основные уравнения автокомпозиции Q_3 следующие [1]:

$$\boldsymbol{u}^2 = 0, \qquad (1.1) \qquad\qquad \bar{\boldsymbol{u}}^2 = 0, \qquad (1.\bar{1})$$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i + \theta_i \boldsymbol{u}, \qquad (1.2) \qquad\qquad \bar{\boldsymbol{u}}_{\bar{i}} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\bar{i}} + \theta_{\bar{i}} \bar{\boldsymbol{u}}, \qquad (1.\bar{2})$$

$$\nabla_j \boldsymbol{v}_i = \theta_j \boldsymbol{v}_i + b_{ij} \bar{\boldsymbol{u}}, \qquad (1.3) \qquad\qquad \nabla_{\bar{j}} \boldsymbol{v}_{\bar{i}} = \theta_{\bar{j}} \boldsymbol{v}_{\bar{i}} + b_{\bar{i}\bar{j}} \boldsymbol{u}, \qquad (1.\bar{3})$$

$$\nabla_{\bar{j}} \boldsymbol{v}_i = -\theta_{i\bar{j}} \boldsymbol{u}, \qquad (1.4) \qquad\qquad \nabla_i \bar{\boldsymbol{v}}_{\bar{i}} = -\theta_{\bar{i}j} \bar{u}, \qquad (1.\bar{4})$$

$$\nabla_j \bar{\boldsymbol{u}} = 0, \qquad (1.5) \qquad\qquad \nabla_{\bar{j}} \boldsymbol{u} = 0, \qquad (1.\bar{5})$$

где

$$\theta_j = \frac{\partial \theta}{\partial u^j}, \quad \theta_{\bar{j}} = \frac{\partial \theta}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}, \quad \theta_{i\bar{j}} = \nabla_{\bar{j}} \theta_i = \nabla_i \theta_{\bar{j}}.$$

Здесь мы имеем два тензора: ковариантно-постоянный тензор $\theta_{\alpha\beta}$, являющийся метрическим тензором пространства автокомпозиции, и $b_{\alpha\beta}$, который назовем вторым тензором пространства автокомпозиции. Адаптированные координаты тензора $b_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию [1]:

$$\nabla_k b_{ij} = \theta_k b_{ij}, \quad \nabla_{\bar{k}} b_{ij} = -\theta_{\bar{k}} b_{ij}. \qquad (1.6)$$

Вводя тензоры $\underset{1}{B}_{\alpha\beta}=e^{-\theta}b_{\alpha\beta}$ и $\underset{2}{B}_{\alpha\beta}=e^{\theta}b_{\alpha\beta}$, видим, что они удовлетворяют условиям, которые являются следствиями (1.6):

$$\begin{array}{lll} \nabla_k \underset{1}{B}_{ij}=0, & & \nabla_{\bar k}\underset{1}{B}_{ij}=-2\theta_{\bar k}\underset{1}{B}_{ij}, \\ & (A) & & (B) \quad (1.7) \\ \nabla_{\bar k}\underset{1}{B}_{\bar i\bar j}=0, & & \nabla_k \underset{1}{B}_{\bar i\bar j}=-2\theta_k \underset{1}{B}_{\bar i\bar j}\,. \end{array}$$

Из (A) следует, что внутренняя связность на позициях риманова, а из (B), что угловая метрика, определяемая тензором $\underset{1}{B}_{\alpha\beta}$ на позициях, не зависит от позиции, так как $\partial_{\bar k}(e^{2\theta}\underset{1}{B}_{ij})=0$. При позиционной нормализации опорные точки v_i и $\bar v_{\bar i}$ находятся на одной $(n-1)$-мерной плоскости и связаны условиями

$$v_i=a_i^{\bar i}\bar v_{\bar i},\quad \bar v_{\bar i}=a_{\bar i}^{i}v_i. \qquad (1.8)$$

Аффинор a_α^β, который мы назовем *связующим*, удовлетворяет условию

$$a_\alpha^\beta a_\beta^\gamma=\delta_\alpha^\gamma\,, \qquad (1.9)$$

а его матрица в адаптированных координатах имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & a_i^{\bar j} \\ a_{\bar i}^{j} & 0 \end{pmatrix}$.

Из (1.8) получаем

$$b_{ij}=-a_i^{\bar i}\theta_{j\bar i},\quad b_{\bar i\bar j}=-a_{\bar i}^{i}\theta_{\bar j i}\,. \qquad (1.10)$$

Ковариантная производная аффинора a_α^β может иметь только следующие, отличные от нуля, компоненты:

$$\nabla_j a_i^{\bar i}=\theta_j a_i^{\bar i},\quad \nabla_{\bar j}a_{\bar i}^{i}=-\theta_{\bar j}a_{\bar i}^{i}. \qquad (1.11)$$

Вводя два новых аффинора

$$\underset{1}{A}_\alpha^\beta=e^{-\theta}a_\alpha^\beta,\quad \underset{2}{A}_\alpha^\beta=e^{\theta}a_\alpha^\beta, \qquad (1.12)$$

получим

$$\begin{array}{l} \nabla_k\underset{1}{A}_{\bar i}^{j}=0,\quad \nabla_{\bar k}\underset{1}{A}_i^{\bar j}=-2\theta_{\bar k}\underset{1}{A}_i^{\bar j}, \\ \nabla_{\bar k}\underset{2}{A}_{\bar i}^{j}=0,\quad \nabla_k\underset{2}{A}_i^{\bar j}=2\theta_k\underset{2}{A}_{\bar i}^{j}. \end{array} \qquad (1.13)$$

Рассматривая $\underset{2}{A}_{\bar i}^{j}$ как координаты вектора на позиции u, получаем n линейно независимых векторных полей, обладающих абсолютным параллелизмом на этой позиции, откуда следует, что на позициях геометрия евклидова.

Этот результат вытекает также из следующих рассуждений. Внутренняя геометрия на позициях является внутренней геометрией гиперповерхности, нормализованной связкой; ее нормали второго рода лежат на одной гиперплоскости, содержащей вершину нормали первого рода [1]. Переходя к условиям интегрируемости основных уравнений, получим из (1.2)

$$\nabla_{[j}\theta_{i]}=0,\quad b_{[ij]}=0. \qquad (1.14)$$

Из (1.3) находим

$$R_{kji}{}^{l}=0, \qquad (1.15)_1$$

$$R_{\bar k ji}{}^{l}=\partial_{\bar k}\Gamma_{ij}^{l}=2(\theta_{i\bar k}\delta_j^l+\theta_{jk}\delta_i^l-\theta_{m\bar k}b^{ml}b_{ij}), \qquad (1.15)_2$$

и

$$\nabla_{\bar{k}} b_{ij} = -\theta_{\bar{k}} b_{ij}, \ \nabla_{[k} b_{i]j} = \theta_{[k} b_{i]j}, \tag{1.16}$$

а из (1.4) следует $R_{\bar{k}\bar{j}i}{}^{l}=0$. Уравнение $(1.15)_1$ снова показывает, что внутренняя геометрия на позициях есть геометрия пространства нулевой кривизны.

Тензор $T_{ji}{}^{l} = R_{\bar{k}ji}{}^{l} d\bar{u}^k$ является тензором бесконечно малой аффинной деформации при переходе от одной позиции к бесконечно близкой позиции, а из $(1.15)_2$ следует, что эта деформация является конформным преобразованием метрики $\underset{1}{B}_{ij}$.

§ 2. Автополярный репер и деривационные формулы линейчатой поверхности S_4

В этом параграфе рассмотрим естественное оснащение линейчатой поверхности и запишем ее деривационные формулы через инварианты пространства автокомпозиции $Q_3 \subset S_4$. Задав поверхность кривыми ее пересечения с абсолютом

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t), \ \bar{\boldsymbol{u}} = \bar{\boldsymbol{u}}(t), \tag{2.1}$$

получим уравнение линейчатой поверхности $\boldsymbol{x} = \frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{2}}(e^{-i\alpha}\boldsymbol{u} + e^{i\alpha}\bar{\boldsymbol{u}})$, где α — параметр вдоль образующей, определяющий расстояние между ее точками. Касательным векторам $\frac{du^i}{dt}$ и $\frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{dt}$ к кривым $\boldsymbol{u}(t)$ и $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$ соответствуют нормальные точки

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_i \frac{du^i}{dt}, \ \bar{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\bar{i}} \frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{dt}, \tag{2.2}$$

определяющие прямую, полярно сопряженную с образующей $\boldsymbol{u}\bar{\boldsymbol{u}}$ и находящуюся на гиперплоскости, которая содержит две бесконечно близкие образующие. Вершины нормали первого рода выберем так, чтобы одна из ее вершин совпала с $\underset{1}{\boldsymbol{x}}$ — полюсом гиперплоскости, содержащим две бесконечно близкие образующие, а вторая с $\underset{2}{\boldsymbol{x}}$ — полюсом гиперплоскости, содержащей $\underset{1}{\boldsymbol{x}}$ и касательную плоскость в точке $\boldsymbol{x}$ линейчатой поверхности. Точка $\boldsymbol{z}$, полярно сопряженная точке $\boldsymbol{x}$ на образующей, будет одной опорной точкой нормали второго рода, а ее вторая точка $\boldsymbol{y}$ — точкой пересечения касательной плоскости с прямой $\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}$.

Легко убедиться, что $\underset{1}{\boldsymbol{x}}$ является полюсом прямой $\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}$ на второй нормали позиционной нормализации. Пользуясь этим, можем представить $\underset{1}{\boldsymbol{x}}$ как линейную комбинацию опорных точек $\boldsymbol{v}_i$ или $\bar{\boldsymbol{v}}_{\bar{i}}$: $\underset{1}{\boldsymbol{x}} = \mu^1\boldsymbol{v}_1 + \mu^2\boldsymbol{v}_2 + \mu^3\boldsymbol{v}_3$. Заметив, что $\underset{1}{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{v} = \underset{1}{\boldsymbol{x}}\bar{\boldsymbol{v}} = 0$, получим

$$\underset{1}{\boldsymbol{x}} = \rho \begin{vmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_1) & (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_2) & (\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}_3) \\ (\bar{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}_1) & (\bar{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}_2) & (\bar{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}_3) \end{vmatrix},$$

или после нормировки

$$\underset{1}{x} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ vv_1 & vv_2 & vv_3 \\ \bar{v}v_1 & \bar{v}v_2 & \bar{v}v_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ vv_1 & vv_2 & vv_3 \\ \bar{v}v_1 & \bar{v}v_2 & \bar{v}v_3 \end{vmatrix}^2}}. \tag{2.3}$$

Учитывая, что соприкасающаяся плоскость определяется точками u, $\bar{u}$, v, $\bar{v}$, можем записать также

$$\underset{1}{x} = \frac{[u\bar{u}v\bar{v}]}{\sqrt{[\bar{u}\bar{u}v\bar{v}]^2}}. \tag{2.4}$$

Перейдем к остальным вершинам. Вершина z сопряжена полярно точке x. Так как $xx_\alpha = 0$, то $z = x_\alpha$ и

$$z = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-\theta/2} (e^{-i\alpha} u - e^{i\alpha} \bar{u}). \tag{2.5}$$

Чтобы найти точку y, возьмем производную по t от x:

$$x_t = \frac{\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}}{2i} z + \frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{2}} (e^{-i\alpha} v + e^{i\alpha} \bar{v}), \tag{2.6}$$

где

$$\underset{1}{\dot\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt}, \quad \underset{2}{\dot\theta} = \frac{\partial\theta}{\partial \bar{u}^j} \frac{d\bar{u}^j}{dt}.$$

Отсюда следует, что

$$y = \frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{I - e^{-2i\alpha} b_1 - e^{2i\alpha} b_2}} (e^{-i\alpha} v + e^{i\alpha} \bar{v}). \tag{2.7}$$

Вершина репера $\underset{2}{x}$ является полюсом касательной плоскости в соприкасающейся гиперплоскости и находится на прямой $v\bar{v}$. Пользуясь этим и условием $y\underset{2}{x} = 0$, получаем

$$\underset{2}{x} = \frac{-ie^{-\theta/2}}{\sqrt{(I - e^{-2i\alpha} b_1 - e^{2i\alpha} b_2)\left[\left(\frac{I}{2}\right)^2 - b_1 b_2\right]}} \left[\left(\frac{I}{2} - e^{2i\alpha} b_2\right) e^{-i\alpha} v - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{I}{2} - e^{-2i\alpha} b_1\right) e^{i\alpha} \bar{v}\right], \tag{2.8}$$

где

$$b_1 = b_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = -e^{-\theta} (v)^2, \quad b_2 = b_{\bar{i}\bar{j}} \frac{d\bar{u}^i}{dt} \frac{d\bar{u}^j}{dt} = -e^{-\theta} (\bar{v})^2,$$

$$I = 2\theta_{i\bar{j}} \frac{du^i}{dt} \frac{d\bar{u}^j}{dt}.$$

Пользуясь обозначениями

$$J = \sqrt{I - e^{-2i\alpha} b_1 - e^{2i\alpha} b_2}, \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{I}{2}\right)^2 - b_1 b_2},$$

$$m = \frac{I}{2} - e^{2i\alpha} b_2, \quad \chi = \sqrt{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ (vv_1) & (vv_2) & (vv_3) \\ (\bar{v}v_1) & (\bar{v}v_2) & (\bar{v}v_3) \end{vmatrix}},$$

получим следующие разложения производных по α от вершин репера:

$$\begin{aligned} &x_\alpha = z, \qquad \underset{2}{x}_\alpha = -2\frac{\omega}{J^2}y, \\ &z_\alpha = -x, \qquad \underset{1}{x}_\alpha = 0, \\ &y_\alpha = 2\frac{\omega}{J^2}\underset{2}{x}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Напишем теперь разложение производных по t от вершин репера:

$$x_t = \frac{\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}}{2i} z + \frac{J}{\sqrt{2}} y, \tag{2.6$_1$}$$

$$z_t = -\frac{\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}}{2i} x - \frac{e^{-2i\alpha}b_1 - e^{2i\alpha}b_2}{2iJ}\sqrt{2}y + \frac{\omega}{J}\sqrt{2}\underset{2}{x}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} y_t = &-\frac{J}{2}x + \frac{e^{-2i\alpha}b_1 - e^{2i\alpha}b_2}{2iJ}\sqrt{2}z + \frac{-i}{J^2\omega}\{(\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta})\omega^2 + m\bar m_\delta - \bar m m_\delta\}\underset{2}{x} + \\ &+ \frac{e^{-\theta/2}}{J\chi}\{e^{-i\alpha}\underset{1}{N} + e^{i\alpha}\underset{2}{N}\}\underset{1}{x}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\underset{1}{x}_t = -\frac{e^{-\theta/2}}{J\chi}\{e^{-i\alpha}\underset{1}{N} + e^{i\alpha}\underset{2}{N}\}y + \frac{ie^{-\theta/2}}{J\chi\omega}\{me^{-i\alpha}\underset{1}{N} - \bar m e^{i\alpha}\underset{2}{N}\}\underset{2}{x}, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \underset{2}{x}_t = &-\frac{\omega}{J}\sqrt{2}z + \frac{i}{J^2\omega}\{(\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta})\omega^2 + m\bar m_\delta - \bar m m_\delta\}y + \\ &+ \frac{-ie^{-\theta/2}}{J\chi\omega}\{me^{-i\alpha}\underset{1}{N} - \bar m e^{i\alpha}\underset{2}{N}\}\underset{1}{x}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$m_\delta = \theta_{i\bar j}\frac{d\bar u^j}{dt}\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right) - e^{2i\alpha}b_{\bar i\bar j}\frac{d\bar u^i}{dt}\frac{\delta}{dt}\left(\frac{d\bar u^j}{dt}\right),$$

$$\underset{1}{N} = \begin{vmatrix} (v_iv_1) & (v_iv_2) & (v_iv_3) \\ (vv_1) & (vv_2) & (vv_3) \\ (\bar vv_1) & (\bar vv_2) & (\bar vv_3) \end{vmatrix}\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right),$$

$$\underset{2}{N} = \begin{vmatrix} (\bar v_{\bar i}v_1) & (\bar v_{\bar i}v_2) & \bar v_{\bar i}v_3) \\ (vv_1) & (vv_2) & (vv_3) \\ (\bar vv_1) & (\bar vv_2) & (\bar vv_3) \end{vmatrix}\frac{\delta}{dt}\left(\frac{d\bar u^i}{dt}\right).$$

Приведем таблицу коэффициентов этих разложений (см. с. 48). Вводя линейный элемент пространства автокомпозиции $Q_3 \subset S_4$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta, \tag{2.14}$$

будем иметь для касательного вектора любой неизотропной кривой

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{du^\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}. \tag{2.15}$$

Ковариантная производная этого вектора

$$\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^\alpha}{dt}\right) = \frac{\delta}{ds}\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{du^\alpha}{dt}\frac{1}{ds/dt}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{2.16}$$

Таблица 1

	x	z		$\underset{2}{x}$	$\underset{1}{x}$
x_t		$-\frac{\dot\theta_2-\dot\theta_1}{2i}$	$\frac{J}{\sqrt{2}}$		
z_t	$-\frac{\dot\theta_2-\dot\theta_1}{2i}$		$-\frac{\sqrt{2}(e^{-2i\alpha}b_1-e^{2i\alpha}b_2)}{2iJ}$	$\frac{\sqrt{2}\,\omega}{J}$	
y_t	$-\frac{J}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}(e^{-2i\alpha}b_1-e^{2i\alpha}b_2)}{2iJ}$		$-i\frac{(\dot\theta_2-\dot\theta_1)\,\omega^2+m\bar m_\delta-\bar m m_\delta}{J^2\omega}$	$e^{-\theta/2}(e^{-i\alpha}N_1+e^{i\alpha}N_2)$
$\underset{2}{x_t}$		$-\frac{\sqrt{2}\omega}{J}$	$i\frac{(\dot\theta_2-\dot\theta_1)\,u^2+m\bar m_\delta-\bar m m_\delta}{J^2\omega}$		$-i\frac{e^{-\theta/2}(me^{-i\alpha}N_1-\bar m e^{i\alpha}N_2)}{J\chi\omega}$
$\underset{1}{x_t}$			$\frac{-e^{-\theta/2}(e^{-i\alpha}N_1+e^{i\alpha}N_2)}{J\chi}$	$i\frac{e^{-\theta/2}(me^{-i\alpha}N_1-\bar m e^{i\alpha}N_2)}{J\chi\omega}$	

определена в адаптированных координатах уравнениями

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right) &= \frac{\delta}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{du^i}{dt}\,\frac{1}{ds/dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}, \\
\frac{\delta}{dt}\left(\frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{dt}\right) &= \frac{\delta}{ds}\left(\frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{ds}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{dt}\,\frac{1}{ds/dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Нормальные точки, соответствующие этим векторам в S_4, будут

$$
\begin{aligned}
v_\delta &= v_i\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right) = w\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + v\frac{1}{ds/dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}, \\
\bar{v}_\delta &= \bar{v}_{\bar{i}}\frac{\delta}{dt}\left(\frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{dt}\right) = \bar{w}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \bar{v}\frac{1}{ds/dt}\,\frac{d^2s}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Точки

$$
w = v_i\frac{\delta}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right), \quad \bar{w} = \bar{v}_{\bar{i}}\frac{\delta}{ds}\left(\frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{ds}\right) \tag{2.19}
$$

являются нормальными точками, соответствующими вектору $\frac{\delta}{ds}\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)$, т. е. *вектору кривизны* линии в пространстве автокомпозиции Q_3. Величины из таблицы 1, содержащие вторые производные от криволинейных координат, имеют вид

$$
\bar{m}m_\delta - m\bar{m}_\delta = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\{\bar{m}m_k - m\bar{m}_k\}, \tag{2.20}
$$

где

$$
m_k = \theta_{i\bar{j}}\frac{d\bar{u}^{\bar{j}}}{dt}\,\frac{\delta}{ds}\left(\frac{du^i}{ds}\right) - e^{2i\alpha}\,b_{\bar{i}\bar{j}}\,\frac{d\bar{u}^{\bar{i}}}{dt}\,\frac{\delta}{ds}\left(\frac{d\bar{u}^{\bar{j}}}{ds}\right), \tag{2.21}
$$

$$
\underset{1}{N} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\begin{vmatrix} wv_1 & wv_2 & wv_3 \\ vv_1 & vv_2 & vv_3 \\ \bar{v}v_1 & \bar{v}v_2 & \bar{v}v_3 \end{vmatrix}. \tag{2.22}
$$

Значит, эти величины зависят только от вектора кривизны.

§ 3. Стрикционные линии и соприкасающийся геликоид линейчатой поверхности

Точка в пространстве автокомпозиции гиперквадрики $Q_3 \subset S_4$ определяется парой точек на Q_3. Эти точки определяют прямую в S_4. Таким образом, точка в пространстве автокомпозиции Q_3 определяется прямой S_4. Линию в пространстве автокомпозиции $Q_3 \subset S_4$ можно сопоставить линейчатой поверхности S_4, которая характеризует линию в пространстве автокомпозиции Q_3. Если линия в пространстве автокомпозиции Q_3 является геодезической, то соответствующая ей линейчатая поверхность в S_4 есть геликоид. Известно, что если движущаяся прямая пересекает две полярно сопряженные прямые так, что отношение скоростей точек пересечения остается постоянным, то прямая описывает геликоид. Полярно сопряженные прямые являются осями геликоида, а отношение скоростей точек по осям геликоида назовем его параметром. В каждой своей точке линия пространства автокомпозиции имеет касательную геодезическую линию. Так как линии пространства автокомпозиции $Q_3 \subset S_4$ соответствует линейчатая поверхность, то касательной ее геодезической линии будет соответствовать геликоид, который назовем *соприкасающимся геликоидом* к линейчатой поверхности.

Касательная геодезическая линия определяется двумя бесконечно близкими точками заданной линии. Значит, соприкасающийся геликоид определяется двумя бесконечно близкими образующими линейчатой поверхности. Через две произвольные прямые пространства S_4 проходит один и только один геликоид, потому что существуют только две полярно сопряженные прямые, пересекающие эти прямые. Эти полярно сопряженные прямые являются осями геликоида, проходящего через заданные прямые. Точки на образующей линейчатой поверхности, через которые проходят оси соприкасающегося геликоида, являются точками стрикции. Легко убедиться, что оси соприкасающегося геликоида лежат на касательных плоскостях в точках стрикции линейчатой поверхности. Ясно, что линейчатая поверхность и соприкасающийся геликоид на общей образующей имеют одни и те же точки стрикции. Дифференциальное уравнение геодезической линии следующее:

$$\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^\alpha}{dt}\right) = \lambda \frac{du^\alpha}{dt}. \tag{3.1}$$

Это уравнение в адаптированных координатах приобретает вид

$$\frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^i}{dt}\right) = \lambda \frac{du^i}{dt}, \quad \frac{\delta}{dt}\left(\frac{du^{\bar{i}}}{dt}\right) = \lambda \frac{du^{\bar{i}}}{dt}. \tag{3.1$_1$}$$

Из таблицы 1 получим таблицу 2, если учесть условия $(3.1)_1$. Таблицу 2 можно назвать таблицей деривационных формул геликоида. Одновременно таблицу 2 можно рассматривать как таблицу деривационных формул соприкасающегося геликоида линейчатой поверхности, если в таблице 2 подставить соответствующие величины из уравнений линейчатой поверхности.

Находим точки стрикции на образующей линейчатой поверхности и оси соприкасающегося геликоида. Так как оси геликоида являются полярно сопряженными прямыми, то они пересекают прямую $\boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{v}}$. Поясним это.

Двумя бесконечно близкими образующими линейчатой поверхности вообще определяется гиперплоскость, на которой находятся прямые $\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{v}}$ и соприкасающийся геликоид, так как ее можно определить прямыми $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ и $\overline{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}$ или осями соприкасающегося геликоида. В этой гиперплоскости оси соприкасающегося геликоида пересекают прямую $\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{u}}$ и также должны пересекать и ее полярно сопряженную прямую $\boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{v}}$. Из (2.6) и (2.7) видно, что через каждую точку образующей проходит только одна прямая $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$, которая пересекает прямую $\boldsymbol{v}\overline{\boldsymbol{v}}$ и находится на касательной плоскости. Если мы найдем те полярно сопряженные точки $\boldsymbol{x}$ и $'\boldsymbol{x}$ на образующей, для которых соответствующие точки $\boldsymbol{y}$ и $'\boldsymbol{y}$ тоже будут полярно сопряженными, то $\boldsymbol{x}$ и $'\boldsymbol{x}$ будут точками стрикции, а прямые $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ и $'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$ осями соприкасающегося геликоида. На касательной плоскости в точках

$$\boldsymbol{x} = \frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\alpha}\boldsymbol{u} + e^{i\alpha}\overline{\boldsymbol{u}}\right) \text{ и } '\boldsymbol{x} = -i\frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\alpha}\boldsymbol{u} - e^{i\alpha}\overline{\boldsymbol{u}}\right)$$

имеем соответственно

$$\boldsymbol{y} = \frac{e^{-\theta/2}}{J}\left(e^{-i\alpha}\boldsymbol{v} + e^{i\alpha}\overline{\boldsymbol{v}}\right) \text{ и } '\boldsymbol{y} = -i\frac{e^{-\theta/2}}{J'}\left(e^{-i\alpha}\boldsymbol{v} - e^{i\alpha}\overline{\boldsymbol{v}}\right).$$

Таблица 2

	x	z	y	$\underset{2}{x}$	$\underset{1}{x}$
x_t		$\dfrac{\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}}{2i}$	$\dfrac{J}{\sqrt{2}}$		
z_t	$-\dfrac{\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}}{2i}$		$\dfrac{e^{-2i\alpha} b_1 - e^{2i\alpha} b_2}{i \sqrt{2} J}$	$\dfrac{\omega \sqrt{2}}{J}$	
y_t	$-\dfrac{J}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{e^{-2i\alpha} b_1 - e^{2i\alpha} b_2}{i \sqrt{2} J}$		$\dfrac{(\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}) \omega}{i J}$	
$\underset{2}{x_t}$		$-\dfrac{\omega \sqrt{2}}{J}$	$-\dfrac{(\underset{2}{\dot\theta} - \underset{1}{\dot\theta}) \omega}{iJ}$		
$\underset{1}{x_t}$					

Потребуем, чтобы y и $'y$ были полярно сопряженными: $y'y=0$. Тогда получим $e^{-4i\alpha}=\frac{b_2}{b_1}$, или $e^{-i\alpha}=\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}$. Таким образом, точки стрикции определяются векторами

$$x=\frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}u+\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\bar{u}\right),\quad 'x=-i\frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}u-\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\bar{u}\right).$$

Соответственно получаем

$$y=\frac{e^{-\theta/2}}{\sqrt{I-2\sqrt{b_1b_2}}}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}v+\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\bar{v}\right),$$

$$'y=-\frac{ie^{-\theta/2}}{\sqrt{I+\sqrt{b_1b_2}}}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}v-\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\bar{v}\right).$$

Таким образом, определяются оси xy и $'x'y$ соприкасающегося геликоида. Теперь определим его параметр. Из таблицы 2 и из (2.9) видно, что точка dx находится на прямой xy, если

$$\frac{\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1}{2i}dt+d\alpha=0. \tag{3.2}$$

В таком случае получаем $dx=\frac{J}{\sqrt{2}}ydt$. По определению параметр геликоида π есть отношение $\sqrt{\frac{dx^2}{d'x^2}}$ при условии (3.2) в точках стрикции, откуда

$$\pi=\frac{J}{J'}=\frac{\sqrt{\frac{I}{2}-\sqrt{b_1b_2}}}{\sqrt{\frac{I}{2}+\sqrt{b_1b_2}}}=\frac{\omega}{\frac{I}{2}+\sqrt{b_1b_2}}.$$

Все полученные результаты можно распространить на многообразие кругов. Для этого линейчатую поверхность надо заменить круговой поверхностью, а геликоид — геоциклидой. В таблице 1 записаны деривационные формулы круговой поверхности, в таблице 2— деривационные формулы геоциклиды. Оси геликоида будут определять осевые круги, а параметр π можно называть параметром геоциклиды.

§ 4. Линейчатая поверхность, которая изображает многообразие кругов, имеющее огибающую

В этом параграфе рассматривается частный случай § 3, когда $\omega=0$. Из (2.7) или (2.9) в этом случае получим $y_\alpha^2=0$ с двумя возможностями:

а) y_α является самосопряженной точкой, т. е. находится на абсолюте;

б) y не зависит от α, т. е. точки v и $\bar{v}$ совпадают.

Исследуем случай а). y_α является точкой на абсолюте, это означает, что прямая $v\bar{v}$ касается абсолюта. Точка касания есть y_α или $\underset{2}{x}$. Получается, что гиперплоскость, определяющаяся двумя бесконечно близкими образующими, т. е. соприкасающаяся гиперплоскость линей-

Таблица 3

	x	z	y	$\underset{2}{x}$	$\underset{1}{x}$
x_t			$\dfrac{J}{\sqrt{2}}$		
z_t	-1		$\dfrac{e^{2i\alpha}b_2 - e^{-2i\alpha}b_1}{2iJ/\sqrt{2}}$	$\dfrac{\omega}{J/\sqrt{2}}$	
y_t	$-\dfrac{J}{\sqrt{2}}$	$-\dfrac{e^{2i\alpha}b_2 - e^{-2i\alpha}b_1}{2iJ/\sqrt{2}}$		$-\dfrac{\omega^2 + \dfrac{m\bar{m}_\delta - \bar{m}m_\delta}{2i}}{\omega\, J^2/2}$	$\dfrac{e^{-\theta/2}(e^{-i\alpha}\underset{1}{N} + e^{i\alpha}\underset{2}{N})}{J\chi}$
$\underset{2}{x_t}$		$-\dfrac{\omega}{J/\sqrt{2}}$	$-\dfrac{\omega^2 + \dfrac{m\bar{m}_\delta - \bar{m}m_\delta}{2i}}{\omega\, J^2/2}$		$\dfrac{e^{-\theta/2}(me^{-i\alpha}\underset{1}{N} - \bar{m}e^{i\alpha}\underset{2}{N})}{iJ\chi\omega}$
$\underset{1}{x_t}$			$-\dfrac{e^{-\theta/2}(e^{-i\alpha}\underset{1}{N} + e^{i\alpha}\underset{2}{N})}{J\chi}$	$-\dfrac{e^{-\theta/2}(me^{-i\alpha}\underset{1}{N} - \bar{m}e^{i\alpha}\underset{2}{N})}{iJ\chi\omega}$	

Таблица 4

	x	z	y	$\underset{2}{x}$	$\underset{1}{x}$
x_t		1	$\frac{J}{\sqrt{2}}$		
z_t	-1			$\frac{J'}{\sqrt{2}}$	
y_t	$-\frac{J}{\sqrt{2}}$			$\pi+\frac{m\bar{m}_\delta-\bar{m}m_\delta}{2i\,J^2\omega}$	$\frac{e^{-\theta/2}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}\underset{1}{N}+\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\underset{2}{N}\right)}{J\chi}$
$\underset{2}{x_t}$		$-\frac{J'}{\sqrt{2}}$	$-\pi-\frac{m\bar{m}_\delta-\bar{m}m_\delta}{2i\,J^2\omega}$		$\frac{e^{-\theta/2}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}\,m\underset{1}{N}-\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\,m\underset{2}{N}\right)}{iJ\,\omega\chi}$
$\underset{1}{x_t}$			$-\frac{e^{-\theta/2}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}\underset{1}{N}+\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\underset{2}{N}\right)}{J\chi}$	$-\frac{e^{-\theta/2}\left(\sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1}}\,m\underset{1}{N}-\sqrt[4]{\frac{b_1}{b_2}}\,\bar{m}\underset{2}{N}\right)}{iJ\,\omega\chi}$	

чатой поверхности, касается абсолюта. Ясно, что $\underset{1}{x}$ совпадает с $\underset{2}{x}$ в точке касания.

Образующими линейчатой поверхности, для которой имеет место а), изображается многообразие кругов, которое имеет одну ветвь огибающей. Так как гиперплоскость, определяющаяся двумя бесконечно близкими образующими, касается абсолюта, то изображающиеся ими бесконечно близкие круги являются встречающимися кругами, т. е. имеют одну характеристическую точку.

Теперь рассмотрим случай б). Если y не зависит от α, то касательная плоскость линейчатой поверхности не меняется вдоль образующей. А это означает, что поверхность — развертывающаяся. Так как две бесконечно близкие образующие развертывающейся поверхности находятся на касательной плоскости, то характеристической точкой на образующей изображается сфера, которая содержит два бесконечно близких круга, изображающих бесконечно близкие образующие. Два круга, находящиеся на одной сфере, вообще, пересекаются в двух точках. Значит, два бесконечно близких круга имеют две характеристические точки.

Приходим к выводу, что образующими развертывающейся поверхности изображаются многообразия кругов, имеющих две ветви огибающей. В зависимости от типа абсолюта, индуцированного на касательной плоскости развертывающейся поверхности, ветвями огибающей будут:

1) две действительные ветви, когда плоскость не пересекает абсолют;

2) две сливающиеся ветви, когда плоскость касается абсолюта;

3) две комплексно сопряженные ветви, когда плоскость пересекает абсолют.

Таблицы 1 и 2 составлены при любом параметре t. Выбором параметра t можно упростить таблицы. Новый параметр τ выбираем так, чтобы имело место дифференциальное уравнение

$$d\tau = \frac{\underset{2}{\dot{\theta}} - \underset{1}{\dot{\theta}}}{2i}\, dt.$$

В таком случае таблица 1 приобретает вид таблицы 3. Таблица 1 значительно упрощается для точки x, совпадающей с точкой стрикции (таблица 4).

г. Казань

Поступило
30 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Норден А. П. Пространство декартовой композиции. Изв. вузов., Матем., 1963, № 4.

2. Розенфельд Б. А. Конформно-дифференциальная геометрия семейств C_m в C_n. Матем. сб., т. 23 (65) : 2, 1948.

3. Розенфельд Б. А. Внутренняя геометрия множества m-мерных плоскостей n-мерного эллиптического пространства. ИАН СССР, т. 5, 1941, с. 353—368.

4. Розенфельд Б. А. Внутренняя геометрия множества прямых эллиптического пространства. Учен. зап. МГУ, вып. 73, 1944, с. 49—58.

5. Норден А. П. Пространства аффинной связности. М.—Л., Гостехиздат, 1950.