Т. М. Местечкина, О решении задачи Коши для одного класса стохастических дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка,
Изв. вузов. Матем., 1991, номер 8, 42–44

https://www.mathnet.ru/ivm5134

Т. М. Местечкина

УДК 519.216

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть на некотором полном вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ заданы взаимно независимые винеровские процессы $w_k(t)$, $k=0, 1, \ldots, n$. В полосе $[s, T]\times R^n$ (R^n есть n-мерное евклидово пространство) рассмотрим обратную задачу Коши:

$$-d_t u(t, x) = (\nabla, dA(t))\, u(t, x) + d_t B(t, x), \quad u(T, x) = \varphi(x), \tag{1}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_k,\ k=1, 2, \ldots, n)$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в R^n,

$$dA(t) = (a_k(t)\, dt + \alpha_k(t) \circ dw_k(t),\ k=1, 2, \ldots, n),$$

$$d_t B(t, x) = b(t, x)\, dt + \beta(t, x) \circ dw_0(t),$$

$f(t) \circ dw(t)$ — обратный стохастический дифференциал. Поскольку названную задачу нельзя рассматривать как частный случай задачи Коши для параболического уравнения Ито второго порядка, остается, следуя высказанным в работе [1] предположениям, установить связь задачи (1) с детерминированной задачей Коши для уравнения параболического типа

$$\partial v(t, x)/\partial t = -(1/2)(\nabla * \alpha(t),\ \nabla * \alpha(t))\, v(t, x), \quad v(s, x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где $F * G = \|f_{kj} g_{kj}\|$ для матриц $F = \|f_{kj}\|$, $G = \|g_{kj}\|$ одинаковой размерности — произведение в смысле Адамара.

Решением обратной задачи Коши для уравнения (1) назовем обратно предсказуемый случайный процесс, непрерывно дифференцируемый по x, непрерывный по t и удовлетворяющий проинтегрированному на отрезке $[t, T]$ соотношению (1) для всех $(t, x) \in [s, T] \times R^n$ с вероятностью 1.

Для непрерывных коэффициентов с помощью формулы Ито — Вентцель можно доказать взаимно однозначное соответствие между ограниченным дважды непрерывно дифференцируемым по x с вероятностью 1 решением $u_0(t, x)$ прямой задачи Коши для уравнения

$$d_t u_0(t, x) = (\nabla, [a(t)\, dt + \alpha(t) * dw(t)])\, u_0(t, x), \quad u_0(s, x) = \varphi(x), \tag{1*}$$

где

$$\begin{Bmatrix} a(t) \\ \alpha(t) \\ w(t) \end{Bmatrix} = \left(\begin{Bmatrix} a_k(t) \\ \alpha_k(t) \\ w_k(t) \end{Bmatrix},\quad k = 1, 2, \ldots, n \right),$$

и регулярным решением задачи Коши для уравнения (2), если только частные производные по x первых двух порядков этих решений ограничены, а именно,

$$u_0(t, x) = v\left(t, x + \int_s^t a(r)\, dr + \int_s^t \alpha(r) * dw(r)\right),$$

$$v(t, x) = u_0\left(t, x - \int_s^t a(r)\, dr - \int_s^t \alpha(r) * dw(r)\right).$$

Случай интегрируемых коэффициентов рассмотрен в [2]. Не останавливаясь на проблеме разрешимости задачи (2) (см. [3] и приведенную там библиографию), сформулируем следующий результат.

Лемма. *Предположим, что коэффициент $a(t)$ абсолютно интегрируем, $\alpha(t)$ интегрируем с квадратом, функция φ, определенная на комплексном пространстве, ограничена и непрерывно дифференцируема. Тогда прямая задача Коши для уравнения* (1*) *имеет единственное решение*

$$u_0(t, x) = \pi^{-n/2} \int_{R^n} \varphi\left(x + \int_s^t a(r)\, dr + \int_s^t \alpha(r) * dw(r) + iy * \sqrt{2\int_s^t \alpha(r) * \alpha(r)\, dr}\right) \exp\{-|y|^2\}\, dy.$$

В соответствии с [4] приведенная лемма справедлива и для обратной задачи Коши. Тем самым обеспечено построение решения, которое по аналогии с детерминированным случаем может быть названо общим решением однородного уравнения. Остается угадать вид „частного решения“ неоднородного уравнения (1).

Теорема. *Предположим, что коэффициенты* $a(t)$, $\alpha(t)$ *и начальная функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условиям леммы, а функции* $b(t, x)$, $\beta(t, x)$ *ограничены, непрерывны по* t *и непрерывно дифференцируемы по* x (x *комплексное*). *Тогда решение обратной задачи Коши* (1) *имеет вид*

$$u(t, x) = \int_{R^n} \varphi\left(x + \int_t^T dA(r) + iy * \left(2\int_t^T \alpha(r) * \alpha(r)\, dr\right)^{1/2}\right) d\mu_y +$$

$$+ \int_t^T \int_{R^n} b\left(\tau, x + \int_t^\tau dA(r) + iy * \left(2\int_t^\tau \alpha(r) * \alpha(r)\, dr\right)^{1/2}\right) d\mu_y d\tau +$$

$$+ \int_t^T \int_{R^n} \beta\left(\tau, x + \int_t^\tau dA(r) + iy * \left(2\int_t^\tau \alpha(r) * \alpha(r)\, dr\right)^{1/2}\right) d\mu_y \circ dw_0(\tau), \tag{3}$$

где $d\mu_y = \pi^{-n/2} \exp\{-|y|^2\}\, dy$.

Доказательство. Первое слагаемое в правой части (3) — решение соответствующего (1) однородного уравнения. С использованием его фундаментального решения можно построить решение уравнения (1). Так, второе слагаемое в (3) удовлетворяет (1) с $\beta(t, x) \equiv 0$ и нулевым начальным условием. Наибольший интерес представляет третье слагаемое.

Рассмотрим более подробно функцию

$$\dot I(t, x, z) = \int_t^T \int_{R^n} \beta\left(\tau, x + z - \int_\tau^T dA(r) + iy * \left(2\int_t^\tau \alpha(r) * \alpha(r)\, dr\right)^{1/2}\right) d\mu_y \circ dw_0(\tau).$$

Отметим, что

$$\int_s^T \left(\int_{R^n} \beta\left(\tau, x + z - \int_\tau^T dA(r) + iy * \left(2\int_t^\tau \alpha(r) * \alpha(r)\, dr\right)^{1/2}\right) d\mu_y\right)^2 d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{t\in[s, T]} \sup_{x\in R^n} \beta^2(t, x)\,(T - s) < \infty.$$

Как стохастический интеграл, зависящий от параметра [5], функция $\dot I(t, x, z)$ непрерывна по всем своим аргументам с вероятностью 1. Пусть

$$\int_t^\tau \alpha_k^2(r)\, dr > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

для произвольных (t, τ) из интервала $[s, T]$. Представив $\dot I(t, x, z)$ в виде

$$\dot I(t, x, z) = (2\pi)^{-n/2} \int_t^T \prod_{k=1}^n \left(\int_t^\tau \alpha_k^2(r)\, dr\right)^{-1/2} \int_{R^n} \beta(\tau, iy) \exp\left\{-\sum_{k=1}^n \left(y_k + ix_k + iz_k -\right.\right.$$

$$\left.\left. - i\int_\tau^T a_k(r)\, dr - i\int_\tau^T \alpha_k(r) \circ dw_k(r)\right)^2 \left(2\int_t^\tau \alpha_k^2(r)\, dr\right)^{-1}\right\} dy \circ dw_0(\tau),$$

убеждаемся, что для дифференцируемости $\dot I(t, x, z)$ по x в этом случае не требуется дифференцируемость функции β:

$$\partial \dot I(t, x, z)/\partial x = \partial \dot I(t, x, z)/\partial z.$$

Согласно стохастическому аналогу теоремы Фубини [6] и формуле Ито имеем

$$-d_t \int_{R^n} \beta\left(\tau, x + \int_t^T dA(r) - \int_\tau^T dA(r) + iy * \left(2\int_t^\tau \alpha(r) * \alpha(r)\, dr\right)^{1/2}\right) d\mu_y = (\nabla, dA(t)) \int_{R^n} \beta\, d\mu_y +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \alpha_k^2(t) \left[i \int_{R^n} y_k \frac{\partial \beta}{\partial x_k} d\mu_y \left(2\int_t^\tau \alpha_k^2(r)\, dr\right)^{-1/2} + \frac{1}{2}\int_{R^n} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_k^2} d\mu_y\right] dt,$$

где в целях экономии места опущены аргументы функции β. При этом

$$\int_{R^n} y_k \frac{\partial\beta}{\partial x_k} d\mu_y = \frac{i}{2}\left(2\int_t^\tau \alpha_k^2(r)\,dr\right)^{1/2} \int_{R^n} \frac{\partial^2\beta}{\partial x_k^2} d\mu_y,$$

$$\int_t^T \int_{R^n} \frac{\partial\beta}{\partial x_k} d\mu_y \circ dw_0(\tau) = \partial \dot{I}\left(t, x, \int_t^T dA(r)\right) \Big/ \partial x_k.$$

Таким образом, из трех последних неравенств и формулы Ито — Вентцель вытекает

$$-d_t \dot{I}\left(t, x, \int_t^T dA(r)\right) = \beta(t, x) \circ dw_0(t) + (\nabla, dA(t))\, \dot{I}\left(t, x, \int_t^T dA(r)\right).$$

Итак, доказано, что $\dot{I}\left(t, x, \int_t^T dA(t)\right)$ — решение уравнения (1) с $b(t, x) \equiv 0$, $\dot{I}(T, x, 0) = 0$ и функция $u(t, x)$, определенная равенством (3), есть решение обратной задачи Коши (1). Поскольку в общем случае условие (4) не выполнено, необходима непрерывность, ограниченность и непрерывная дифференцируемость по x функций $b(t, x)$, $\beta(t, x)$, $\varphi(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ogawa S. A partial differential equation with the white noise as a conffficient // Zeitsch. Wahrscheinlichkeitstsheor. und verw. Gebiete.— 1973.— Bd. 28.—№ 1.— S. 53—71.

2. Местечкина Т. М. Задача Коши для уравнений в частных производных первого порядка с коэффициентами типа „белого шума" // Современ. анализ и его прилож.— Киев, 1989.— С. 136—141.

3. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка.— М.: Наука, 1985.— 376 с.

4. Розовский Б. Л. Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов.— М.: Наука, 1983.— 208 с.

5. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев, 1968.— 354 с.

6. Kailath T., Segall A., Zakai M. Fubini-type theorems for stochastic integrals // Sankhya. Indian J. Statist.— 1978.— A40.— № 2.— P. 138—143.

г. Одесса

Поступила
19.06.1990

В. А. Мирзоян

УДК 514.752

РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОДМНОГООБРАЗИЙ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ФОРМОЙ α_s $(s \geqslant 3)$

§ 1. Введение

В последнее время интенсивно изучаются подмногообразия с параллельными фундаментальными формами α_s ($\bar\nabla\alpha_s = 0$, $s \geqslant 2$) в евклидовом пространстве E_n или в пространствах постоянной кривизны. Эти подмногообразия имеют внутреннюю геометрию локально симметрического риманова пространства, являются некомпактными (при $s \geqslant 3$ и $\alpha_s \neq 0$) и обладают рядом других замечательных свойств. Значительным событием в геометрии подмногообразий явилась классификация Д. Ферусом [1] в 1980 г. подмногообразий с $\bar\nabla\alpha_2 = 0$. В пространствах постоянной кривизны подмногообразия с $\bar\nabla\alpha_2 = 0$ были классифицированы М. Такеути [2]. Другим методом, более алгебраическим, эту же классификацию получили Е. Бакес и Х. Рекцигел [3].

Среди подмногообразий с параллельными фундаментальными формами высших порядков наиболее изучены подмногообразия с $\bar\nabla\alpha_3 = 0$. В [4] перечислены все двумерные подмногообразия с $\bar\nabla\alpha_3 = 0$ в E_n. Трехмерные под-