И. Д. Кан, Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. V, *Труды МИАН*, 2017, том 296, 133–139

DOI: 10.1134/S0371968517010101

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2017, т. 296, с. 133–139

УДК 511.321+511.31

Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. V[1]

И. Д. Кан[2]

Поступило 16 апреля 2016 г.

Доказывается, что знаменатели тех конечных цепных дробей, все неполные частные которых принадлежат произвольному конечному алфавиту $\mathcal{A}$ с параметром $\delta > 0.7807\ldots$ (т.е. такому, что множество бесконечных цепных дробей с неполными частными из этого алфавита имеет хаусдорфову размерность δ, удовлетворяющую неравенству $\delta > 0.7807\ldots$), содержат положительную долю натуральных чисел. Ранее аналогичная теорема была известна лишь для алфавитов с несколько большими значениями δ. Именно, впервые результат такого рода для произвольного конечного алфавита с $\delta > 0.9839\ldots$ получили в 2011 г. Бургейн и Конторович. Далее в 2013 г. автор статьи и Д.А. Фроленков доказали теорему для произвольного конечного алфавита с $\delta > 0.8333\ldots$. Результат автора 2015 г., предшествующий настоящему, относился к произвольному конечному алфавиту с $\delta > 0.7862\ldots$.

DOI: 10.1134/S0371968517010101

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. История вопроса. Для $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$ через $[d_1, d_2, \ldots, d_k]$ будем обозначать конечную цепную дробь

$$[d_1, d_2, \ldots, d_k] = \cfrac{1}{d_1 + \cfrac{1}{d_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{d_k}}}}, \tag{1.1}$$

а через $\mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$ — множество рациональных чисел b/d, представимых конечными цепными дробями с неполными частными $d_1, d_2, \ldots, d_k$ из некоторого конечного алфавита $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{A}} = \left\{ \frac{b}{d} = [d_1, d_2, \ldots, d_k] \;\middle|\; d_j \in \mathcal{A} \text{ при } j = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

Через $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ обозначим множество знаменателей d несократимых дробей $b/d \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \left\{ d \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists b \in \mathbb{N}\colon \gcd(b,d) = 1,\ b < d,\ \frac{b}{d} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}} \right\}.$$

Гипотеза 1.1 (Заремба [1]). *Существует константа A такая, что для алфавита $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, A\}$ имеет место равенство $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$.*

Обзор результатов, связанных с гипотезой 1.1, можно найти в работах [2, 3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-05700-а).

[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия.
E-mail: igor.kan@list.ru

Для алфавита $\mathcal{A}$ число d называется *допустимым* [2], если для любого $q > 1$ множество $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ содержит хотя бы одно число, сравнимое с d по модулю q. Множество допустимых чисел обозначим через $\mathfrak{A}_{\mathcal{A}}$. Через $\delta = \delta_{\mathcal{A}}$ обозначим хаусдорфову размерность множества бесконечных цепных дробей с неполными частными из алфавита $\mathcal{A}$. Для каждого элемента $d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ его *кратностью* называется количество натуральных чисел чисел $b < d$, взаимно простых с d и таких, что $b/d \in \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}$. Бургейн и Конторович в 2011 г. доказали следующее.

Теорема 1.1 (см. [2, Theorems 1.2, 1.8]). *Пусть алфавит $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию $\delta > 307/312 = 0.9839\ldots$. Тогда множество $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ содержит почти все допустимые числа. Точнее, найдется константа $c = c(\mathcal{A}) > 0$ такая, что для всех достаточно больших чисел N в множестве $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \cap [0.5N, N]$ содержится по крайней мере*

$$|\mathfrak{A}_{\mathcal{A}} \cap [0.5N, N]|\bigl(1 - \exp\{-c\sqrt{\log N}\}\bigr) \tag{1.2}$$

элементов, причем для кратности m_d каждого такого элемента d верна оценка

$$m_d \gg N^{2\delta-1.001}. \tag{1.3}$$

В частности, справедливо неравенство

$$|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \cap [1, N]| \gg N. \tag{1.4}$$

Теорема 1.1 применима к алфавиту $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, 50\}$ [2]. В дальнейшем по поводу различных обобщений теоремы 1.1 несколькими авторами был написан целый ряд работ [4–11]. Так, в [7] автор настоящей статьи и Д.А. Фроленков доказали неравенство (1.4) для алфавита $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Далее Хуан [9] доказал для того же алфавита $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ формулы (1.2) и (1.3). Из доказательства теоремы Хуана следует общий принцип: для всякого c такого, что $0.5 < c < 1$, для вывода при условии $\delta > c$ формул (1.2) и (1.3) методом Бургейна–Конторовича достаточно тем же методом доказать формулу (1.4) при том же условии. С помощью этого принципа в [10] было доказано, что в теореме 1.1 оценку $\delta > 0.9839\ldots$ можно заменить условием $\delta > (\sqrt{19} - 2)/3 = 0.7862\ldots$, которому удовлетворяет алфавит $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Недавно Мэджи, О и Винтер [11] доказали, что при некотором положительном ε для алфавита $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеет место неравенство $|\mathfrak{D}_{\mathcal{A}} \cap [1, N]| \geq N(1 - N^{-\varepsilon})$.

1.2. Основной результат. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1.2. *Пусть алфавит $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию*

$$\delta > 0.25(\sqrt{17} - 1) = 0.7807\ldots. \tag{1.5}$$

Тогда множество $\mathfrak{D}_{\mathcal{A}}$ содержит положительную долю натуральных чисел и почти все допустимые числа. Точнее, справедливы формулы (1.2)–(1.4).

2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АНСАМБЛЯ

Через $G_{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ обозначим мультипликативную полугруппу с единицей $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, состоящую из произведений (2×2)-матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ d_1 & d_1 d_2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_4 \\ d_3 & d_3 d_4 + 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & d_k \\ d_{k-1} & d_{k-1} d_k + 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где k четно и $d_1, d_2, \ldots, d_k \in \mathcal{A}$. За норму матрицы (2.1) обычно [4–8] принимается величина $\|g\| = d = \langle d_1, d_2, \ldots, d_k \rangle$ — знаменатель несократимой дроби, равной конечной цепной дроби (1.1) (или *континуант*).

Скажем, что при $n \in \mathbb{N}$ для некоторого множества $\Xi \subseteq G_{\mathcal{A}}$ имеет место разложение $\Xi = \Omega_1\Omega_2$ на *независимые* множители Ω_1, Ω_2, если для каждой матрицы $\gamma \in \Xi$ найдется, причем единственный, набор матриц g_1, g_2 таких, что

$$\gamma = g_1 g_2, \qquad g_1 \in \Omega_1, \qquad g_2 \in \Omega_2.$$

Конечно, при этом выполняется равенство $|\Xi| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|$.

Всюду далее будем использовать следующие обозначения: N — достаточно большое натуральное число, $\varepsilon_0 \in (0, 0.0004)$ — фиксированное произвольно малое число, $A = \max \mathcal{A}$, $Q_1 = [\exp\{A^4\varepsilon_0^{-5}\}] + 1$, где для всякого $w \in \mathbb{R}$ по определению $[w] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \le w\}$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ положим

$$Q_j = \mathbf{1}_{\{j\neq 0\}}(Q_1)^j,$$

где $\mathbf{1}_{\{j\neq 0\}} = 1$ при $j \neq 0$ и $\mathbf{1}_{\{j\neq 0\}} = 0$ при $j = 0$.

По достаточно большому числу N и по малому параметру $\varepsilon_0 \in (0, 0.0004)$ в [6] было построено специальное множество матриц — *ансамбль* (см. терминологию в [2])

$$\Omega^{(N)} = \Omega^{(N,\varepsilon_0)} \subseteq \bigl\{\gamma \in G_{\mathcal{A}} \bigm| \|\gamma\| \le 1.02N\bigr\},$$

для которого имеет место разложение на независимые множители $\Omega^{(N)} = \Omega_1\Omega$ со свойствами, перечисленными в следующей лемме.

Лемма 2.1 [8, теорема 3.1]**.** *Существует непустое множество матриц — ансамбль $\Omega^{(N)} \subseteq G_{\mathcal{A}}$ такой, что для всякого числа $M_1 \in [Q_1, Q_{-8}N]$ найдется разложение $\Omega^{(N)} = \Omega_1\Omega$ на независимые множители Ω_1 и Ω, для которых выполнены следующие свойства*:

(i) *имеет место оценка*

$$|\Omega_1| \gg (M_1)^{2\delta-\varepsilon_0}; \tag{2.2}$$

(ii) *для любых двух матриц $g_1 \in \Omega_1$ и $g \in \Omega$ справедливы неравенства*

$$M_1 \ll \|g_1\| \ll (M_1)^{1+2\varepsilon_0}, \qquad \frac{N}{(M_1)^{1+2\varepsilon_0}} \ll \|g\| \ll \frac{N}{M_1}. \tag{2.3}$$

3. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть число $M_1 \in [Q_1, N/Q_8]$ уже выбрано, так что имеет место разложение $\Omega^{(N)} = \Omega_1\Omega$ со свойствами (2.2) и (2.3). Далее введем следующие обозначения: если B — некоторое множество (2×2)-матриц γ, то $\widetilde{B}$ — множество вектор-столбцов $\widetilde{\gamma} = \gamma\bigl(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\bigr)$. Для координат произвольных векторов $\widetilde{g}', \widetilde{g} \in \widetilde{\Omega}$ будем использовать символы x, X, y, Y:

$$\widetilde{g}' = \begin{pmatrix} x \\ X \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{g} = \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Напомним обозначения из [8]. Применяя теорему Дирихле (см. [12, § 2.2, лемма 2.1]), для каждого $\Theta \in [0, 1)$ найдем числа $\lambda \in (-1/4, 1/4]$, $q \in \mathbb{N}$ и целые числа a и l такие, что

$$\Theta = \left\{\frac{a}{q} + \frac{l}{2N} + \frac{\lambda}{N}\right\}, \qquad \gcd(a, q) = 1, \qquad \frac{q-1}{q} \le a < q \le \frac{\sqrt{N}}{Q_1}, \qquad |l| \le \frac{3}{q}Q_1\sqrt{N}, \tag{3.2}$$

где $\{w\} = w - [w]$ — дробная часть числа $w \in \mathbb{R}$. Для другого произвольного числа $\Theta' \in [0, 1)$ найдем аналогичные числа λ', q', a' и l'. Фиксируем параметр λ (в дальнейшем всегда будет $\lambda' = \lambda$), константу $T_1 = 7Q_7$ и целое число $\kappa \in [0, T_1 - 1]$. Для натуральных индексов α и β положим

$$P_{\alpha,\beta} = P^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(\kappa) = \bigl\{\Theta \text{ из } (3.2) \bigm| l \equiv \kappa \ (\mathrm{mod}\ T_1),\ Q_{\alpha-1} < q \le Q_\alpha,\ Q_{\beta-1} \le |l| \le Q_\beta\bigr\}.$$

Всюду далее число M_1 из леммы 2.1 удовлетворяет неравенству

$$75A^2Q_\alpha Q_\beta \le M_1 \le \min\bigl\{(Q_\alpha Q_\beta)^5, (Q_\alpha Q_\beta)^{-0.5}N\bigr\}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим разложение $\Omega^{(N)} = \Omega_1\Omega$, соответствующее этому значению M_1. Всюду далее Z — любое непустое подмножество конечного множества $P_{\alpha,\beta}$. Для любых двух чисел $\Theta', \Theta \in Z$ положим

$$\mathbf{p} = \gcd(q', q), \quad q_0' = \frac{q'}{\mathbf{p}}, \quad q_0 = \frac{q}{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{q} = \frac{q'q}{\mathbf{p}} = \mathbf{p}q_0'q_0, \quad \mathbf{P} = \frac{74A^2Q_\alpha^2Q_\beta}{M_1}, \quad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{p}}. \tag{3.4}$$

Используя обозначения (3.1), через t и T обозначим целые числа, для которых выполнены соотношения

$$a'q_0x - aq_0'y \equiv t \pmod{\mathbf{q}}, \qquad a'q_0X - aq_0'Y \equiv T \pmod{\mathbf{q}}, \qquad |t|, |T| \le \frac{\mathbf{q}}{2}. \tag{3.5}$$

Тогда имеют место равенства

$$\left\| \frac{a'x}{q'} - \frac{ay}{q} \right\| = \frac{|t|}{\mathbf{q}}, \qquad \left\| \frac{a'X}{q'} - \frac{aY}{q} \right\| = \frac{|T|}{\mathbf{q}},$$

где через $\|w\| = \min\{\{w\}, \{-w\}\}$ обозначено расстояние от $w \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого.

Рассмотрим соотношения

$$\max\{|t|, |T|\} \le 74A^2Q_\beta(M_1)^{-1}\mathbf{q} \le \mathbf{T} \le \mathbf{P}, \tag{3.6}$$

$$|xl' - yl| \le (9A)^5x + 2N|t|\mathbf{q}^{-1}, \qquad |Xl' - Yl| \le (9A)^5X + 2N|T|\mathbf{q}^{-1}. \tag{3.7}$$

Определим множество

$$\mathfrak{N} = \bigl\{(\widetilde{g}', \widetilde{g}, \Theta', \Theta) \in (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega}, Z, Z) \bigm| \text{выполнены соотношения (3.4)–(3.7)}\bigr\}.$$

Для каждого $\Theta \in Z$ положим

$$\mathfrak{N}(\Theta) = \bigl\{(\widetilde{g}', \widetilde{g}, \Theta') \in (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega}, Z) \bigm| (\widetilde{g}', \widetilde{g}, \Theta', \Theta) \in \mathfrak{N}\bigr\},$$

$$\mathfrak{N}^{(\Theta)}_{\mathbf{p},t,T} = \bigl\{(\widetilde{g}', \widetilde{g}, \Theta') \in \mathfrak{N}(\Theta) \bigm| \text{значения параметров } \mathbf{p},\, t,\, T \text{ фиксированы}\bigr\},$$

$$\mathfrak{M}_0(\Theta) = \sum_{\mathbf{p}|q} \sum_{\substack{|t|,|T| \le \mathbf{T} \\ |t|+|T| \ne 0}} \bigl|\mathfrak{N}^{(\Theta)}_{\mathbf{p},t,T}\bigr|,$$

где сумма по $\mathbf{p}$ распространена на все делители числа q.

Через $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathcal{A}) > 0$ обозначим произвольную достаточно малую константу, зависящую только от $\mathcal{A}$. Положим также

$$\Lambda(M_1) = (M_1)^{-O_+(\mathbf{c}) + O(\varepsilon_0)}.$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА СООТВЕТСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим оценку

$$(Q_\alpha Q_\beta)^\delta \gg (M_1)^{2-2\delta}\Lambda(M_1). \tag{4.1}$$

Пусть для числа M_1 выполнены неравенства (3.3), (4.1) и

$$\max_{\Theta \in Z} \mathfrak{M}_0(\Theta) \ll |\Omega|^2(Q_\alpha Q_\beta)^{-\delta}\Lambda(M_1) \ll |\Omega|^2(M_1)^{-2+2\delta}\Lambda(M_1). \tag{4.2}$$

Тогда число M_1 назовем *соответственным* для пары натуральных чисел α, β.

Рассмотрим неравенства

$$N \geq \Big((Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}}(Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}}\Big)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}, \tag{4.3}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{3\delta-2}{4-5\delta} > 1. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 [10, теорема 5.1]. *Пусть при $\delta > 0.75$ соответственное значение M_1 найдется для любых натуральных чисел α и β, удовлетворяющих неравенствам* (4.3) *и* (4.4). *Тогда для алфавита $\mathcal{A}$ имеют место формулы* (1.2)–(1.4).

5. ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ $\big|\mathfrak{N}^{(\Theta)}_{\mathbf{p},t,T}\big|$

Лемма 5.1 [10, лемма 7.2]. *Если выполнены неравенства $M_1Q_\alpha \leq Q_6N$ и $\alpha > 1$, то имеет место оценка*

$$\max_{\Theta\in Z}\max_{\mathbf{p}|q}\max_{\substack{0\leq t,T\leq\mathbf{T}\\ |t|+|T|\neq 0}}\big|\mathfrak{N}^{(\Theta)}_{\mathbf{p},t,T}\big|\mathbf{p}^{-2} \ll |\Omega|^2 Q_\beta (Q_\alpha)^{L(1-\delta)-2}\Lambda(M_1), \tag{5.1}$$

где $L = 2$ при $Q_\alpha > N^{0.1}$ и $L = 3$ в противном случае.

Лемма 5.2 [10, лемма 7.3]. *Пусть для натуральных чисел α и β найдется число M_1 из интервала* (3.3) *такое, что выполнены оценка* (4.1) *и неравенство*

$$\max_{\Theta\in Z}\max_{\mathbf{p}|q}\frac{1}{\mathbf{p}^2}\max_{\substack{0\leq t,T\leq\mathbf{T}\\ |t|+|T|\neq 0}}\big|\mathfrak{N}^{(\Theta)}_{\mathbf{p},t,T}\big| \ll |\Omega|^2 (M_1)^{2\delta}(Q_\alpha)^{-4}(Q_\beta)^{-2}\Lambda(M_1). \tag{5.2}$$

Тогда имеет место оценка (4.2), *т.е. число M_1 соответственное.*

Замечание 5.1 [10, замечание 7.1]. Согласно теореме 4.1 для выполнения неравенства $M_1Q_\alpha \leq Q_6N$ и второй из верхних оценок в (3.3) достаточно потребовать, чтобы выполнялись оценка (4.3) и неравенства

$$M_1\sqrt{Q_\alpha Q_\beta} \leq M_1 Q_\alpha \leq \Big((Q_\alpha)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}}(Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}}\Big)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)} \tag{5.3}$$

(первое из которых выполнено ввиду оценки (4.4)).

Рассмотрим равенство

$$M_1 = \Big((Q_\alpha)^{\frac{2-\delta}{\delta}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}}\Big)^{1+O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}. \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены неравенства $\delta > 0.25(\sqrt{17}-1) = 0.7807\ldots$, $Q_\beta < Q_\alpha$ и $Q_\alpha > N^{0.1}$. Тогда число M_1 из* (5.4) *является соответственным.*

Доказательство. Ввиду леммы 5.2 достаточно доказать неравенства $M_1Q_\alpha \leq Q_6N$, (3.3), (4.1) и (5.2). Для этого рассмотрим следующие из условий (1.5) и (4.4) неравенства

$$\Big(\frac{2-\delta}{\delta} - \frac{\delta}{2-2\delta}\Big)\alpha < \Big(\frac{\delta}{2-2\delta} - \frac{3}{2\delta}\Big)\beta, \qquad \frac{2}{\delta} < \frac{2\delta-1}{1-\delta}, \qquad \frac{3}{2\delta} < \frac{2\delta-1}{1-\delta}. \tag{5.5}$$

Действительно, эти неравенства получаются соответственно из оценок

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{3\delta-2}{4-5\delta} > 1 > \frac{\delta^2+3\delta-3}{\delta^2-6\delta+4}, \qquad 2\delta^2+\delta-2>0, \qquad 4\delta^2+\delta-3>0,$$

справедливых соответственно при

$$\delta > \frac{7}{9} = 0.7777\ldots, \qquad \delta > \frac{\sqrt{17}-1}{4} = 0.7807\ldots, \qquad \delta > \frac{3}{4} = 0.75.$$

Подставляя оценки (5.5) в показатели степеней, получаем неравенства

$$(Q_\alpha)^{\frac{2-\delta}{\delta}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left((Q_\alpha Q_\beta)^{\frac{\delta}{2-2\delta}}\right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}, \qquad (Q_\alpha)^{\frac{2}{\delta}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left((Q_\alpha Q_\beta)^{\frac{2\delta-1}{1-\delta}}\right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)},$$

из которых далее оценки (4.1) и (5.3) следуют непосредственно. Поэтому согласно замечанию 5.1 имеют место неравенство $M_1Q_\alpha \leq Q_6N$ и вторая из верхних оценок в (3.3). Остальные оценки в (3.3) получаются применением неравенств

$$1 < \frac{2-\delta}{\delta} < \frac{3}{2\delta} < 5,$$

выполненных ввиду оценки $1 > \delta > 0.25(\sqrt{17}-1)$. Следовательно, имеют место условия леммы 5.1, ввиду которой выполняется оценка (5.1). Но для M_1 из (5.4) эта оценка совпадает с (5.2). Весь список требуемых неравенств доказан. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, далее можно считать, что выполнено неравенство $Q_\alpha \leq N^{0.1}$. Другими словами, неравенство $M_1Q_\alpha \leq Q_6N$ и вторая из верхних оценок в (3.3) теперь выполнены.

6. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ 5.1 НА СЛУЧАЙ МАЛЫХ Q_α

Для усиления результата теоремы 5.1 рассмотрим равенство

$$M_1 = \left((Q_\alpha)^{\frac{5-3\delta}{2\delta}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}}\right)^{1+O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}. \tag{6.1}$$

Теорема 6.1. *Пусть выполнены неравенства $\delta > 0.25(\sqrt{17}-1) = 0.7807\ldots$ и $Q_\beta < Q_\alpha \leq$ $\leq N^{0.1}$. Тогда число M_1 из (6.1) является соответственным.*

Доказательство. Ввиду леммы 5.2 достаточно доказать неравенства (3.3), (4.1) и (5.2). Аналогично первому из неравенств (5.5) рассмотрим неравенство

$$\left(\frac{5-3\delta}{2\delta} - \frac{\delta}{2-2\delta}\right)\alpha < \left(\frac{\delta}{2-2\delta} - \frac{3}{2\delta}\right)\beta. \tag{6.2}$$

Действительно, это неравенство получается из оценки

$$\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{3\delta-2}{4-5\delta} > \frac{\delta^2+3\delta-3}{\delta^2-6\delta+4},$$

справедливой при

$$\delta > \frac{3+\sqrt{31}}{11} = 0.7788\ldots.$$

Подставляя элементы оценки (6.2) в показатели степеней, получаем неравенство

$$(Q_\alpha)^{\frac{5-3\delta}{2\delta}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}} \leq \left((Q_\alpha Q_\beta)^{\frac{\delta}{2-2\delta}}\right)^{1-O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)},$$

из которого далее оценка (4.1) следует непосредственно.

Поскольку выполнены неравенства $Q_\beta < Q_\alpha \leq N^{0.1}$, для доказательства второй из верхних оценок в (3.3) достаточно учесть цепочку неравенств

$$M_1Q_\alpha = \left((Q_\alpha)^{\frac{5-3\delta}{2\delta}}(Q_\beta)^{\frac{3}{2\delta}}\right)^{1+O_+(\mathbf{c})+O(\varepsilon_0)}Q_\alpha \leq (Q_\alpha)^{1.1\left(\frac{5-3\delta}{2\delta}+\frac{3}{2\delta}+1\right)} \leq (N)^{0.11\left(\frac{5-3\delta}{2\delta}+\frac{3}{2\delta}+1\right)} < N.$$

Остальные оценки в (3.3) получаются применением неравенств

$$1 < \frac{5-3\delta}{2\delta} < \frac{3}{2\delta} < 5,$$

выполненных ввиду оценки $1 > \delta > 0.25(\sqrt{17}-1)$. Следовательно, имеют место условия леммы 5.1, ввиду которой выполняется оценка (5.1). Но для M_1 из (6.1) эта оценка совпадает с (5.2). Весь список требуемых неравенств доказан. Теорема доказана. $\square$

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Это доказательство следует непосредственно из теорем 4.1, 5.1 и 6.1. Действительно, согласно теореме 4.1 достаточно доказать существование соответственных чисел при выполнении условий (4.3) и (4.4). Но для больших и малых значений величины Q_α существование таких чисел доказано соответственно в теоремах 5.1 и 6.1. Теорема 1.2 доказана.

Благодарности. Автор благодарит профессора Н.Г. Мощевитина за постановку задачи и неоднократное обсуждение темы статьи. Автор также благодарен Д.А. Фроленкову за многократное обсуждение и многие полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zaremba S.K.* La méthode des “bons treillis” pour le calcul des intégrales multiples // Applications of number theory to numerical analysis: Proc. Symp. Montreal, 1971. New York: Acad. Press, 1972. P. 39–119.
2. *Bourgain J., Kontorovich A.* On Zaremba’s conjecture // Ann. Math. Ser. 2. 2014. V. 180, N 1. P. 137–196.
3. *Moshchevitin N.* On some open problems in Diophantine approximation: E-print, 2012. arXiv: 1202.4539v4 [math.NT].
4. *Frolenkov D.A., Kan I.D.* A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem by elementary methods: E-print, 2012. arXiv: 1207.4546 [math.NT].
5. *Frolenkov D.A., Kan I.D.* A reinforcement of the Bourgain–Kontorovich’s theorem: E-print, 2012. arXiv: 1207.5168 [math.NT].
6. *Кан И.Д., Фроленков Д.А.* Усиление теоремы Бургейна–Конторовича // Из. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, №2. С. 87–144.
7. *Frolenkov D.A., Kan I.D.* A strengthening of a theorem of Bourgain–Kontorovich. II // Moscow J. Comb. Number Theory. 2014. V. 4, N 1. P. 78–117.
8. *Кан И.Д.* Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. III // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79, №2. С. 77–100.
9. *Huang S.* An improvement to Zaremba’s conjecture // Geom. Funct. Anal. 2015. V. 25, N 3. P. 860–914.
10. *Кан И.Д.* Усиление теоремы Бургейна–Конторовича. IV // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80, №6. С. 103–126.
11. *Magee M., Oh H., Winter D.* Uniform congruence counting for Schottky semigroups in $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$: E-print, 2016. arXiv: 1601.03705v2 [math.NT].
12. *Вон Р.* Метод Харди–Литтлвуда. М.: Мир, 1985.