МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 4 (1988)

ГРАНИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ МЁБИУСА

Е. Е. Маренич

Введение. 1) Для комбинаторики представляет большой интерес изучение значений μ-функций Мёбиуса для частично упорядоченных множеств. В этом направлении результаты получены, в основном, в тех случаях, когда частично упорядоченное множество является решеткой. Известно, [1, с. 203], как выглядят функции Мёбиуса для классических классов локально-конечных решеток. В работе Рота [2], и в работах его последователей получено много результатов о функциях Мёбиуса локально-конечных частично упорядоченных множеств. Вопрос о границах для значений функций Мёбиуса даже решеток, по-видимому, мало исследован. Такие результаты известны [3] для решеток, содержащих сечения мощности k.

В § 1 доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого частично упорядоченного множества с* 0 *и* 1 *мощности* $n+2$, $n \in \mathbf{N}$, *справедливы неравенства*:

$$-\beta(n) \leqslant \mu(0, 1) \leqslant \alpha(n),$$

где $\alpha(n)$, $\beta(n)$ *определены следующим образом*: $\alpha(n) = \max (n_1-1)\cdot(n_2-1)\cdot\ldots\cdot(n_k-1)$, max *берется по всем натуральным* k, n_1, n_2, $\ldots$, n_k *таким, что* $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, k — *нечетно*; $\beta(n) = \max (n_1-1)(n_2-1)\ldots(n_k-1)$, max *берется по всем натуральным* k, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *таким, что* $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, k — *четно*.

Границы для значений функции μ, указанные в теореме 1, являются точными. В работе найдены частично упорядоченные множества, на которых достигаются граничные значения. Для вычисления $\alpha(n)$, $\beta(n)$ установлены простые формулы.

2) В [4], [5] показано, что при изучении бинарных отношений R на множестве U большую роль играют множества AIK (U, R). Для этих множеств в [4], [5] предметом Мёбиус-теории определена задача эффективного вычисления Мёбиус-функций несингулярных бинарных отношений R.

В § 2 рассматриваются рефлексивные бинарные отношения R на множестве U, которые можно продолжить до некоторого порядка на U и для которых (U, R) локально-конечно. Рассматривается множество AI1 (U, R). Для левой Мёбиус-функции μ, соответствующей этому множеству, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого интервала* $[a, b]$, $a, b \in U$, *мощности* $n+2$, $n \geqslant 3$, *справедливы неравенства*:

$$-\varphi_{n-1}+1 \leqslant \mu(a, b) \leqslant \varphi_{n-1}+1,$$

где $(\varphi_n)_1^\infty$ — *последовательность Фибоначчи, т. е.* $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, *для* $n \geqslant 3$, $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}$.

Границы для значений функции μ, указанные в теореме 2, являются точными. Из приведенных доказательств видно, как нужно задать отношение R для того, чтобы достигались граничные значения.

§ 1. Границы значений функции Мёбиуса для частично упорядоченных множеств. Обозначения и терминология. U — локально-конечное частично упорядоченное множество (ч.у.м.), с порядком $\leqslant$; P — поле характеристики 0 (или область целостности, содержащая рациональные дроби); $\mathcal{J}(U, P)$ — алгебра инцидентности; ζ — дзета-функция; μ — функция Мёбиуса; $a \cdot\!\!\succ b$ — обозначает, что a покрывает b; если $U_1 \subseteq U$, то порядок, индуцируемый на U_1 порядком $\leqslant$, называется *индуцированным порядком*; если A — конечное множество, то $|A|$ — мощность множества A; если $B = (b_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, то $\operatorname{adj} B$ — присоединенная матрица, т. е. $\operatorname{adj} B = (B_{ij})^t$, где B_{ij} — алгебраическое дополнение элемента b_{ij} матрицы B, $|B|$ — определитель матрицы B; $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел; для $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}_k = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$; n — натуральное число. Другие комбинаторные термины, использованные в работе, соответствуют терминологии [1].

1. Полные продолжения частичного порядка. Пусть $\preccurlyeq$, $\preccurlyeq_1$ — частичные порядки на U. Будем говорить, что порядок $\preccurlyeq_1$ продолжает порядок $\preccurlyeq$, если для всех $a, b \in U$, из того, что $a \preccurlyeq b$ следует $a \preccurlyeq_1 b$. Хорошо известна теорема Шпильрайна, [1, с. 29; 6],о том, что любой частичный порядок $\prec$ не может быть продолжен до отношения полного порядка $<$.

ЛЕММА 1.1. *Пусть U_1 — конечное ч. у. м. с порядком $\preccurlyeq$. Существует строгий линейный порядок $<$, продолжающий порядок $\prec$ и обладающий свойством: для всех $x, y \in U_1$, если*

$$|\{z \mid z \in U_1, \quad z \leqslant x\}| < |\{z \mid z \in U_1, z \leqslant y\}|, \quad (1.1)$$

то $x < y$.

Доказательство. Рассмотрим для всех $x \in U_1$ множества: $A_x = \{z \mid z \in U_1, z \leqslant x\}$, $M = \{|A_x|, x \in U_1\}$. Для каждого $m \in M$, на множестве всех $x \in U_1$ таких, что $|A_x| = m$ зададим произвольный строгий линейный порядок $<$. Если $|A_x| \neq |A_y|$, то положим $x < y$ при $|A_x| < |A_y|$.

Отношение $<$ задано на U_1. Отношение $<$ антирефлексивно. Проверим, что оно транзитивно. Пусть $x < y$, $y < z$, возможны следующие случаи: $|A_x| = |A_y|$, $|A_y| = |A_z|$; $|A_x| = |A_y|$, $|A_y| < |A_z|$; $|A_x| < |A_y|$, $|A_y| = |A_z|$; $|A_x| < |A_y|$, $|A_y| < |A_z|$. В каждом из вышеперечисленных случаев легко проверяется, что $x < z$.

Порядок $<$ продолжает порядок $\prec$ и для него выполнено условие (1.1). Лемма доказана.

Следствие 1.1. *Для произвольного интервала $U_1 = [a, b]$, $a, b \in U$ мощности $n + 2$ элементы U_1 можно обозначить целыми числами $a = 0, 1, \ldots, n, n + 1 = b$, так что:*

1) *для всех $i, j \in \{0, 1, \ldots, n + 1\}$, если $i \preccurlyeq j$, то $i \leqslant j$;*

2) *если $i, j \in \{1, \ldots, n + 1\}$, i — атом, j — не атом, то $i < j$;*

3) *если $c, d \in U_1$ и c покрывает только один элемент d, то порядок $<$, описанный в лемме 1.1, можно выбрать так, что при некотором $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $d = i$, $c = i + 1$.*

2. Функции $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$. Функция α_1 определена равенством: $\alpha_1(n) = \max (n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_k - 1)$, где max берется по всем натуральным $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$

таким, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, k и n имеют одинаковую четность.

Функция α_1 определена на N, $\alpha_1(1) = 0$, $\alpha_1(2) = 0$, $\alpha_1(3) = 2$, $\alpha_1(4) = 1$, $\alpha_1(5) = 4$, $\alpha_1(6) = 4$, $\alpha_1(7) = 6$, $\alpha_1(8) = 9$, $\alpha_1(9) = 8$, $\alpha_1(10) = 16$ и т. д.

Функция β_1 определена равенством: $\beta_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots(n_k - 1)$, где max берется по всем натуральным $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ таким, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, k и n имеют разную четность.

Функция β_1 определена на N_2, $\beta_1(2) = 1$, $\beta_1(3) = 0$, $\beta_1(4) = 3$, $\beta_1(5) = 2$, $\beta_1(6) = 5$, $\beta_1(7) = 6$, $\beta_1(8) = 7$, $\beta_1(9) = 12$, $\beta_1(10) = 12$ и т. д.

ЛЕММА 1.2. *Справедливы неравенства:*

1) *для* $n \geqslant 3$, $\beta_1(n-1) < \alpha_1(n)$;

2) *для* $n \geqslant 2$, $\alpha_1(n-1) \leqslant \beta_1(n)$;

3) *для нечетных* $s \geqslant 1$, $n - s \geqslant 1$, $(s-1)\alpha_1(n-s) \leqslant \alpha_1(n)$;

4) *для нечетных* $s \geqslant 1$, $n - s \geqslant 2$, $(s-1)\beta_1(n-s) \leqslant \beta_1(n)$;

5) *для четных* $s \geqslant 2$, $n - s \geqslant 2$, $(s-1)\beta_1(n-s) \leqslant \alpha_1(n)$;

6) *для четных* $s \geqslant 2$, $n - s \geqslant 1$, $(s-1)\alpha_1(n-s) \leqslant \beta_1(n)$;

7) *для нечетного* $n \geqslant 1$, $\alpha_1(n) \geqslant n - 1$;

8) *для четного* $n \geqslant 2$, $\beta_1(n) \leqslant n - 1$.

Доказательство. Докажем неравенство 1). Так как $n \geqslant 3$, то $\alpha_1(n) \neq 0$. Имеем

$$\alpha_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots(n_k - 1)$$

на множестве $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ таких, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, k и n имеют одинаковую четность. Так как $\alpha_1(n) \neq 0$, то можно считать, что $n_1 > 1$. Получаем

$$\alpha_1(n) = \max n_1(n_2 - 1)\ldots(n_k - 1),$$

на множестве натуральных $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ таких, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n - 1,$$

k и $n - 1$ имеют разную четность. Поэтому

$$\alpha_1(n) > \beta_1(n-1).$$

Неравенство 2) доказывается аналогично. Докажем неравенство 3). Рассмотрим случаи: n — четно и n — нечетно.

Таблица значений $\alpha(n)$, $\beta(n)$

n	$\alpha(n)$	$\beta(n)$
		0
1	$0=0$	$0=0\cdot 0$
2	$1=1$	$0=0\cdot 1$
3	$2=2$	$1=1\cdot 1$
4	$3=3$	$2=1\cdot 2$
5	$4=4$	$4=2^2$
6	$5=5$	$6=2\cdot 3$
7	$6=6$	$9=3^2$
8	$7=7$	$12=3\cdot 4$
9	$8=8$	$16=4^2$
10	$12=2^2\cdot 3$	$20=4\cdot 5$
11	$18=2\cdot 3^2$	$25=5^2$
12	$27=3^3$	$30=5\cdot 6$
13	$36=3^2\cdot 4$	$36=3^2\cdot 2^2$
14	$48=3\cdot 4^2$	$54=2\cdot 3^3$
15	$64=4^3$	$81=3^4$
16	$80=4^2\cdot 5$	$108=3^3\cdot 4$
17	$100=4\cdot 5^2$	$144=3^2\cdot 4^2$
18	$125=5^3$	$192=3\cdot 4^3$
19	$162=2\cdot 3^4$	$256=4^4$
20	$243=3^5$	$320=4^3\cdot 5$
21	$324=3^4\cdot 4$	$400=4^2\cdot 5^2$
22	$432=3^3\cdot 4^2$	$500=4\cdot 5^3$
23	$576=3^2\cdot 4^3$	$729=3^6$
24	$768=3\cdot 4^4$	$972=3^5\cdot 4$
25	$1024=4^5$	$1296=3^4\cdot 4^2$
26	$1280=4^4\cdot 5$	$1728=3^3\cdot 4^3$
27	$1600=4^3\cdot 5^2$	$2304=3^2\cdot 4^4$
28	$2187=3^7$	$3072=3\cdot 4^5$
29	$2916=3^6\cdot 4$	$4096=4^6$
30	$3888=3^5\cdot 4^2$	$5120=4^5\cdot 5$
31	$5184=3^4\cdot 4^3$	$6561=3^8$
32	$6912=3^3\cdot 4^4$	$8748=3^7\cdot 4$
33	$9216=3^2\cdot 4^5$	$11\,664=3^6\cdot 4^2$
34	$12\,288=3\cdot 4^6$	$15\,552=3^5\cdot 4^3$
35	$16\,384=4^7$	$20\,736=3^4\cdot 4^4$
36	$20\,480=4^6\cdot 5$	$27\,648=3^3\cdot 4^5$
37	$26\,244=3^8\cdot 4$	$36\,684=3^2\cdot 4^6$
38	$34\,992=3^7\cdot 4^2$	$49\,152=3\cdot 4^7$
39	$46\,656=3^6\cdot 4^3$	$65\,536=4^8$
40	$62\,202=3^3\cdot 4^4$	

Если n четно, то

$$\alpha_1(n) = \max(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots$$

на множестве k, n_1, n_2, ..., n_k таких, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,$$

k — четно. Тогда для нечетного s,

$$\alpha_1(n) \geqslant (s-1)\max(n_2-1)\ldots(n_k-1)$$

на множестве $k-1,\ n_2, \ldots, n_k$ таких, что

$$n_2+\ldots+n_k = n-s,\ k-1,\ n-s$$

имеют одинаковую четность. Поэтому

$$\alpha_1(n) \geqslant (s-1)\,\alpha_1(n-s).$$

Для нечетного n неравенство 3) доказывается аналогично.

Неравенства 4) — 6) доказываются так же как неравенство 3).

Неравенства 7) — 8) легко доказываются. Лемма доказана.

Таблицей нужно пользоваться следующим образом: например, $\alpha(22) = 432 = 3^3\cdot 4^2$, т. е. $\max(n_1-1)(n_2-1)\ldots(n_k-1)$, где $n_1+n_2+\ldots+n_k = 22$, k — нечетно, достигается при $k = 3+2 = 5$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3+1 = 4$, $n_4 = n_5 = 4+1 = 5$ и равен 432.

ЛЕММА 1.3. *Пусть* $\gamma(n) = 4^{2[n/10]}$ *для* $n \geqslant 1$. *Значения* $\alpha(n)$ *определены формулами:*

1) *для* $n \equiv 0 \pmod{10}$, $n \geqslant 20$, $\alpha(n) = 3^5\cdot 4^{-4}\gamma(n)$;
2) *для* $n \equiv 1 \pmod{10}$, $n \geqslant 21$, $\alpha(n) = 3^4\cdot 4^{-3}\gamma(n)$;
3) *для* $n \equiv 2 \pmod{10}$, $n \geqslant 12$, $\alpha(n) = 3^3\cdot 4^{-2}\gamma(n)$;
4) *для* $n \equiv 3 \pmod{10}$, $n \geqslant 13$, $\alpha(n) = 3^2\cdot 4^{-1}\gamma(n)$;
5) *для* $n \equiv 4 \pmod{10}$, $\alpha(n) = 3\gamma(n)$;
6) *для* $n \equiv 5 \pmod{10}$, $\alpha(n) = 4\gamma(n)$;
7) *для* $n \equiv 6 \pmod{10}$, $\alpha(n) = 5\gamma(n)$;
8) *для* $n \equiv 7 \pmod{10}$, $n \geqslant 37$, $\alpha(n) = 3^8\cdot 4^{-5}\gamma(n)$;
9) *для* $n \equiv 8 \pmod{10}$, $n \geqslant 28$, $\alpha(n) = 3^7\cdot 4^{-4}\gamma(n)$;
10) *для* $n \equiv 9 \pmod{10}$, $n \geqslant 29$, $\alpha(n) = 3^6\cdot 4^{-3}\gamma(n)$.

Значения $\beta(n)$ *определены формулами:*

11) *для* $n \equiv 0 \pmod{10}$, $\beta(n) = \gamma(n)$;
12) *для* $n \equiv 1 \pmod{10}$, $n \geqslant 11$, $\beta(n) = 5\cdot 4^{-1}\gamma(n)$;
13) *для* $n \equiv 2 \pmod{10}$, $n \geqslant 32$, $\beta(n) = 3^8\cdot 4^{-6}\gamma(n)$;
14) *для* $n \equiv 3 \pmod{10}$, $n \geqslant 33$, $\beta(n) = 3^7\cdot 4^{-5}\gamma(n)$;
15) *для* $n \equiv 4 \pmod{10}$, $n \geqslant 24$, $\beta(n) = 3^6\cdot 4^{-4}\gamma(n)$;
16) *для* $n \equiv 5 \pmod{10}$, $n \geqslant 25$, $\beta(n) = 3^5\cdot 4^{-3}\gamma(n)$;
17) *для* $n \equiv 6 \pmod{10}$, $n \geqslant 16$, $\beta(n) = 3^4\cdot 4^{-2}\gamma(n)$;
18) *для* $n \equiv 7 \pmod{10}$, $n \geqslant 17$, $\beta(n) = 3^3\cdot 4^{-1}\gamma(n)$;
19) *для* $n \equiv 8 \pmod{10}$, $\beta(n) = 3^2\gamma(n)$;
20) *для* $n \equiv 9 \pmod{10}$, $\beta(n) = 3\cdot 4\gamma(n)$.

Доказательство. Обозначим через $\bar{n}$ тот класс вычетов по mod 10, которому принадлежит n. Запишем

$\alpha(n)$, $\beta(n)$ в виде: $\alpha(n) = a(n)\cdot 4^{n/5}$, $\beta(\bar{n}) = b(\bar{n})\cdot 4^{n/5}$, где $a(\bar{0}) = 3^5\cdot 4^{-4}$, $a(\bar{1}) = 3^4\cdot 4^{-16/5}$, $a(\bar{2}) = 3^3\cdot 4^{-12/5}$, $a(\bar{3}) = 3^2\cdot 4^{-8/5}$, $a(\bar{4}) = 3\cdot 4^{-4/5}$, $a(\bar{5}) = 1$, $a(\bar{6}) = 5\cdot 4^{-6/5}$, $a(\bar{7}) = 3^8\cdot 4^{-32/5}$, $a(\bar{8}) = 3^7\cdot 4^{-28/5}$, $a(\bar{9}) = 3^6\cdot 4^{-24/5}$ и $b(\bar{n}) = a(\bar{n}+5)$ для всех $n \in \mathbf{N}$. При соответствующих n эти равенства совпадают с равенствами 1) — 20).

Справедливы неравенства: $a(\bar{7}) < a(\bar{8}) < a(\bar{9}) < a(\bar{0}) < a(\bar{1}) < a(\bar{2}) < a(\bar{3}) < a(\bar{4}) < a(\bar{5}) > a(\bar{6}) > a(\bar{7})$, $a(\bar{7}) = 0{,}919\ldots$

Будем рассматривать значения выражения

$$(n_1 - 1)(n_2 - 1)\ldots(n_k - 1), \tag{2.1}$$

где $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$ — натуральные числа, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Докажем, что max выражения (2.1) при $n \geqslant 10$ и нечетных k достигается при $k > 1$. Для $10 \leqslant n \leqslant 27$ это следует из таблицы значений $\alpha(n)$. Докажем это утверждение для $n > 27$. Рассмотрим число $a(\bar{n})\cdot 4^{n/5}$, нетрудно видеть, что оно является значением выражения (2.1) при нечетном k. Например, при $n \equiv 1 \pmod{10}$, $a(\bar{1})\cdot 4^{n/5} = 3^4\cdot 4^{2[n/10]-3}$, выберем $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 4$, $n_5 = \ldots = n_k = 5$,

$$k = 4 + 2\left[\frac{n}{10}\right] - 3 = 2\left[\frac{n}{10}\right] + 1,\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 4\cdot 4 + 5\left(\frac{n-1}{5} - 3\right) = n.$$

Справедливо неравенство: $a(\bar{n})\cdot 4^{n/5} > 0{,}9\cdot 4^{n/5}$. По индукции легко доказать, что $0{,}9\cdot 4^{n/5} \geqslant n - 1$ для $n \geqslant 7$. Поэтому число $a(\bar{n})\cdot 4^{n/5}$ больше значения выражения (2.1) при $k = 1$, следовательно, max выражения (2.1) при нечетных k и $n \geqslant 10$ достигается при $k > 1$. Справедливо равенство:

$$\alpha(n) = \max\{\alpha(s)\,\beta(t)\}, \tag{2.2}$$

для $n \geqslant 10$, где max берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$.

Докажем, что max выражения (2.1) при $n \geqslant 14$ и четных k достигается при $k > 2$. Для $14 \leqslant n \leqslant 22$ это следует из таблицы значений $\beta(n)$. Докажем это утверждение для $n > 22$. Рассмотрим число $b(\bar{n})\cdot 4^{n/5}$, нетрудно видеть, что оно является значением выражения (2.1) при четном k. Справедливо неравенство $b(\bar{n})\cdot 4^{n/5} > 0{,}9\cdot 4^{n/5}$. По индукции легко доказать, что $0{,}9\cdot 4^{n/5} > \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2$ для $n \geqslant$

$\geqslant 12$. Поэтому число $b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$ больше значения выражения (2.1), при $k = 2$, следовательно, max выражения (2.1) при четных k и $n \geqslant 14$ достигается при $k > 2$. Справедливо равенство

$$\beta(n) = \max\{\alpha(s)\,\alpha(t),\quad \beta(s)\,\beta(t)\}, \tag{2.3}$$

для $n \geqslant 14$, где max берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$.

Для всех $n, m \in \mathbf{N}$ справедливы неравенства:

$$a(\bar{n})\,a(\bar{m}) \leqslant b(\bar{n} + \bar{m}), \tag{2.4}$$

$$a(\bar{n})\,b(\bar{m}) \leqslant a(\bar{n} + \bar{m}), \tag{2.5}$$

$$b(\bar{n})\,b(\bar{m}) \leqslant b(\bar{n} + \bar{m}). \tag{2.6}$$

Справедливость неравенств (2.4) проверяется непосредственным вычислением. Неравенства (2.5), (2.6) являются следствием неравенства (2.4).

Докажем теперь равенства 1) — 20). Доказательство будем проводить индукцией по числу n. Для $n \leqslant 37$ справедливость 1) — 20) проверяется непосредственным вычислением. Также непосредственным вычислением проверяется, что $\alpha(n) \leqslant a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$, $\beta(n) \leqslant b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}$ для всех $n \leqslant 37$. Предположим теперь, что равенства 1) — 20) доказаны для всех натуральных чисел, меньших n, $n > 37$, и докажем их для числа n. Из (2.2) следует, что $a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5} \leqslant \alpha(n) = \max\{\alpha(s)\,\beta(t)\}$, где max берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$. Используя индукционное предположение, неравенство (2.5) и сделанное выше замечание, находим, что

$$\alpha(s)\,\beta(t) \leqslant a(\bar{s}) \cdot 4^{s/5} \cdot b(\bar{t}) \cdot 4^{t/5} \leqslant a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}.$$

Поэтому

$$\alpha(n) = a(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}.$$

Из (2.3) следует, что

$$b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5} \leqslant \beta(n) = \max\{\alpha(s)\,\alpha(t),\quad \beta(s)\,\beta(t)\},$$

где max берется по всем натуральным s, t таким, что $s + t = n$. Имеем

$$\alpha(s)\,\alpha(t) \leqslant a(s) \cdot 4^{s/5} \cdot a(\bar{t}) \cdot 4^{t/5} \leqslant b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5},$$

$$\beta(s)\,\beta(t) \leqslant b(s) \cdot 4^{s/5} \cdot b(\bar{t}) \cdot 4^{t/5} \leqslant b(\bar{n}) \cdot 4^{n/5}.$$

Поэтому

$$\beta(n) = b(\bar{n})\cdot 4^{n/5}.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Как известно [1, с. 167, 168] алгебра инцидентности $\mathcal{J}(U, P)$ изоморфна алгебре нижних (или верхних) треугольных матриц над полем P. Используя это матричное представление, найдем выражение для значений μ функции Мёбиуса через определители некоторых (0,1) матриц.

Рассмотрим произвольный интервал $U_1 = [a, b]$, a, $b \in U$, мощности $n + 2$. Будем считать, что элементы множества U_1 обозначены целыми числами $a = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n+1 = b$ и при этом выполнены условия следствия 1.1.

Пусть

$$M(\zeta) = (\zeta_{ij}),\ M(\mu) = (\mu_{ij})$$

такие $(n + 2) \times (n + 2)$ матрицы, что

$$\zeta_{ij} = \zeta(i, j),\ \mu_{ij} = \mu(i, j)$$

для i, $j \in \{0, 1, \ldots, n + 1\}$. Справедливо равенство:

$$M(\zeta)M(\mu) = E,$$

где E — единичная $(n + 2) \times (n + 2)$ матрица. Поэтому

$$M(\mu) = (M(\zeta))^{-1}.$$

Используя известную формулу для вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы, имеем

$$M(\mu) = \operatorname{adj} M(\zeta), \tag{3.1}$$

так как $|M(\zeta)| = 1$. Из равенства (3.1), приравнивая элементы, расположенные в 1-м столбце, $(n + 2)$-й строке матриц, находим

$$\mu(a, b) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & \zeta_{12} & 1 & & & & \\ 1 & \zeta_{13} & \zeta_{23} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \zeta_{1n} & \zeta_{2n} & \zeta_{3n} & \cdots & \zeta_{n-1n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.2}$$

где выше диагонали, лежащей на главной диагонали, расположены нули. Таких представлений для $\mu(a, b)$ существует столько, сколько существует различных продолжений порядка $\preccurlyeq$, удовлетворяющих условиям следствия 1.1.

Рассмотрим определители $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ квадратных матриц порядка $n+1$:

$$\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq) = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & & & & & \\ c_2 & \zeta_{12} & 1 & & & & \\ c_3 & \zeta_{13} & \zeta_{23} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & \zeta_{1n} & \zeta_{2n} & \zeta_{3n} & \dots & \zeta_{n-1n} & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, c_i, c — целые, $0 \leqslant c_i \leqslant c$, $c > 0$, для всех i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, если $i \preccurlyeq j$, то $c_i \leqslant c_j$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть* max (*или* min) *значений определителей* $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ *достигается при некотором порядке* $\preccurlyeq$ *и некоторых векторах* $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. *Если в каждом таком векторе ни одна из компонент* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *не равна* 0, *то* $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c$.

Доказательство. Проведем доказательство для max. Пусть $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — один из векторов, на котором достигается max. Обозначим через k число различных чисел среди $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Докажем, что $k = 1$. Предположим противное: $k > 1$. Пусть числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ принимают значения $d_1, d_2, \ldots, d_k$, где $0 < d_1 < d_2 \ldots < d_k$. Разложим определитель $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ по первому столбцу и затем сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые множители d_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Получим

$$\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq) = d_1 s_1 + d_2 s_2 + \ldots + d_k s_k + c(-1)^n. \quad (3.3)$$

Если предположить $s_1 < 0$, то значение $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ можно было бы увеличить за счет выбора числа $d_1 = 0$ и выбора соответствующего вектора γ. Так как это невозможно, то $s_1 \geqslant 0$. Если предположить $s_1 = 0$, то значение $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ не изменилось бы при выборе числа $d_1 = 0$ и выборе соответствующего вектора γ, содержащего нулевые компоненты. Так как это невозможно, то $s_1 > 0$.

Но и в этом случае значение $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ можно увеличить, полагая $d_1 = d_2$ и выбирая соответствующий вектор γ. Полученное противоречие доказывает, что $k = 1$. Разложение (3.3) имеет вид: $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq) = d_1 s_1 + c(-1)^n$, где $s_1 > 0$. Поэтому max достигается при $d_1 = c$.

Доказательство для min проводится аналогично. Лемма доказана.

Обозначим через $\Delta_n(\preccurlyeq)$ определитель $\Delta_n(\gamma, \preccurlyeq)$ при $\gamma = (1, 1, \ldots, 1)$, $c = 1$. Определитель $\Delta_n(\preccurlyeq)$ зависит только от порядка $\preccurlyeq$ на интервале $[a; b]$ мощности $n + 2$.

Ниже будут определены max и min значения определителей $\Delta_n(\preccurlyeq)$ при различных порядках $\preccurlyeq$ на интервале $[a;\ b]$ мощности $n+2$.

ЛЕММА 3.2. *Справедливы утверждения*:

1) *если интервал* $[a;\ b]$ *мощности* $n+2$ *содержит только один атом или только один коатом* (относительно индуцированного порядка), *то* $\Delta_n(\preccurlyeq)=0$;

2) *пусть в интервале* $[a;\ b]$ *мощности* $n+2$ *существует элемент* $c\neq b$, *не являющийся атомом, и покрывающий только один элемент интервала. Рассмотрим множество* $U_2=[a;\ b]\setminus\{c\}$, *относительно индуцированного порядка* $\preccurlyeq_1$, $U_2=[a;\ b]$ *мощности* $(n-1)+2$. *Справедливо равенство* $\Delta_n(\preccurlyeq)=-\Delta_{n-1}(\preccurlyeq_1)$.

Доказательство. 1) Если интервал $[a;\ b]$ содержит только один атом, то в силу следствия 1.1 этот атом будет обозначаться 1, $\zeta_{12}=\zeta_{13}=\ldots=\zeta_{1n}=1$ и $\Delta_n(\preccurlyeq)=0$. В случае единственного коатома этот коатом будет обозначен n, $\zeta_{1n}=\zeta_{2n}=\ldots=\zeta_{n-1n}=1$ и снова $\Delta_n(\preccurlyeq)=0$.

2) Пусть элемент c (обозначим его через $i+1$) покрывает единственный элемент d, который можно обозначить через i (по следствию 1.1). Рассмотрим i-ю и $(i+1)$-ю строки определителя $\Delta_n(\preccurlyeq)$, они имеют вид:

$$\begin{array}{lllllll} 1 & \zeta_{1i} & \zeta_{2i} & \ldots & \zeta_{i-1i} & 1 & \\ & & & & & & \\ 1 & \zeta_{1i+1} & \zeta_{2i+1} & \ldots & \zeta_{n-1i+1} & 1 & 1. \end{array}$$

Для этих строк справедливо условие: для $j\in\{1,\ldots$ $\ldots,i-1\}$, $\zeta_{ji}=1$ тогда и только тогда, когда $\zeta_{ji+1}=1$. В определителе $\Delta_n(\preccurlyeq)$ из $(i+1)$-й строки вычтем i-ю строку и получившийся определитель разложим по $(i+$ $+1)$-й строке. Нужное равенство доказано. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3 *Для любого порядка* $\preccurlyeq$ для $n\geqslant 2$ *справедливы неравенства*:

$$-\beta_1(n)\leqslant\Delta_n(\preccurlyeq)\leqslant\alpha_1(n). \tag{3.4}$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Для $n=2$, $\Delta_n(\preccurlyeq)=\zeta_{12}-1$, $-1\leqslant$ $\leqslant\Delta_n(\preccurlyeq)\leqslant 0$.

Предположим, что неравенства (3.4) доказаны для всех чисел меньших n, $n\geqslant 3$. Докажем их для числа n.

Среди всех порядков $\preccurlyeq$, на которых достигается max (min) $\Delta_n(\preccurlyeq)$, выберем некоторый порядок $\preccurlyeq$. Пусть интервал $[a;\ b]$ имеет s атомов (относительно индуцированного порядка). Обозначим эти атомы $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Если $s = 1$, то по лемме 3.2 $\Delta_n(\preccurlyeq) = 0$ и неравенства (3.4) в этом случае доказаны.

Если $s = n$, то определитель $\Delta_n(\preccurlyeq)$ имеет вид:

$$\Delta_n(\preccurlyeq) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя находим, что $\Delta_n(\preccurlyeq) = (-1)^{n-1}(n-1)$. Используя неравенства 7), 8) из леммы 2.1, находим:

для нечетного n, $-\beta_1(n) \leqslant 0 \leqslant \Delta_n(\preccurlyeq) = n - 1 \leqslant \leqslant \alpha_1(n)$;

для четного n, $\alpha_1(n) \geqslant 0 \geqslant \Delta_n(\preccurlyeq) = -(n-1) \geqslant \geqslant -\beta_1(n)$.

В случае $s = n$ неравенства (3.4) доказаны.

Рассмотрим случай $1 < s < n$. В этом случае $\Delta_n(\preccurlyeq)$ имеет вид:

$$\Delta_n(\preccurlyeq) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & & & & \\ 1 & \zeta_{1s+1} & \zeta_{2s+1} & \ldots & \zeta_{ss+1} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \zeta_{1n} & \zeta_{2n} & \ldots & \zeta_{sn} & \zeta_{s+1n} & \ldots & \zeta_{n-1n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где не все $\zeta_{1s+1}, \zeta_{2s+1}, \ldots, \zeta_{ss+1}$ равны 0. Преобразуем этот определитель следующим образом: прибавим 1-ю строку, умноженную на (-1), к тем строкам, у которых во 2-м столбце расположены 1; прибавим 2-ю строку, умноженную на (-1), к тем строкам, у которых в 3-м столбце расположены 1; и т. д.; прибавим s-ю строку, умноженную на (-1), к тем строкам, у которых в $(s + 1)$-м столбце расположены 1. Разложим получившийся определитель по 2-му, 3-му, . . ., $(s + 1)$-му столбцам и умножим 1-й столбец получившегося определителя на

(-1). Получим

$$\Delta_n(\preccurlyeq)=(-1)^{s+1}\begin{vmatrix} c_{s+1}-1 & 1 & & & & \\ c_{s+2}-1 & \zeta_{s+1\ s+2} & 1 & & & \\ c_{s+3}-1 & \zeta_{s+1\ s+3} & \zeta_{s+2\ s+3} & 1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n-1 & \zeta_{s+1\ n} & \zeta_{s+2\ n} & \zeta_{s+3\ n} & \ldots\ \zeta_{n-1\ n} & 1 \\ s-1 & 1 & 1 & 1 & \ldots\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.5}$$

где c_i — число атомов, которое не превосходит (в смысле $\preccurlyeq$) элемента i, $i=s+1, s+2, \ldots, n$. Для всех $i, j \in \{s+1, \ldots, n\}$, если $i \preccurlyeq j$, то $c_i-1 \leqslant c_j-1$; $c_i-1 \leqslant s-1$, $s-1>0$.

Имеем $\Delta_n(\preccurlyeq)=(-1)^{s+1}\Delta_{n-s}(\gamma, \preccurlyeq_1)$, где $\gamma=(c_{s+1}-1, c_{s+2}-1, \ldots, c_n-1)$. $U_2=[a, b]\setminus\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$, $U_2=[a; b]$ мощности $(n-s)+2$ относительно порядка $\preccurlyeq_1$, индуцированного порядком $\preccurlyeq$.

При вычислении max (min), $\Delta_n(\preccurlyeq)$ с помощью равенства (3.5) будем пользоваться тем, что векторы γ и частичные порядки $\preccurlyeq_1$ можно выбирать независимо друг от друга. Сформулируем это утверждение более точно. Пусть $\preccurlyeq_1$— частичный порядок на множестве U_2 такой, что $U_2=[a; b]$ относительно $\preccurlyeq_1$; $\gamma'=(c'_{s+1}, c'_{s+2}, \ldots c'_n)$ — вектор такой, что c'_i — целые, $0 \leqslant c'_i \leqslant s-1$ и для всех $\alpha, \beta \in U_2$, $\alpha \neq a$, $\beta \neq b$, если $\alpha \preccurlyeq \beta$, то $c'_\alpha \leqslant c'_\beta$. Докажем, что существует частичный порядок $\preccurlyeq$ на множестве U_1 такой, что $U_1=[a; b]$ относительно $\preccurlyeq$; $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ — множество атомов в U_1 относительно $\preccurlyeq$; $\preccurlyeq_1$ совпадает с порядком, индуцированным $\preccurlyeq$ на U_2; $\gamma'=\gamma$.

Действительно, $U_1=U_2\cup A$, $U_2\cap A=\varnothing$, определим частичный порядок $\preccurlyeq$ на U_1 следующим образом: сужение $\preccurlyeq$ на U_2 совпадает с $\preccurlyeq_1$; A — множество атомов в U_1 относительно $\preccurlyeq$; если компоненты вектора γ' принимают значения $d_1, d_2, \ldots, d_r$, $0 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_r \leqslant s-1$, то обозначим через A_i множество тех α из U_2, $\alpha \neq a$, $\alpha \neq b$, что $c'_\alpha=d_i$, $i=1, 2, \ldots, r$, $A_1, A_2, \ldots, A_r$ образуют разбиение множества $U_2\setminus\{a, b\}$; обозначим через $B_1, B_2, \ldots, B_r$ — подмножества множества A такие, что $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_r$, $|B_i|=d_i+1$, $i=1, 2, \ldots, r$; пусть $\alpha \in U_2$, $\alpha \neq a$, $\alpha \neq b$, α принадлежит единственному множеству A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, будем считать, что для любого $\beta \in B_i$, $\beta \preccurlyeq \alpha$. Нетрудно проверить, что $\preccurlyeq$ — частичный порядок, удовлетворяющий выше перечисленным условиям.

Пусть max (min) определителей $\Delta_{n-s}(\gamma, \preccurlyeq_1)$ достигается при некотором порядке $\preccurlyeq_1$ и некотором векторе γ, имеющем нулевые компоненты, например, $c_i - 1 = 0$ для некоторого $i \in \{s+1, \ldots, n\}$. Отсюда следует, что существует только один атом a_1 такой, что $a_1 \prec i$. Поэтому существует $c \in [a; b]$, покрывающий только один элемент a_1, $c \cdot \succcurlyeq a_1$. Тогда по лемме 3.2 $\Delta_n(\preccurlyeq) = -\Delta_{n-1}(\preccurlyeq_2)$ для некоторого $\preccurlyeq_2$. Имеем $-\alpha_1(n-1) \leqslant \Delta_n(\preccurlyeq) \leqslant \beta_1(n-1)$. Из этих неравенств и леммы 1.2 следуют неравенства (3.4).

Пусть max (min) определителей $\Delta_{n-s}(\gamma, \preccurlyeq_1)$ достигается при некоторых порядках $\preccurlyeq_1$ и некоторых векторах γ, причем, в каждом таком векторе γ ни одна из компонент не равна 0. По лемме 3.1 max (min) определителей $\Delta_{n-s}(\gamma, \preccurlyeq_1)$ достигается при $c_{s+1} - 1 = c_{s+2} - 1 = \ldots = c_n - 1 = c - 1$. Из равенства (3.5) следует: для нечетных s $\Delta_n(\preccurlyeq) = (s-1)\Delta_{n-s}(\preccurlyeq_1)$, $-(s-1)\beta_1(n-s) \leqslant \Delta_n(\preccurlyeq) \leqslant (s-1)\alpha_1(n-s)$; для четных s $\Delta_n(\preccurlyeq) = -(s-1)\Delta_{n-1}(\preccurlyeq_1)$, $-(s-1)\alpha_1(n-s) \leqslant \Delta_n(\preccurlyeq) \leqslant (s-1)\beta_1(n-s)$. Из этих неравенств и леммы 2.1 следуют неравенства (3, 4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из равенства (3.2) и леммы 3.4 при нечетном n следует, что $-\beta(n) = -\beta_1(n) \leqslant \mu(a, b) \leqslant \alpha_1(n) = \alpha(n)$; при четном n следует, что

$$-\beta(n) = -\alpha_1(n) \leqslant \mu(a, b) \leqslant \beta_1(n) = \alpha(n).$$

Теорема доказана.

4. Ч.у.м., на которых достигаются верхние и нижние границы. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — некоторые натуральные числа. Обозначим $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ — ч.у.м. с 0 и 1 мощности $n_1 + n_2 + \ldots + n_k + 2$ и порядком $\preccurlyeq$, который задан следующим образом: элементы множества $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, отличные от 0 и 1, разбиты на непустые непересекающиеся классы $K_1, K_2, \ldots, K_k$ мощности $n_1, n_2, \ldots, n_k$, соответственно, элементы класса K_1 покрывают 0; элементы класса K_2 покрывают каждый элемент класса K_1; элементы класса K_3 покрывают каждый элемент класса K_2 и т. д.; элементы класса K_k покрывают каждый элемент класса K_{k-1}; 1 покрывает каждый элемент класса K_k; ч.у.м. $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ обладает ранговой функцией.

Используя хорошо известную формулу Холла [2]

$$\mu(0,1) = -1 + \sum\nolimits_{0<a_1<1} 1 - \sum\nolimits_{0<a_1<a_2<1} 1 + \ldots, \qquad (4.1)$$

нетрудно вычислить, что $[0, 1] = U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, $\mu(0, 1) = (-1)^{k-1}(n_1 - 1)(n_2 - 1) \ldots (n_k - 1)$. Поэтому верхние и нижние оценки для значений μ функций достигаются на ч.у.м. $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Лемма 3.2 и таблица значений $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ содержат описание тех ч.у.м. $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, на которых достигаются наибольшие и наименьшие значения при $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Например, для $n \equiv 0 \pmod{10}$, $n \geqslant 20$, наибольшее значение $\mu(0, 1) = 3^5 \cdot 4^{n/5-4}$ на интервале $[0, 1]$ мощности $n + 2$ достигается на ч.у.м. $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, где $k = n/5 + 1$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 4$, $n_6 = \ldots = n_k = 5$. Для $n \equiv 0 \pmod{10}$ наименьшее значение $\mu(0, 1) = -4^{n/5}$ на интервале $[0, 1]$ мощности $n + 2$ достигается на ч.у.м. $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, где $k = n/5$, $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 5$. В рассмотренных примерах ч.у.м. $U_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ не являются решетками.

§ 2. Границы значений Мёбиус-функций рефлексивных отношений, вложимых в порядок. Обозначения. В работе, в основном, используются терминология и обозначения, введенные в [4]. Пусть: U — локально-конечное упорядоченное множество с заданным на нем бинарным отношением R; $x \preccurlyeq y$ обозначает, что xRy; говорим, что отношение R можно продолжить до отношения частичного порядка $\leqslant$ (R вложимо в $\leqslant$), если для всех $x, y \in U$ из того, что $x \preccurlyeq y$ следует $x \leqslant y$; ζ — дзета-функция, e — единичная функция, для всех x, $y \in U$, $e(x, x) = 1$ и $e(x, y) = 0$, если $x \neq y$; μ — Мёбиус-функция множества AI1 (U, R).

1. Вспомогательные утверждения. Будем рассматривать $\det x_n$ для $n \times n$ матриц x_n вида

$$x_n = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & & & & \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1\,1} & x_{n-1\,2} & x_{n-1\,3} & \cdots & x_{n-1\,n-1} & x_{n-1\,n} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{n-1n} & x_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (1.1)$$

где $x_{ij} \in \{0, 1\}$ для всех i, j. Обозначим множество всех таких матриц через X_n. Ниже будут найдены наибольшие и наименьшие значения $\det x_n$ на множестве X_n.

ЛЕММА 1.1. *Для* $n \in \mathbf{N}$ *и для всех* $x_n \in X_n$ *справедливо неравенство*:

$$|\det x_n| \leqslant \varphi_n. \tag{1.2}$$

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 1,2$ справедливость неравенства (1.2) легко проверяется. Предположим, что неравенство (1.2) доказано для чисел $n - 2$, $n - 1$. Докажем неравенство (1.2) для числа n, $n \geqslant 3$.

Рассмотрим матрицу x_n, заданную равенством (1.1). Если оба числа x_{11}, x_{12} равны 0, то $\det x_n = 0$ и неравенство (1.2) доказано. Если только одно из чисел x_{11}, x_{12} равно 0, то $\det x_n = \pm \det x_{n-1}$, где $x_{n-1} \in X_{n-1}$ и поэтому неравенство (1.2) доказано. Осталось доказать справедливость неравенства (1.2) для $x_{11} = x_{12} = 1$.

Рассмотрим элементы 2-й строки матрицы $x_n : x_{21}$, x_{22}, x_{23}. Если все они равны 0, то $\det x_n = 0$ и неравенство (1.2) доказано. Если только один из элементов 2-й строки равен 1, то $\det x_n = \pm \det x_{n-1}$, где $x_{n-1} \in X_{n-1}$, и неравенство (1.2) выполнено. Если все три элемента 2-й строки равны 1, то прибавим ко 2-й строке 1-ю, умноженную на -1, и разложим получившийся определитель по 2-й строке. Получим $\det x_n = -\det x'_{n-1}$, где $x'_{n-1} \in X_{n-1}$. Неравенство (1.2) в случае $x_{21} = x_{22} = x_{23}$ доказано. Осталось рассмотреть три случая: α) $x_{21} = x_{22} = 1$, $x_{23} = 0$; β) $x_{21} = 1$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 1$; γ) $x_{21} = 0$, $x_{22} = 1$, $x_{23} = 1$.

В случае α), $\det x_n = 0$.

В случае β) разложим определитель по 1-й строке:

$$\det x_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n2} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n3} & x_{n4} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

Получили $\det x_n = -\det x'_{n-2} - \det x'_{n-1}$, где $x'_{n-2} \in X_{n-2}$,

$x'_{n-1} \in X_{n-1}$. Отсюда по индукционному предположению следует, что $|\det x_n| \leqslant \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} = \varphi_n$.

В случае γ) доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Рассмотрим $n \times n$ матрицы A_n вида:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

Если в матрице A_n переставить местами 1-й и 2-й столбцы, а остальные оставить на месте, то получим матрицу, которую обозначим A'_n.

ЛЕММА 2.1. *Справедливы утверждения*:

1) *для* $n \in \mathbf{N}$, $\det A_n = \varphi_n$;

2) *для* $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, $\det A'_n = -\varphi_n$.

Доказательство. 1) Доказательство проводится индукцией по числу n. Для $n = 1$, $n = 2$ утверждение справедливо. Предположим, что утверждение доказано для чисел $n - 2$, $n - 1$. Докажем его для числа n, $n \geqslant 3$. Разложим $\det A_n$ по 1-й строке, после несложных вычислений получим, что $\det A_n = \det A_{n-2} + \det A_{n-1} = \varphi_n$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть R — рефлексивное бинарное отношение на множестве U, которое можно продолжить до некоторого частичного порядка на U (а значит, в силу известной теоремы Шпильрайна [6] до полного линейного порядка на U). Ясно, что отношение R антисимметрично.

Рассмотрим множество AI1 (U, R). В силу известных из [4] результатов функция e является единичной функцией, AI1 (U, R) — несингулярно. Элементы AI1 (U, R) можно представить ниже треугольными матрицами. Используя это матричное представление, найдем выражение для значений μ функций Мёбиуса множества AI1 (U, R) через определители некоторых (0,1) матриц.

Рассмотрим произвольный интервал $U_1 = [a;\ b]$, a, $b \in U$ мощности $n + 2$. Так как отношение R продолжаемо до порядка, то можно считать, что элементы множества U_1 обозначены целыми числами $a = 0, 1, \dots, n, n + 1 = b$ так, что для всех $x, y \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$, если $x \preccurlyeq y$, то $x \leqslant y$.

Пусть $M(\zeta) = (\zeta_{ij})$, $M(\mu) = (\mu_{ij})$ такие $(n+2) \times \times (n+2)$ матрицы, что $\zeta_{ij} = \zeta(i, j)$, $\mu_{ij} = \mu(i, j)$ для $i, j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$. Справедливо равенство $M(\mu) M(\zeta) = E$, где E — единичная $(n+2) \times (n+2)$ матрица. Поэтому $M(\mu) = (M(\zeta))^{-1}$. Используя известную формулу для вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы, имеем

$$M(\mu) = \operatorname{adj} M(\zeta), \tag{2.1}$$

так как $|M(\zeta)| = 1$. Из равенства (2.1), приравнивая элементы, расположенные в 1-м столбце, $(n+2)$-й строке матриц, находим

$$\mu(a, b) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & \zeta_{12} & 1 & & & & \\ 1 & \zeta_{13} & \zeta_{23} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \zeta_{1n} & \zeta_{2n} & \zeta_{3n} & \ldots & \zeta_{n-1\,n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}, \tag{2.2}$$

где выше диагонали, лежащей над главной диагональю, расположены нули.

Рассмотрим $\det y_n$, где y_n — $(n+1) \times (n+1)$ — матрицы вида

$$y_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ 1 & x_{12} & 1 & & & & \\ 1 & x_{13} & x_{23} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} & \ldots & x_{n-1\,n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

где $x_{ij} \in \{0, 1\}$ для всех i, j; выше диагонали, лежащей на главной диагонали, расположены нули. Обозначим множество всех таких матриц через Y_n.

ЛЕММА 2.2. *Для $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 3$, и для всех $y_n \in Y_n$ справедливы неравенства:*

$$-\varphi_{n-1} + (-1)^{n-1} \leqslant \det y_n \leqslant \varphi_{n-1} + (-1)^{n-1}.$$

Доказательство. Произведем следующие преобразования матрицы y_n: 1) к каждой строке матрицы, начиная со 2-й, прибавим 1-ю строку, умноженную на —1; 2) в преобразованной матрице к предпоследней строке прибавим последнюю, умноженную на —1; 3) разложим определитель получившейся матрицы сначала по 1-му столбцу, затем — по последнему. Получим, что

$$\det y_n = \begin{vmatrix} x'_{12} & 1 & & & & \\ x'_{13} & x_{23} & 1 & & & \\ x'_{14} & x_{24} & x_{34} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x'_{1n} & x'_{2n} & x'_{3n} & x'_{4n} & \ldots & x'_{n-1\,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -x'_{12} & 1 & & & & \\ -x'_{13} & x_{23} & 1 & & & \\ -x'_{14} & x_{24} & x_{34} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x'_{1n} & -x'_{2n} & -x'_{3n} & -x'_{4n} & \ldots & -x'_{n-1\,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -x'_{12} & 1 & & & & \\ -x'_{13} & x_{23} & 1 & & & \\ -x'_{14} & x_{24} & x_{34} & 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & -x'_{2n} & -x'_{3n} & -x'_{4n} & \ldots & -x'_{n-1\,n} \end{vmatrix} + (-1)^{n-1},$$

где $x'_{ij} = x_{ij} - 1$. Применяя лемму 1.1, получим нужное утверждение. Лемма доказана.

Из (1.2) и леммы 2.1 следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Из доказательства леммы 2.1 и леммы 1.2 видно, как нужно выбирать ζ-функцию на интервале $[a, b]$ (как выбирать отношение R), чтобы достигались наибольшие и наименьшие значения $\mu(a, b)$.

Муромский государственный
педагогический институт

Поступило
17.03.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А й г н е р М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.

[2] R o t a G.-C. On the foundations of combinatorial theory 1 // Z. Wahr. und Verw. 1964. G. 2. S. 340—368.

[3] S c h e i d H. Über die Möbiusfunktion einer lokal endlichen // Halbordnung. J. Comb. Theory. 1972. Bd 13. S. 315—331.

[4] С т е ч к и н Б. С. Об основаниях действительной Мёбиус-теории // Красноярск: Институт физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, 1979.

[5] С т е ч к и н Б. С. Бинарные функции на упорядоченных множествах // Труды МИАН СССР. Т. 143. С. 178—187.

[6] S z p i l r a j n E. Sur l'extension de l'orde partiel // Fund. Math. 1930. V. 16. P. 386—389.