над базисом с некоторой кусочно-линейной непрерывной функцией активации в ее классическом понимании (одноместная функция), необходимо и достаточно, чтобы "хвосты" данной функции активации вели себя как линейные функции с разным наклоном.

Далее, теоретический интерес представляет оценка нелинейной сложности и глубины для нейронных схем, которые выражают функции класса CPL и соответствуют нейронным сетям с произвольными кусочно-линейными непрерывными функциями активации (одноместными функциями). Приведем оценку сверху нелинейной сложности и глубины получаемых схем.

Теорема 4. *Пусть* $\Psi \in \mathrm{CPL} \setminus \mathrm{CFP}$. *Тогда верно, что любую функцию* $f \in \mathrm{CPL}$, *заданную над разбиением* $R(L) = \{R^1, \ldots, R^s\}$, *порожденным гиперплоскостями* $L = \{l_1, \ldots, l_k\}$, *можно восстановить нейронной схемой над базисом* $L \cup \{\Psi\}$ *нелинейной глубины* $2 \cdot \lceil \log_2 s' \rceil$ *и нелинейной сложности, не превосходящей* $2 \cdot s' \cdot (k \cdot \lceil s'/2 \rceil + 1)$, *где* $s' = |V(L)|$.

Идейно теорема 4 доказывается через восстановление в явном виде формулы для выразимости CPL-функции в теореме 2 и явной формулы для выразимости функции $\mathrm{RELU}(x)$ в теореме 1.

Автор выражает благодарность научному руководителю В. С. Половникову за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Половников В.С.* О нелинейных характеристиках нейронных схем в произвольных базисах // Интеллект. системы. Теория и приложения. 2013. **17**, вып. 2. 87–90.
2. *Половников В.С.* О задаче проверки функциональной полноты в классе кусочно-параллельных функций // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 6. 31–35.
3. *Wang Sh., Sun X.* Generalization of hitting hyperplanes // IEEE Trans. Inform. Theory. 2005. **51**, N 12. 4425–4431.
4. *Кан А.Н.* Вопросы полноты в классе кусочно-линейных непрерывных функций // Интеллект. системы. Теория и приложения. 2017. **21**, вып. 2. 46–56.
5. *Шишляков В.Г.* Выразимость CPL-функций нейронными схемами над ReLU-базисами // Интеллект. системы. Теория и приложения. 2023. **27**, вып. 1. 35–78.

Поступила в редакцию
22.12.2023

УДК 531.01

О ВОЗМОЖНОСТИ ДИССИПАТИВНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В. А. Зубенко[1], Е. И. Кугушев[2], Т. В. Шахова[3]

Рассматривается консервативная система с одной степенью свободы, допускающая периодическое движение. Система помещается на поступательно движущееся основание, и к силам, действующим на точки системы, добавляются силы линейного вязкого трения. Определяется закон движения основания, позволяющий сохранить периодическое движение исходной системы относительно этого основания. С использованием неравен-

[1] *Зубенко Вероника Алексеевна* — асп. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: zoubenkova@gmail.com.

Zubenko Veronika Alekseevna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

[2] *Кугушев Евгений Иванович* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kugushev@keldysh.ru.

Kugushev Evgenii Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

[3] *Шахова Татьяна Валентиновна* — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: tatiana.shahova@math.msu.ru.

Shakhova Tatiana Valentinovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

ства Важевского получены условия, при выполнении которых это движение становится асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Ключевые слова: периодическое движение, устойчивость, вязкое трение, подвижное основание, неравенство Важевского.

A conservative system with one degree of freedom admitting a periodic motion is considered. The system is located on a translationally moving base. Linear viscous friction forces are added to the forces acting on the points of the system. We determine the law of motion of the base that allows one to preserve the periodic motion of the initial system relative to this base. The conditions when the periodic motion becomes Lyapunov asymptotically stable have been obtained by using the Vazhevsky inequality.

Key words: periodic motion, stability, viscous friction, moving base, Vazhevsky's inequality.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-2-16

1. Введение. Рассмотрим консервативную механическую систему с одной степенью свободы, допускающую периодическое движение. В общем случае в окрестности этого движения на фазовой плоскости все движения системы также периодические, а выбранное движение орбитально устойчиво, но неустойчиво по Ляпунову. Добавим к силам, действующим на точки системы, силы линейного вязкого трения, что разрушит выбранное периодическое движение. Однако если поместить систему на основание, движущееся поступательно по заданному закону, то в системе появятся переносные силы инерции. При некоторых условиях можно подобрать такой закон движения основания, что относительно основания выбранное периодическое движение исходной системы сохранится и даже станет асимптотически устойчивым по Ляпунову. Возникновение такой асимптотической устойчивости будем называть диссипативной стабилизацией. В работе [1] с использованием интегрального признака устойчивости Ляпунова были получены условия диссипативной стабилизации периодического движения в окрестности устойчивого положения равновесия. В настоящей работе решается задача определения условий диссипативной стабилизации выбранного периодического движения с использованием неравенства Важевского.

2. Постановка задачи. Пусть система N материальных точек с массами $m_1, \dots, m_N$, на которую наложены идеальные стационарные голономные связи и действуют консервативные силы, расположена на некотором неподвижном основании. Обозначим через $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N$ радиусы-векторы точек системы с началом в некоторой точке O основания, через $V = V(\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_N)$ — потенциальную энергию системы. Предположим, что система имеет одну степень свободы и q — ее обобщенная координата. Тогда $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q)$ $(i = 1, \dots, N)$, $V = V(\boldsymbol{r}_1(q), \dots, \boldsymbol{r}_N(q))$, а кинетическая энергия системы в движении относительно основания представляется в виде

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\,a(q)\dot{q}^2, \qquad a(q) > 0.$$

Будем считать, что система допускает периодическое движение $q = q_*(t)$.

Пусть теперь основание движется поступательно и его положение относительно абсолютной системы координат задается радиусом-вектором $\boldsymbol{w}(t)$ точки O основания. Кинетическая энергия системы в абсолютном движении равна

$$T_{\text{abs}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_i + \dot{\boldsymbol{w}})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2 + M\langle \dot{\boldsymbol{r}}_S, \dot{\boldsymbol{w}}\rangle + \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{w}}^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\,a(q)\dot{q}^2 - M\langle \boldsymbol{r}_S(q), \ddot{\boldsymbol{w}}(t)\rangle + \frac{d}{dt}\big(M\langle \boldsymbol{r}_S(q), \dot{\boldsymbol{w}}(t)\rangle\big) + \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{w}}^2(t),$$

где $\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{r}_S(q)$ — радиус-вектор центра масс S системы с началом в точке O, M — суммарная масса системы. Будем считать, что потенциальная энергия системы в случаях неподвижного и подвижного основания — одна и та же с точностью до калибровочного слагаемого функция $V = V(q)$. Добавим к консервативным силам, действующим на точки системы, силы линейного вязкого трения, которым соответствует обобщенная сила $Q = -c(q)\dot{q}$, где $c(q) > 0$.

Цель работы — получить условия, при выполнении которых периодическое движение $q = q_*(t)$ исходной системы сохранится в случае подвижного основания и станет асимптотически устойчивым

по Ляпунову. Предполагается, что все функции, участвующие в рассмотрении, достаточно гладкие по своим аргументам.

3. Условия диссипативной стабилизации периодического движения. С точностью до калибровочных слагаемых, не влияющих на уравнения Лагранжа [2], функция Лагранжа системы на подвижном основании равна

$$L = \frac{1}{2}\,a(q)\dot{q}^2 - M\langle \boldsymbol{r}_S(q), \ddot{\boldsymbol{w}}(t)\rangle - V(q),$$

поэтому уравнение движение системы имеет вид

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + M\langle \boldsymbol{r}'_S(q), \ddot{\boldsymbol{w}}\rangle + V'(q) = -c(q)\dot{q}, \tag{1}$$

где $(\cdot)'$ — производная по q.

Поскольку функция $q = q_*(t)$ является решением уравнения движения системы при неподвижном основании в отсутствие трения ($\boldsymbol{w}(t) \equiv 0, c(q) \equiv 0$), то

$$a(q_*(t))\ddot{q}_*(t) + \frac{1}{2}a'(q_*(t))\dot{q}_*^2(t) + V'(q_*(t)) \equiv 0.$$

Это решение сохраняется в случае подвижного основания тогда и только тогда, когда в любой момент времени выполнено условие

$$M\langle \boldsymbol{r}'_S(q_*(t)), \ddot{\boldsymbol{w}}(t)\rangle = -c(q_*(t))\dot{q}_*(t). \tag{2}$$

Полученное скалярное равенство линейно относительно $\ddot{\boldsymbol{w}}(t)$, поэтому при $\boldsymbol{r}'_S(q_*(t)) \neq 0$ всегда можно подобрать $\ddot{\boldsymbol{w}}(t)$ так, чтобы для выбранного периодического движения $q_*(t)$ это равенство было выполнено. В качестве $\ddot{\boldsymbol{w}}(t)$ можно взять вектор вида $\boldsymbol{b}_1(t) + \boldsymbol{b}_2(t)$, где $\boldsymbol{b}_1 = -\dfrac{c(q_*(t))\dot{q}_*(t)}{M|\boldsymbol{r}'_S(q_*(t))|^2}\boldsymbol{r}'_S(q_*(t))$, а $\boldsymbol{b}_2$ — произвольный вектор, ортогональный $\boldsymbol{b}_1$.

Для исследования устойчивости решения $q_*(t)$ уравнения (1) сделаем замену переменной $q = q_*(t) + \xi$ и линеаризуем уравнение (1) в окрестности этого решения. В результате получим

$$\ddot{\xi} + \alpha(t)\dot{\xi} + \beta(t)\xi = 0, \tag{3}$$

где

$$\alpha(t) = \frac{a'(q_*)}{a(q_*)}\,\dot{q}_* + \frac{c(q_*)}{a(q_*)}, \qquad \beta(t) = \frac{a'(q_*)}{a(q_*)}\,\ddot{q}_* + \frac{a''(q_*)}{2a(q_*)}\,\dot{q}_*^2 + \frac{M}{a(q_*)}\langle \boldsymbol{r}''_S(q_*), \ddot{\boldsymbol{w}}\rangle + \frac{V''(q_*)}{a(q_*)} + \frac{c'(q_*)}{a(q_*)}\,\dot{q}_*.$$

Здесь $\alpha(t), \beta(t)$ — периодические функции времени, период которых совпадает с периодом функции $q_*(t)$. Исследуем устойчивость решения $\xi(t) \equiv 0$ уравнения (3) с использованием неравенства Важевского. Для этого, перейдя к безразмерным обобщенной координате и времени, запишем уравнение (3) в безразмерных переменных. После обезразмеривания уравнение сохранит свой вид, поэтому, оставив старые обозначения, далее будем считать, что уравнение (3) записано в безразмерных переменных ξ и t.

Следуя [3], сформулируем теорему о неравенстве Важевского.

Теорема (неравенство Важевского). *Для любого решения линейной дифференциальной системы*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{A}(t) \in C[t_0, \infty), \tag{4}$$

при $t_0 \leqslant t < \infty$ справедливо неравенство

$$|\boldsymbol{x}(t_0)| \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(t_1)dt_1 \leqslant |\boldsymbol{x}(t)| \leqslant |\boldsymbol{x}(t_0)| \exp \int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(t_1)\,dt_1, \tag{5}$$

где $|\boldsymbol{x}(t)|$ — евклидова норма вектора $\boldsymbol{x}(t)$; $\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ — наименьший и наибольший характеристические корни эрмитово-симметризованной матрицы

$$\mathbb{A}^H(t) = \frac{1}{2}[\mathbb{A}(t) + \mathbb{A}^*(t)],$$

причем матрица $\mathbb{A}(t) = [a_{ik}(t)]$ и $\mathbb{A}^*(t) = \overline{[a_{ki}(t)]}$ — ее эрмитово-сопряженная матрица.

После замены переменной

$$\xi = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha(s)ds} x \tag{6}$$

линеаризованное уравнение (3) примет вид

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \qquad \text{где} \qquad p(t) = \beta(t) - \frac{\alpha^2(t)}{4} - \frac{\dot{\alpha}(t)}{2}.$$

Полагая $\dot{x} = v$, запишем это уравнение в виде системы (4):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}.$$

Тогда эрмитово-симметризованная матрица системы и ее характеристические корни равны

$$\mathbb{A}^H(t) = \frac{1}{2}[\mathbb{A}(t) + \mathbb{A}^*(t)] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1-p(t) \\ 1-p(t) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{1,2} = \pm\frac{1-p(t)}{2}.$$

Согласно неравенству Важевского (5) имеем

$$|x(0)| \exp \int_0^t \lambda(s)ds \leqslant |x(t)| \leqslant |x(0)| \exp \int_0^t \Lambda(s)ds,$$

где $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$, $\Lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$. Отсюда в силу замены (6) для решений линеаризованного уравнения (3) получаем неравенство

$$|\xi(0)| \exp \int_0^t \lambda^*(s)ds \leqslant |\xi(t)| \leqslant |\xi(0)| \exp \int_0^t \Lambda^*(s)ds,$$

где $\lambda^* = \min(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, $\Lambda^* = \max(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, а $\lambda_{1,2}^* = \frac{1}{2}\big(\pm(1-p(t)) - \alpha(t)\big)$.

Периодические непрерывные функции $\lambda_{1,2}^*(t)$ достигают наибольшего значения на периоде. Значит, если эти функции меньше нуля при всех t на периоде, то их максимум отрицателен. Тогда функция $\Lambda^*(t)$ при всех t удовлетворяет условию $\Lambda^*(t) \leqslant h < 0$, где $h = \text{const}$, характеристические показатели линеаризованного уравнения (3) отрицательны и из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [3] следует асимптотическая устойчивость решения $q = q_*(t)$ уравнения (1). Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть консервативная механическая система с одной степенью свободы допускает периодическое движение. Если к консервативным силам, действующим на точки системы, добавить силы линейного вязкого трения и поместить систему на поступательно движущееся основание, то периодическое движение сохранится относительно подвижного основания тогда и только тогда, когда выполнено условие* (2)*. Если при этом коэффициенты обезразмеренного линеаризованного уравнения движения* (3) *при всех* t *удовлетворяют условиям*

$$\alpha(t) > 0, \qquad \frac{1}{2}\,\dot{\alpha}(t) + \Big(1 - \frac{1}{2}\,\alpha(t)\Big)^2 < \beta(t) < \frac{1}{2}\,\dot{\alpha}(t) + \Big(1 + \frac{1}{2}\,\alpha(t)\Big)^2, \tag{7}$$

то это периодическое движение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

В общем случае условия (7) диссипативной стабилизации достаточно громоздки для анализа, поэтому далее остановимся на частном случае системы с одной степенью свободы.

4. Диссипативная стабилизация периодического движения в частном случае. Предположим, что для периодического движения $q_*(t)$ системы траекторией движения центра масс S системы является бирегулярная кривая. Выберем в качестве обобщенной координаты q натуральный параметр этой кривой. Ускорение точки O подвижного основания будем искать в виде

$$\ddot{\boldsymbol{w}} = f_\tau(t)\boldsymbol{e}_\tau(q) + f_\nu(t)\boldsymbol{e}_\nu(q),$$

где $\boldsymbol{e}_\tau(q)$ и $\boldsymbol{e}_\nu(q)$ — единичные касательный вектор и вектор главной нормали к траектории движения центра масс системы в точке $\boldsymbol{r}_S(q)$ соответственно. Поскольку q — натуральный параметр, то $\boldsymbol{r}'_S(q) = \boldsymbol{e}_\tau(q)$ и $\boldsymbol{r}''_S(q) = k(q)\boldsymbol{e}_\nu(q)$, где $k(q)$ — кривизна траектории движения центра масс. Из условия (2) сохранения периодического движения $q = q_*(t)$ находим

$$f_\tau(t) = -\frac{c(q_*(t))\dot{q}_*(t)}{M}. \tag{8}$$

Пусть система такова, что $a(q) = a = \text{const}$ и $c(q) = c = \text{const}$. Тогда линеаризованное уравнение (3) имеет вид

$$\ddot{\xi} + \frac{c}{a}\,\dot{\xi} + \left(\frac{M}{a}\,k(q_*(t))f_\nu(t) + \frac{V''(q_*(t))}{a}\right)\xi = 0. \tag{9}$$

Выполнив замену $\xi = l_* s$, $t = t_*\tau$, запишем это уравнение в безразмерных переменных s и τ:

$$\frac{d^2 s}{d\tau^2} + \frac{t_* c}{a}\frac{ds}{d\tau} + \frac{t_*^2}{a}\left(Mk(q_*)f_\nu + V''(q_*)\right)s = 0.$$

Здесь l_* — характерная длина (например, амплитуда колебаний периодического движения), а t_* — характерное время (например, период этого движения). Согласно утверждению 1 при выполнении для любого τ на периоде условий

$$\frac{t_* c}{a} > 0, \qquad -V''(q_*) + \left(1 - \frac{t_* c}{2a}\right)^2 \frac{a}{t_*^2} < Mf_\nu k(q_*) < -V''(q_*) + \left(1 + \frac{t_* c}{2a}\right)^2 \frac{a}{t_*^2}$$

решение $q = q_*(t_*\tau)$ будет асимптотически устойчиво. Первое неравенство выполнено, и всегда можно подобрать $f_\nu(\tau)$ так, чтобы выполнялось и второе неравенство. Таким образом, всегда можно подобрать такой закон движения основания, что периодическое движение исходной системы сохранится относительно подвижного основания и станет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

В частности, для линеаризованного уравнения (9) выберем $f_\nu(t)$ так, чтобы при всех t выполнялось равенство

$$Mk(q_*(t))f_\nu(t) + V''(q_*(t)) = D = \text{const} > 0. \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) будет линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и корни его характеристического уравнения будут иметь отрицательные действительные части. Значит, по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению решение $q = q_*(t)$ уравнения движения системы на подвижном основании будет асимптотически устойчивым.

В качестве примера такой системы рассмотрим математический маятник с линейным вязким трением и движущейся точкой подвеса. Система представляет собой материальную точку массы m, находящуюся в неподвижной вертикальной плоскости в однородном поле силы тяжести и закрепленную на конце невесомого стержня длины l. Другой конец стержня закреплен в некоторой точке основания (точка подвеса). Основание движется поступательно в вертикальной плоскости, на точку действует сила линейного вязкого трения $\boldsymbol{F} = -c\dot{\boldsymbol{r}}$, где $c = \text{const} > 0$, $\dot{\boldsymbol{r}}$ — скорость точки относительно основания. За обобщенную координату q примем натуральный параметр окружности, по которой движется точка при неподвижном основании. Эта координата по модулю равна длине дуги, отсчитываемой от нижней точки окружности, и в зависимости от выбранного направления отсчета дуг принимает положительные или отрицательные значения. Кинетическая и потенциальная энергии маятника при неподвижном основании равны

$$T = \frac{1}{2}\,m\dot{q}^2, \qquad V = -mgl\cos\frac{q}{l}.$$

Силе линейного вязкого трения отвечает обобщенная сила, равная $Q = -c\dot{q}$. Пусть $q = q_*(t)$ — некоторое периодическое движение маятника при неподвижном основании в отсутствие трения. Согласно (8), (10) зададим вектор ускорения точки подвеса в виде

$$\ddot{\boldsymbol{w}}(t) = -\frac{c}{m}\,\dot{q}_*(t)\boldsymbol{e}_\tau(q_*(t)) + \left(\widetilde{D} - g\cos\frac{q_*(t)}{l}\right)\boldsymbol{e}_\nu(q_*(t)),$$

где $\widetilde{D} = \text{const} > 0$. Тогда это периодическое движение сохранится в случае подвижного основания и будет асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Замечание. При натуральной параметризации имеем $\langle \boldsymbol{r}''_S, \ddot{\boldsymbol{w}} \rangle = k(q) f_\nu(t)$, поэтому в общем случае коэффициент $\beta(t)$ линеаризованного уравнения (3) будет содержать только компоненту f_ν ускорения точки O подвижного основания. Выберем коэффициент диссипации $c(q)$ так, чтобы для периодического решения $q_*(t)$ при любом t на периоде выполнялось неравенство $\alpha(t) > 0$. Тогда всегда можно подобрать $f_\nu(t)$ так, чтобы для коэффициента $\beta(t)$ выполнялись неравенства из условий устойчивости (7). Таким образом, если в качестве обобщенной координаты q можно взять натуральный параметр для траектории движения центра масс, отвечающей периодическому движению $q_*(t)$ системы, то для этого движения возможна диссипативная стабилизация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубенко В.А., Кугушев Е.И., Шахова Т.В.* Стабилизация периодических движений некоторых механических систем, расположенных на подвижном основании // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Мат-лы XVI Междунар. конф. (1–3 июня 2022 г., Москва) / Под общ. ред. В.Н. Тхая. М.: ИПУ РАН, 2022. 204–207.
2. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. М.: Академия, 2010.
3. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

Поступила в редакцию
21.02.2024

УДК 531

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛЮСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАЗИГЕОГРАФИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

С. П. Аблясова[1]

Задача моделирования траекторных параметров движения объекта — координат, вектора линейной скорости, углов ориентации корпуса объекта, “идеальных” показаний инерциальных датчиков (датчиков угловой скорости и акселерометров (ньютонометров)) — над/под географическим полюсом востребована при решении задачи тестирования бортовых алгоритмов инерциальных навигационных систем, например бескарданных инерциальных навигационных систем. Особенность задачи состоит в том, что в соответствующих моделях нельзя использовать традиционные параметры, такие, как географическая долгота, угол истинного курса, поскольку они вырождаются в точках, лежащих на оси вращения Земли. В работе обосновывается подход к моделированию траектории и показаний инерциальных датчиков, учитывающий особенность навигации в приполярных районах.

Ключевые слова: квазикоординаты, географический полюс, моделирование траектории, показания инерциальных датчиков.

The paper discusses the challenges of inertial navigation in polar regions, where it is impossible to determine longitude and true heading at the poles. To overcome this difficulty, we propose using quasi-coordinates and quasi-attitude angles as well as relevant quasi-Greenwich and quasi-geodetic reference frames. It is proved that the quasi-geodetic (quasi-geocentric) coordinates, quasi-angles of orientation, velocities of an object and inertial sensors readings can be simulated by using quasi-coordinates instead of traditional ones.

Key words: quasi-coordinates, geographic pole, trajectory simulation, simulation of inertial sensors readings.

DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-66-2-17

Рассматривается задача моделирования траекторных параметров объекта и согласованной имитации показаний инерциальных датчиков в случае, когда траектория пересекает ось вращения Земли. Поскольку в традиционных моделях имитаторов движения объекта оперируют, как правило,

[1] *Аблясова София Павловна* — студ. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ablyasova2002@yandex.ru.

Ablyasova Sofiya Pavlovna — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.