J. D. Kaplunov, B. Zupančič, A. V. Nikonov, Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces,
Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform., 2024, Volume 24, Issue 1, 57–62

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 57–62
Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 57–62
mmi.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62, EDN: LNJVVN

Научная статья
УДК 539.3

Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях

Ю. Д. Каплунов[1]✉, Б. Зупанчич[2], А. В. Никонов[3]

[1]Университет г. Киль, Великобритания, ST5 5BG, графство Стаффордшир, г. Киль
[2]Национальный институт химии, Словения, 1000, г. Любляна, Хайдрихова ул., д. 19
[3]Люблянский университет, Словения, 1000, г. Любляна, Конгресни трг, д. 12

Каплунов Юлий Давидович, доктор физико-математических наук, профессор Школы компьютерных наук и математики, j.kaplunov@keele.ac.uk, https://orcid.org/0000-0001-7505-4546, AuthorID: 6305
Зупанчич Барбара, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теоретических исследований, barbara.zupancic@ki.si, https://orcid.org/0000-0001-7296-8086
Никонов Анатолий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор факультета машиностроения, anatolij.nikonov@fs.uni-lj.si, https://orcid.org/0000-0003-3586-1401, AuthorID: 396401

Аннотация. Рассматривается осесимметричная задача о поперечном обжатии тонкого упругого диска при отсутствии проскальзывания. Построено асимптотическое решение для внутреннего напряженно-деформированного состояния. Намечен подход к определению плоского погранслоя, локализованного около внешнего контура диска.

Ключевые слова: асимптотические методы, асиптотическое решение, осесимметричная задача, задача обжатия, смешанные граничные условия, напряженно-деформированное состояние, плоский погранслой
Для цитирования: *Каплунов Ю. Д., Зупанчич Б., Никонов А. В.* Асимптотический анализ осесимметричной задачи об обжатии тонкого упругого диска в случае смешанных граничных условий на лицевых поверхностях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 57–62. https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62, EDN: LNJVVN

Article

Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces

J. D. Kaplunov[1]✉, B. Zupančič[2], A. V. Nikonov[3]

[1]Keele University, Keele, Staffordshire ST5 5BG, UK
[2]National Institute of Chemistry, 19 Hajdrihova, Ljubljana 1000, Slovenia
[3]University of Ljubljana, 12 Kongresni trg, Ljubljana 1000, Slovenia

Julius D. Kaplunov, j.kaplunov@keele.ac.uk, https://orcid.org/0000-0001-7505-4546, AuthorID: 6305
Barbara Zupančič, barbara.zupancic@ki.si, https://orcid.org/0000-0001-7296-8086
Anatolij V. Nikonov, anatolij.nikonov@fs.uni-lj.si, https://orcid.org/0000-0003-3586-1401, AuthorID: 396401

Abstract. The axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk is considered in slip absence. An asymptotic solution for the interior stress-strain state is constructed. An approach to determining a plane boundary layer localized near the outer contour of the disk is outlined.

Keywords: asymptotic methods, asymptotic solution, axisymmetric problem, compression problem, mixed boundary conditions, stress-strain state, flat boundary layer

For citation: Kaplunov J. D., Zupančič B., Nikonov A. V. Asymptotic analysis of the axisymmetric problem for the transverse compression of a thin elastic disk in the case of mixed boundary conditions along its faces. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 57–62 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-1-57-62, EDN: LNJVVN

Введение

В основе общей математической теории тонких пластин и оболочек лежит универсальный асимптотический подход, позволяющий сводить исходные трехмерные уравнения теории упругости к двумерным [1–3]. Этот подход, в частности, позволяет учесть поперечное обжатие в рамках двумерной постановки [1–4]. При этом в подавляющем большинстве работ рассматриваются тонкие упругие тела с заданными напряжениями на лицевых поверхностях. Более общие граничные условия, включая смешанные, исследовались гораздо реже (см. например: [5–7]).

В данной статье смешанные граничные условия на лицевых поверхностях рассматриваются применительно к задачам обжатия. В качестве примера изучается осесимметричная деформация диска, сжимаемого нормальными напряжениями при пренебрежении проскальзывания. Таким образом, предполагается отсутствие касательных перемещений на лицевых поверхностях. Толщина диска считается малой по сравнению с его радиусом. Для определенности контур диска полагается свободным от напряжений.

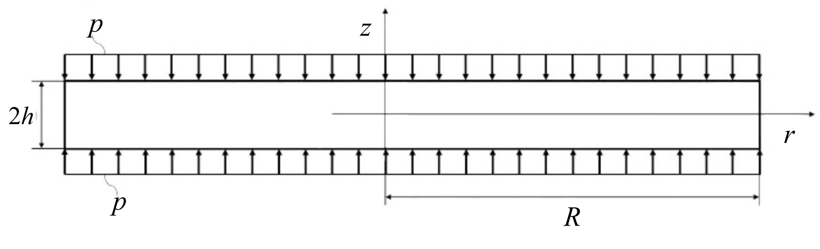
Сформулированная задача исследуется с помощью метода асимптотического интегрирования [1, 5]. Найдена асимптотика внутреннего напряженного состояния, которая кардинально отличается от аналогичной асимптотики для обжатия с проскальзыванием, т. е. при равенстве нулю касательных напряжений, а не перемещений [3]. В главном приближении получены простые алгебраические формулы, выражающие параметры напряженно-деформированного состояния через заданную обжимающую поперечную нагрузку. При этом формируется невязка в однородных граничных условиях на внешнем свободном контуре диска.

Показывается, что для снятия такой невязки следует построить так называемый плоский погранслой, локализующийся около внешнего контура [1]. Существенно, что изучаемые смешанные граничные условия на лицевых поверхностях как обеспечивают затухание погранслоя, так и позволяют представить погранслой в виде ряда Фурье, аналогично тому, как это было сделано при решении близких задач в [8, 9].

Ввиду ограниченности объема статьи за ее рамками остается вычисление погранслоя, так же как и построение асимптотических поправок к полученному внутреннему решению. Соответствующий анализ может быть легко осуществлен с помощью разработанной в статье методологии, которая также может быть распространена на диск с произвольным контуром.

1. Постановка задачи

Рассмотрим круглый диск постоянной толщины $2h$ и радиуса R, под воздействием обжимающих напряжений амплитуды p, заданных на его лицевых поверхностях (рисунок).



Поперечное сечение диска / Figure. The cross section of the disc

Предположим, что материал диска изотропный и линейный упругий. Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) с началом координат в центре срединной плоскости диска, так что ось z направлена вдоль перпендикуляра к этой плоскости. Для определенности положим, что боковая поверхность диска свободна от нагрузок.

В осесимметричном случае, когда напряжения не зависят от полярного угла φ, уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0,$$
$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = 0,$$

где σ_r, σ_φ, σ_z, $\tau_{r\varphi}$, τ_{rz}, $\tau_{\varphi z}$ являются компонентами тензора напряжений.

Определяющие соотношения для линейного изотропного упругого тела в цилиндрических координатах имеют вид

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \tau_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right),$$
$$\sigma_\varphi = (\lambda + 2\mu)\frac{u}{r} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right),$$
$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right), \quad \tau_{\varphi z} = \mu\frac{\partial v}{\partial z},$$

где λ и μ — постоянные Ламе, а u, v, w — компоненты вектора перемещений, которые также не зависят от угла φ. Ограничимся случаем, когда окружные перемещения равны нулю, т. е. $v = 0$.

Смешанные граничные условия на лицевых поверхностях диска $z = \pm h$, моделирующие поперечное обжатие при отсутствии проскальзывания, примем в виде

$$\sigma_z = -p, \quad u = 0. \tag{1}$$

Очевидно, что ввиду симметрии выписанных граничных условий относительно плоскости $z = 0$ перемещения u и w соответственно будут четными и нечетными функциями поперечной координаты z.

На свободном внешнем контуре диска $r = R$ имеем однородные граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{rz} = 0. \tag{2}$$

2. Внутреннее решение

Введем малый геометрический параметр $\varepsilon = h/R \ll 1$ и масштабируем исходные переменные как

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \eta = \frac{z}{h}.$$

Определим также безразмерные величины

$$u^* = \frac{u}{h}, \quad w^* = \frac{w}{R},$$
$$\sigma_r^* = \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_r, \quad \sigma_\varphi^* = \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_\varphi, \quad \sigma_z^* = \frac{\varepsilon}{\mu}\sigma_z, \quad \tau_{rz}^* = \frac{1}{\mu}\tau_{rz}, \quad p^* = \frac{\varepsilon}{\mu}p. \tag{3}$$

Здесь и далее считается, что все величины со звездочкой имеют одинаковый асимптотический порядок.

Асимптотика напряженно-деформированного состояния диска, задаваемая этими формулами, отличается от аналогичной асимптотики в случае обжатия с проскальзыванием, когда однородное граничное условие принимает вид $\tau_{rz} = 0$.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения в безразмерной форме теперь можно переписать в форме

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial \eta} + \frac{\sigma_r^* - \sigma_\varphi^*}{\xi} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial \xi} + \frac{\tau_{rz}^*}{\xi} \right) = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

и

$$\begin{gathered} \sigma_r^* = \alpha \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left[(\alpha+2) \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \alpha \frac{u^*}{\xi} \right], \\ \sigma_\varphi^* = \alpha \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \varepsilon^2 \left[(\alpha+2) \frac{u^*}{\xi} + \alpha \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right], \\ \sigma_z^* = (\alpha+2) \frac{\partial w^*}{\partial \eta} + \alpha \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{u^*}{\xi} \right), \\ \tau_{rz}^* = \frac{\partial u^*}{\partial \eta} + \frac{\partial w^*}{\partial \xi}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\alpha = \lambda/\mu$.

Граничные условия принимают вид

$$\sigma_z^* = -p^*, \quad u^* = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1 \tag{6}$$

и

$$\sigma_r^* = 0, \quad \tau_{rz}^* = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1.$$

Теперь разложим перемещения и напряжения в асимптотические ряды по малому параметру ε:

$$\begin{pmatrix} u^* \\ w^* \\ \sigma_r^* \\ \sigma_\varphi^* \\ \sigma_z^* \\ \tau_{rz}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{(0)} \\ w^{(0)} \\ \sigma_r^{(0)} \\ \sigma_\varphi^{(0)} \\ \sigma_z^{(0)} \\ \tau_{rz}^{(0)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ w^{(1)} \\ \sigma_r^{(1)} \\ \sigma_\varphi^{(1)} \\ \sigma_z^{(1)} \\ \tau_{rz}^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots$$

Подставив эти разложения в уравнения (4) и (5) и граничные условия (6), получим в главном приближении

$$\begin{gathered} \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}}{\xi} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_z^{(0)}}{\partial \eta} = 0, \quad \sigma_r^{(0)} = \alpha \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad \sigma_\varphi^{(0)} = \alpha \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_z^{(0)} = (\alpha+2) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \eta}, \quad \tau_{rz}^{(0)} = \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \eta} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \end{gathered} \tag{7}$$

и

$$\sigma_z^{(0)} = -p^*(\xi), \quad u^{(0)} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \pm 1. \tag{8}$$

Интегрируя уравнения (7) с граничными условиями (8) по η, имеем

$$\begin{gathered} u^{(0)} = \frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)} \frac{\partial p^*(\xi)}{\partial \xi} (\eta^2 - 1), \quad w^{(0)} = -\frac{\eta}{\alpha+2} p^*(\xi), \\ \sigma_r^{(0)} = \sigma_\varphi^{(0)} = -\frac{\alpha}{\alpha+2} p^*(\xi), \quad \sigma_z^{(0)} = -p^*(\xi), \quad \tau_{rz}^{(0)} = \frac{\alpha}{\alpha+2} \frac{\partial p^*(\xi)}{\partial \xi} \eta. \end{gathered} \tag{9}$$

3. Обсуждение

В размерных величинах асимптотическое решение (9) принимает вид

$$
\begin{gathered}
u = \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}(z^2-h^2)\frac{\partial p(r)}{\partial r}, \quad w = -\frac{z}{(\lambda+2\mu)}p(r), \\
\sigma_r = \sigma_\varphi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p(r), \quad \sigma_z = -p(r), \quad \tau_{rz} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}z\frac{\partial p(r)}{\partial r}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Приведенные соотношения отражают специфику изучаемых смешанных граничных условий на лицевых поверхностях, задаваемых формулой (1). В частности, касательное перемещение u непостоянно по толщине диска, как в случае граничных условий в напряжениях [3]. Это обусловлено тем, что принятая неклассическая асимптотика (3) соответствует именно упомянутым смешанным граничным условиям.

Нетрудно заметить, что полученное решение (10) не удовлетворяет граничным условиям (2). При этом там образуется невязка

$$
\sigma_r = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p(R), \quad \tau_{rz} = \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}z\frac{\partial p(r)}{\partial r}\bigg|_{r=R}.
$$

Для ее компенсации следует ввести в рассмотрение так называемый плоский погранслой [1], локализованный в малой окрестности (порядка толщины) контура диска. Он описывается уравнениями плоской задачи теории упругости в полуполосе толщиной $2h$ (см. рисунок), в декартовых координатах $(x = R - r, z)$. В этом случае ставятся однородные условия на лицевых поверхностях и следующие условия при $x = 0$:

$$
\sigma_x = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}p(0), \quad \tau_{xz} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}z\frac{\partial p(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0}.
$$

Ввиду присутствия малого множителя $O(\varepsilon)$ ($z = h\eta$, $x = R(1-\xi)$) во втором из этих условий его в главном приближении можно считать однородным.

Отметим также, что при выбранных смешанных граничных условиях на лицевых поверхностях автоматически гарантируется экспоненциальное затухание погранслоя. Эти условия позволяют также разделение переменных в уравнениях плоской задачи теории упругости аналогично [8, 9].

Список литературы

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. Москва : Наука, 1976. 512 с.
2. *Коссович Л. Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 176 с.
3. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Nolde E. V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San-Diego : Academic Press, 1998. 226 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-20923-8
4. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Moukhomodiarov R. R.* Impact normal compression of an elastic plate: analysis utilising an advanced asymptotic 2D model // Mechanics Research Communications. 2000. Vol. 27, iss. 1. P. 117–122. https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00070-7
5. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. Москва : Наука, 1997. 414 с.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1992. № 3. С. 5–17.
7. *Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L.* Justification and refinement of Winkler – Fuss hypothesis // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2018. Vol. 69. Art. 80. https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1
8. *Вильде М. В., Каплунов Ю. Д., Коссович Л. Ю.* Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. Москва : Физматлит, 2010. 280 с.
9. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Ju., Wilde M. V.* Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // The Journal of the Acoustical Society of America. 2000. Vol. 107, iss. 3. P. 1383–1393. https://doi.org/10.1121/1.428426

References

1. Goldenweiser A. L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of Elastic Thin Shells]. Moscow, Nauka, 1976. 512 p. (in Russian).
2. Kossovich L. Yu. *Nestatsionarnye zadachi teorii uprugikh tonkikh obolochek* [Nonstationary Problems in the Theory of Elastic Thin Shells]. Saratov, Saratov State University Publ., 1986. 176 p. (in Russian).
3. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V. *Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies*. San-Diego, Academic Press, 1998. 226 p. https://doi.org/10.1016/c2009-0-20923-8
4. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Moukhomodiarov R. R. Impact normal compression of an elastic plate: analysis utilising an advanced asymptotic 2D model. *Mechanics Research Communications*, 2000, vol. 27, iss. 1, pp. 117–122. https://doi.org/10.1016/S0093-6413(00)00070-7
5. Agalovyan L. A. *Asimptoticheskaya teoriya anizotropnykh plastin i obolochek* [The Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1997. 414 p. (in Russian).
6. Goldenweiser A. L. General theory of thin elastic bodies (shells, coatings, and gaskets). *Mechanics of Solids*, 1992, vol. 3, pp. 5–17 (in Russian).
7. Kaplunov J., Prikazchikov D., Sultanova L. Justification and refinement of Winkler – Fuss hypothesis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2018, vol. 69, art. 80. https://doi.org/10.1007/s00033-018-0974-1
8. Wilde M. V., Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu. *Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavleniya v uprugikh telakh* [Edge and Interfacial Resonance Phenomena in Elastic Bodies]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 280 p. (in Russian).
9. Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Wilde M. V. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2000, vol. 107, iss. 3, pp. 1383–1393. https://doi.org/10.1121/1.428426

Поступила в редакцию / Received 05.12.2023
Принята к публикации / Accepted 28.12.2023
Опубликована / Published 01.03.2024